This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

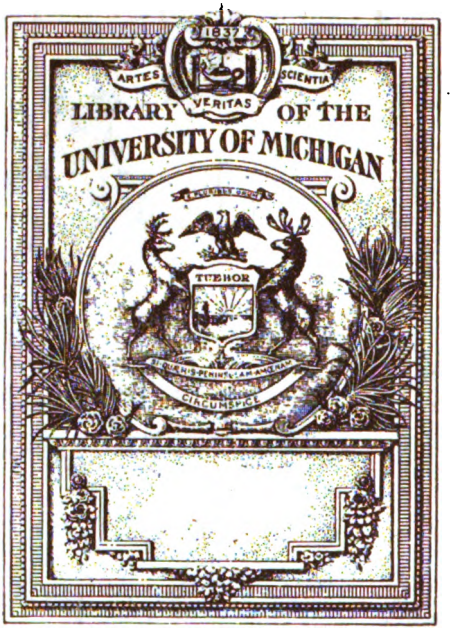
+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 468862

Digitized by Google



Digitized by Google

Mathematics
QA
1
W8
A5

Digitized by Google

Digitized by Google

Bes

WISKUNSTIGE
OPGAVEN
MET HARE
ONTBINDINGEN,

UITGEGEVEN

DOOR DE LEDEN

VAN HET

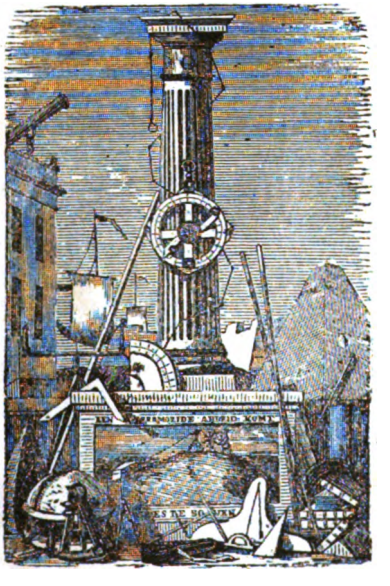
WISKUNDIG GENOOTSCHAP:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

VAN

1870—1874.

K. Bes
Tilburg.



AMSTERDAM,
WEYTINGH & BRAVE.
1874.

Digitized by Google

Digitized by Google

NAAMLIJST

DER

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

TE AMSTERDAM,

OP DEN 1 MAART, MDCCCLXXIV.

BESTUURDERS.

C. KNAPPER, Leeraar aan de H. B. S. te *Amsterdam*, *Voorzitter* . . . . . (*) 1870.

*** *Eerste Secretaris.*

J. W. TESCH, Leeraar aan de H. B. S. te *Amsterdam*, *Tweede Secretaris* . . . . . 1869.

Mr. H. S. VAN LENNEP, te *Amsterdam*, *Penningmeester* 1865.

Dr. D. VAN LANKEREN MATTHES, Directeur der H. B. S. te *Amsterdam* . . . . . 1851.

Dr. C. J. MATTHES, Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkunde aan het Athenaeum Illustre te *Amsterdam* . 1852.

Mr. J. J. TEDING VAN BERKHOUT, te *Amsterdam* . . 1854.

W. A. FROGER, Architect te *Amsterdam* . . . . 1857.

L. JANSE Bz., Leeraar aan de Kweekschool voor de Zeevaart te *Amsterdam* . . . . . 1864.

(*) *Jaartallen van de eerste verkiezing als Lid van het Bestuur.*

370520

Digitized by Google

BUITENGEWONE LEDEN VAN VERDIENSTE IN HET WETENSCHAPPELIJKE VAK.

J. P. Delprat, gepensioneerd Generaal-Majoor, te *'s Gravenhage* . . . . . (*) 1829.
Dr. R. van Rees, Emeritus Hoogleeraar te *Utrecht* . 1853.
Dr. C. J. Matthes. (Zie boven), ... 1864.
Dr. F. J. Stamkart, Hoogleeraar aan de Polytechnische school, te *Delft* . . . . . 1868.

BUITENGEWONE LEDEN VAN VERDIENSTE IN HET HUISHOUDELIJKE VAK.

D. W. Hinse, Oud-Hoofdonderwijzer te *Amsterdam* . 1854.
Dr. D. Bierens de Haan, Hoogleeraar aan de Hoogeschool te *Leiden* . . . . . 1864.
H. F. Fijnje, Oud-Hoofdinspecteur van den Waterstaat, te *Alphen* . . . . . 1870.
L. Janse Bz. (Zie boven) . . . . . 1870.

LEDEN VAN VERDIENSTE DER EERSTE KLASSE.

W. van Haarst, Hoofdonderwijzer aan de Fundatie van Renswoude te *Delft* . . . . . 1865.

LEDEN VAN VERDIENSTE DER TWEEDE KLASSE.

Dr. F. J. Stamkart. (Zie boven) . . . . . 1824.
W. Top Wzn., te *Zierikzee* . . . . . 1824.
F. J. van den Berg, Hoogleeraar aan de Polytechnische School te *Delft* . . . . . 1859.
F. Roeff, Onderwijzer in de Wiskunde te *Amsterdam* 1862.

LEDEN VAN DE WETENSCHAPPELIJKE COMMISSIE.

J. P. Delprat. (Zie boven) . . . . . 1821.
Dr. F. J. Stamkart. (Zie boven) . . . . . 1847.
Dr. C. J. Matthes. (Zie boven) . . . . . 1858.

(*) *Jaartallen van de benoeming tot Lid van verdienste, enz.*

Digitized by Google

Dr. D. Bierens de Haan. (Zie boven) . . . . . 1860.
Dr. C. H. C. Grinwis, Hoogleeraar aan de Hoogeschool te *Utrecht* . . . . . 1870.
Mr. J. J. Teding van Berkhout. (Zie boven) . . 1870.

BIBLIOTHECARIS.

D. Bosch, Boekhandelaar en Uitgever . . . . . 1869.

INSPECTEURS VAN DE BOEKERIJ.

W. A. Froger . . . . . 1869.
J. W. Tesch . . . . . 1873.

INSPECTEUR DER FONDSARTIKELEN.

Mr. H. S. van Lennep . . . . . 1869.

CORRESPONDENTEN.

W. Kreling, Leeraar aan de R. H. B. S. te *Utrecht* 1864.
Ph. Bello, Leeraar aan de H. B. S. te *Deventer* . . 1865.
J. Versluijs, Leeraar aan de R. H. B. S. te *Groningen* 1868.
Dr. F. J. Stamkart, te *Delft* . . . . . 1869.
M. H. Pimentel, Ambtenaar bij het Ministerie van Financiën te *'s Gravenhage* . . . . . 1869.
Dr. C. P. Burger, Hoogleeraar-Directeur van de R. H. B. S. te *Leeuwarden* . . . . . 1870.
J. Ringeling, Leeraar aan de R. H. B. S. te *'s Hertogenbosch* . . . . . 1870.
Dr. H. Onnen, Leeraar aan de R. H. B. S. te *Roermond* 1870.
L. van Zanten Jzn., Leeraar aan de H. B. S. te *Tiel* 1870.

VOLLEDIGE NAAMLIJST DER LEDEN.

H. F. Fijnje. (Zie boven). . . . . 1813.
C. J. Bolten, Oud-Hoofdingenieur, te *'s Gravenhage* . 1818.
J. P. Delprat. (Zie boven) . . . . . 1819.
W. Top Wzn. (Zie boven) . . . . . 1819.

Digitized by Google

Dr. F. J. Stamkart. (Zie boven). . . . . 1823.
P. H. v. d. Meulen, Gepensioneerd Kolonel der Artillerie, te *Delft*. . . . . 1824.
W. A. Froger. (Zie boven) . . . . . 1828.
Mr. E. Boas, te *Amsterdam* . . . . . 1831.
Dr. D. van Lankeren Matthes. (Zie boven). . . . 1832.
D. W. Hinse. (Zie boven) . . . . . 1833.
K. Dekker, Oud-Hoofdonderwijzer, te *Alkmaar* . . 1834.
J. M. Obreen, Directeur van de Modelkamer bij het Departement van Marine, te *'s Gravenhage* . . . 1834.
J. C. Olivier, te *Vlaardingen* . . . . . 1836.
Mr. J. Heemskerk Azn., te *'s Gravenhage* . . . . 1836.
J. A. Krajenbrink, te *Togalwoero*, Residentie *Krawang*, *Java*. . . . . 1838.
A. Hulscher, Leeraar aan het Gymnasium, te *Arnhem*. 1838.
J. H. Schäfer, Kapitein-Ingenieur, te *Geertruidenberg*. 1840.
B. P. Bogaerts, IJker, te *Breda* . . . . . 1840.
R. van de Weerd, te *Enschedé*. . . . . 1840.
Dr. D. Bierens de Haan. (Zie boven) . . . . . 1841.
W. C. Verseput, Ontvanger, te *Hedel*. . . . . 1841.
C. W. Smith, te *Bergen op Zoom* . . . . . 1841.
Dr. E. B. Asscher, te *Amsterdam* . . . . . 1843.
Dr. C. P. Burger. (Zie boven) . . . . . 1844.
Dr. V. S. M. van der Willigen, Directeur van het Physisch Kabinet aan Teyler's Stichting, te *Haarlem*. 1846.
C. Julius C.Fzn., te *Beverwijk* . . . . . 1846.
Dr. L. Cohen Stuart, Directeur der Polytechnische School te *Delft*. . . . . 1847.
W. van Haarst. (Zie boven). . . . . 1848.
M. H. Pimentel. (Zie boven). . . . . 1848.
Mr. J. J. Teding van Berkhout. (Zie boven) . . . 1849.
J. Ringeling. (Zie boven). . . . . 1849.
Mr. H. de Neufville, te *Amsterdam* . . . . . 1849.
J. H. van Sillevoldt, Oud-Directeur van de H. B. S. te *'s Gravenhage*, te *Oegstgeest* . . . . . 1849.
Dr. P. J. Hollmann, te *Edam* . . . . . 1851.
Dr. C. J. Matthes. (Zie boven) . . . . . 1851.
F. M. Polak, te *'s Gravenhage* . . . . . 1852.

Digitized by Google

J. M. Heybroek, Onderwijzer in de Zeevaartkunde, te *Amsterdam* . . . . . 1852.
Dr. C. H. C. Grinwis. (Zie boven) . . . . . 1853.
Dr. R. van Rees. (Zie boven) . . . . . 1853.
W. M. Logeman, Leeraar aan de H. B. S. te *Haarlem*. 1853.
F. Roeff. (Zie boven). . . . . 1854.
W. J. van Goor, Leeraar aan de R. H. B. S. te *Winterswijk* . . . . . 1855.
H. Schoo, Leeraar aan de H. B. S. te *Hoorn* . . . 1858.
F. J. van den Berg. (Zie boven). . . . . 1858.
A. Psicha, te *Amsterdam* . . . . . 1859.
W. Kreling. (Zie boven). . . . . 1859.
Dr. E. van der Ven, Directeur der H. B. S. te *Haarlem*. . . . . 1859.
Dr. D. G. Cramer, Directeur der H. B. S te *Zutfen* . 1859.
A. F. van Haastert, *Nederlandsch Indië* . . . . 1859.
Mr. H. S. van Lennep. (Zie boven) . . . . . 1860.
Dr. R. A. Mees, Hoogleeraar te *Groningen*. . . . 1861.
A. M. Dekkers, te *Apeldoorn* . . . . . 1861.
C. P. J. van den Berg, te *Utrecht* . . . . . 1861.
Ph. Bello. (Zie boven) . . . . . 1862.
J. Carbasius, Telegrafist, te *'s Gravenhage*. . . . 1862.
Dr. A. van Benthem Gzn., Leeraar aan de Industrie- en Handelsschool te *Enschedé*. . . . . 1863.
D. B. Wisselink, Leeraar aan het Gymnasium te *Deventer*. . . . . 1863.
L. Janse. (Zie boven). . . . . 1863.
J. W. Tesch. (Zie boven) . . . . . 1863.
B. P. Moors, IJker, te *Breda* . . . . . 1863.
G. Rijperman, te *Nijmegen* . . . . . 1864.
J. Kors, te *Groningen* . . . . . 1864.
A. Kettner, te *Amsterdam* . . . . . 1865.
D. J. Korteweg, Leeraar aan de H. B. S. te *Breda* . 1865.
M. C. Paraira, te *Amsterdam* . . . . . 1865.
A. van Lennep, te *Amsterdam* . . . . . 1865.
J. Versluys. (Zie boven). . . . . 1865.
J. J. Roelants, Ingenieur van den Waterstaat, te *Amsterdam* . . . . . 1865.

Digitized by Google

P. H. van der Ley, Leeraar aan de Rijks Kweekschool te *Haarlem* . . . . . 1865.
L. van Zanten. (Zie boven) . . . . . 1865.
E. J. Schoemaker, te *Haarlem* . . . . . 1865.
Dr. H. Onnen. (Zie boven) . . . . . 1865.
J. J. Suyver, Leeraar in de Zeevaartkunde aan het Zeemanshuis te *Amsterdam* . . . . . 1866.
Dr. D. J. Voorzanger, Leeraar aan de H. B. S. te *Veendam*. . . . . 1866.
J. D. Wijnkoop, te *Amsterdam* . . . . . 1866.
L. E. Asser, te *Amsterdam* . . . . . 1866.
Dr. A. T. van Aken, Directeur der H. B. S. te *'s Gravenhage* 1866.
L. C. Bouricius, *Nederlandsch Indië* . . . . . 1866.
J. Kiel, te *Utrecht* . . . . . 1867.
Dr. J. Nieuwenhuijzen Kruseman, Leeraar aan de H. B. S. te *Amersfoort*. . . . . 1867.
W. H. Wisseling, Leeraar aan de R. H. B. S. te *Heerenveen* . . . . . 1867.
Dr. A. Eecen, te *Oud-Karspel* . . . . . 1867.
J. Timmer, Leeraar aan de H. B. S. voor Meisjes te *Rotterdam* . . . . . 1867.
Dr. H. J. Rink, Leeraar aan de H. B. S. te *Delft* . 1868.
J. W. Weevers, Leeraar aan de H. B. S. te *Zaandam*. 1868.
K. H. Wallien, te *Amsterdam* . . . . . 1868.
T. K. van Velsen, te *'s Gravenhage* . . . . . 1868.
D. Bosch. (Zie boven). . . . . 1869.
G. de Vries, te *Amsterdam* . . . . . 1869.
C. Knapper. (Zie boven) . . . . . 1869.
J. M. Vaz Dias, te *Amsterdam* . . . . . 1869.
Dr. S. R. J. van Schevichaven, Leeraar aan het Gymnasium te *Amsterdam*. . . . . 1869.
S. de Jong, Hoofdonderwijzer te *Haastrecht*. . . . 1869.
H. Japikse, Leeraar aan de H. B. S. te *Goes* . . . 1869.
T. van Tijn, te *Leiden* . . . . . 1870.
Ch. Menges, te *Amsterdam* . . . . . 1870.
Dr. J. W. Muurling, te *Vlaardingen* . . . . . 1870.
M. Ritter, te *'s Gravenhage*. . . . . 1870.
Ph. Rank, Hoofdonderwijzer te *Amsterdam*. . . . 1870.

Digitized by Google

J. Th. Cattie, Leeraar aan de H. B. S. te *Arnhem* . 1871.
Dr. G. Schouten, Leeraar aan de H. B. S. te *Kampen*. 1871.
P. C. F. Frowein, te *Amsterdam* . . . . . 1871.
D. G. Brandsma, te *Bolsward* . . . . . 1871.
Dr. A. Rutgers, Leeraar aan het Gymnasium te *Brielle*. 1871.
D. H. Cocheret, te *Heteren*. . . . . 1871.
C. Lely, te *Amsterdam* . . . . . 1871.
J. C. Eger, te *Doetinchem* . . . . . 1871.
T. Greydanus, Leeraar aan de H. B. S. voor Meisjes te *Groningen* . . . . . 1871.
Dr. F. de Boer, Leeraar aan de H. B. S. te *Deventer*. 1871.
A. Sissingh, Directeur der Zeevaartkundige School te *Rotterdam* . . . . . 1871.
F. A. Schuurmans, te *Amsterdam* . . . . . 1872.
F. G. A. Manders, te *Amsterdam* . . . . . 1872.
B. P. van Cittert, te *Amsterdam* . . . . . 1872.
C. J. J. Ninck Blok, Leeraar aan de R. H. B. S. te *Zwolle*. 1872.
F. J. van Buuren, te *Schiedam*. . . . . 1872.
H. W. de Graaf, te *Amsterdam* . . . . . 1872.
G. J. D. Mounier, te *Leiden* . . . . . 1872.
C. de Haas Jbzn., Leeraar aan de Zeevaartkundige School te *Rotterdam* . . . . . 1872.
J. A. Bientjes, Leeraar aan de H. B. S. voor Meisjes te *Amsterdam* . . . . . 1872.
H. A. Lorentz, Leeraar aan de B. A. te *Arnhem* . 1872.
Dr. V. A. Julius, Leeraar aan de R. H. B. S. te *Roermond* 1873.
M. Beens, te *Amsterdam* . . . . . 1873.
L. van der Est, te *Amsterdam*. . . . . 1873.
Dr. W. Kapteyn, Leeraar aan de H. B. S. te *Maastricht* 1873.
J. J. Brutel de la Rivière, te *Haarlem* . . . . 1873.
A. N. Godefroy, Architect te *Amsterdam* . . . . 1873.
J. R. Escher, te *Leiden*. . . . . 1873.
Dr. F. van Wageningen, IJker te *Zwolle* . . . . 1873.
T. B. van Wettum, te *Leiden* . . . . . 1873.
A. P. van Schiefgaarde, te *Leiden* . . . . . 1873.
F. A. T. Delprat, Generaal-Majoor te *Amsterdam*. . 1873.
Dr. J. de Jongh, te *Leiden* . . . . . 1874.
K. Bes, te *Leiden* . . . . . 1874.

Digitized by Google

Digitized by Google

WISKUNSTIGE OPGAVEN

MET HARE

ONTBINDINGEN.

I. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Als de projectiën van een bol, de doorgangen van een vlak dat den bol snijdt en de projectiën eener lijn in dat vlak gegeven zijn, begeert men in dat zelfde vlak eene raaklijn aan den bol te trekken evenwijdig met de gegeven lijn, zonder daarbij de doorsnede neder te slaan.

Opgelost *door* A. Eecen, W. van Haarst, A. Benthem Gz. *en* W. H. Wisselink.

Oplossing *van* A. Eecen.

Zij, zie fig. 1, (M', M'') het middelpunt van den gegeven bol, (PQS) het gegeven vlak en $(B'C', B''C'')$ de gegeven lijn in dit vlak. Construeert men nu den omhullings-cylinder, welks beschrijvende lijn evenwijdig aan de gegeven $(B'C', B''C'')$ is, dan voldoet iedere beschrijvende lijn van dezen cylinder aan de voorwaarden, dat zij den bol raakt en evenwijdig is aan de gegeven lijn. De lijnen, welke bij gevolg het gegeven vlak (PQS) gemeen heeft met dit cylinder-vlak, zijn de te zoeken lijnen. Om deze lijnen te construeeren, zoekt men den doorgang van het cylinder-vlak met het horizontale vlak. Deze doorgang zal eene ellips zijn, welke (zooals duidelijk in de constructie zigtbaar is) de lijn AD tot groote en de lijn EF, gelijk de middellijn van den bol, tot kleine as heeft. De snijpunten van den doorgang (QS) met de ellips bepalen dus de doorgangen van de te zoeken lijnen met het horizontale vlak. Deze punten zijn hier G en H. Trekt men derhalve uit deze punten lijnen evenwijdig aan de gegeven lijn $(B'C', B''C'')$, dan heeft men de begeerde. Deze lijnen zijn hier niet getrokken, om de figuur niet noodeloos onduidelijk te maken.

Digitized by Google

Zonder de ellips, waarvan de assen AD en EF zijn, te trekken, kan men toch de snijpunten met den doorgang (QS) bepalen. Zie hierover BRIOT, *Leçons de géométrie analytique*, p. 136.

II. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Een bol is door zijne projectiën gegeven. Vrage naar de projectiën eener koorde van gegeven lengte, welke evenwijdig loopt met eene gegeven lijn, en wier midden eene gegeven hoogte boven het horizontale vlak heeft.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST, A. EECEN, A. BENTHEM GZ. *en* W. H. WISSELINK.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Laat, (zie fig. 2), M_1M_2 het middelpunt des bols, ab de helft der gegevene koorde zijn; beschrijven wij dan op den straal aM_1 des bols een' halven cirkel, en zetten wij daarin ab als koorde uit, dan moeten blijkbaar alle koorden van de gegevene lengte zich op den afstand bM_1 van het middelpunt des bols verwijderen. Beschrijven wij derhalve, met bM_1 als straal, om M_1 en M_2 als middelpunten, cirkels, dan kunnen wij deze beschouwen als de projectiën eens bols, van alle welks raaklijnen door het oppervlak van den gegeven' bol koorden worden afgesneden, welke alle de gegevene lengte hebben. De gevraagde koorde zal alzoo eene raaklijn aan den kleinen bol moeten zijn. Als nu f_1g_1, f_2g_2 de gegevene lijn is, waarmede de koorde evenwijdig moet zijn en gevolgelijk ook de raaklijn aan den binnensten bol, zoo zullen natuurlijk de raakpunten van alle daarmede evenwijdige raaklijnen in een vlak liggen, dat, door het middelpunt des bols gaande, de gegevene lijn loodregt snijdt. Dat vlak is hier B_1BB_2. Het raakpunt der bedoelde raaklijn, dat is, het midden der gevraagde koorde, moet alzoo in het vlak B_1BB_2 liggen. Maar het midden dier koorde moet tevens op den gegeven' afstand h_1h_2 boven het horizontale vlak, en derhalve in het vlak AA, gelegen zijn, dat den kleinen bol volgens een' cirkel snijdt, welks middellijn ov, en welks horizontale projectie alzoo de om M_1 met $\frac{1}{2}ov$ beschreven cirkel zal wezen. Nu worden de projectiën van het raakpunt of midden gemakkelijk be-

Digitized by Google

paald. Immers daar dit punt in beide vlakken AA en B_1BB_2 moet liggen, zal het een punt moeten zijn van de onderlinge doorsnede h_1i_1, h_2i_2 dezer vlakken; maar dewijl het punt op den kleinen bol moet liggen, moet het een punt van de doorsnede van het vlak AA met dien bol zijn. Blijkbaar zijn er dus twee zulke punten, en wel m_1m_2 en n_1n_2. Trekken wij alzoo door deze punten lijnen evenwijdig met f_1g_1, f_2g_2, dan zijn daardoor de raaklijnen gevonden, van welke de gevraagde koorden worden afgesneden, en wij zullen nog slechts de punten behoeven te bepalen, waarin zij den gegeven bol snijden. Daar ons echter de lengte der koorden bekend is, vinden wij derzelver projectiën gemakkelijk. Wij slaan daartoe de eene raaklijn C_1I_1, C_2I_2 om hare horizontale projectie neer, dan komt het raakpunt in n, nemen vervolgens $dn = ab$ en trekken dr_1; door dan $n_1s_1 = m_1p_1 = m_1q_1 = n_1v_1$ te nemen, worden de horizontale en dus ook de verticale projectiën p_2, q_2, r_2 en s_2 gevonden.

III. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Een cubus is in zulk een stand geprojecteerd, dat éene zijner ribben in het horizontale vlak ligt en de zijvlakken, welke deze ribbe gemeen hebben, gelijke hoeken met dat vlak maken. Vervolgens is om één der hoogste hoekpunten als middelpunt met eene ribbe als straal een bol beschreven. Men verlangt de doorsnede van den cubus met den bol te projecteeren.

Opgelost *door* W. van Haarst, C. J. Bolten, A. Benthem Gz. *en* A. Eecen.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Om eerst den kubus in den begeerden stand te projecteeren, nemen wij aan, (zie fig. 3), dat de ribbe, die in het horizontale vlak ligt, C_1G_1, C_2G_2 is, zoodat C_1G_1 de werkelijke lengte der ribbe voorstelt. Trekken wij dan (F_1H_1) loodregt op C_1G_1, en nemen wij $FF_1 = F_1G_1 = H_1G_1 = HH_1 = aG_1$, terwijl $ab = bG_1$ is, dan zal, als wij FG_1 en HG_1 trekken, en vervolgens $EF = EH = FG_1$ maken, het kwadraat EFG_1H kunnen beschouwd worden als het neergeslagen zijvlak van den kubus, en wij vinden alzoo de hoogte van de hoekpunten E, F en H boven het horizontale vlak, zoodat dus E_2, F_2 en H_2 hunne verticale projectiën zijn, maar de

Digitized by Google

hoekpunten A, B en D hebben dezelfde hoogten, en hunne verticale projectiën zijn dus mede bekend. $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$, $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$ is alzoo de kubus in zijn' bedoelden stand. Beschrijven wij nu, met A_1G_1 als straal, om de punten E_2 en E_1 als middelpunten, cirkels, dan kan men deze als de projectiën des bedoelden bols beschouwen. Blijkbaar moeten de punten A_1A_2, F_1F_2 en H_1H_2 op het oppervlak des bols liggen, waaruit volgt, dat de zijvlakken $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $B_1C_1G_1F_1$, $B_2C_2G_2F_2$ en $C_1D_1H_1G_1$, $C_2D_2H_2G_2$ elk slechts één van die drie punten met het oppervlak des bols gemeen hebben, en waarvan dus alle overige punten buiten den bol liggen. De doorsnede moet alzoo in de drie overige zijvlakken gelegen zijn. Om die van het zijvlak $E_1F_1G_1H_1$, $E_2F_2G_2H_2$ met den bol te bepalen, kunnen wij van $EFGH$ gebruik maken. Want door om E, met EF als straal, een' cirkel te beschrijven, is deze de neergeslagen doorsnede, en men kan dus zooveel punten projecteeren als men verkiest. Hier zijn de punten c en d en e genomen, wier projectiën c_1c_2, d_1d_2, e_1e_2 zijn. Om de doorsneden van de beide andere vlakken met den bol te vinden, brengen wij vlakken, evenwijdig met het horizontale vlak, door den kubus en den bol, dan zullen zij den eersten volgens regthoeken, die gemakkelijk geconstrueerd worden en den laatsten volgens cirkels snijden, die men even gemakkelijk vindt. Hier zijn alzoo de punten l_1l_2, m_1m_2, r_1r_2 en s_1s_2 bepaald. De behoorlijke vereeniging dier punten geeft de verlangde doorsnede.

IV. Voorstel.

Door W. van Haarst.

De coördinaten te bepalen van het chordaalpunt van drie cirkels, wier vergelijkingen gegeven zijn.

Opgelost *door* C. J. Bolten, A. Benthem Gz., W. H. Wisselink, W. van Haarst *en* A. Eecen.

Oplossing *van* C. J. Bolten.

Laten de vergelijkingen der drie gegeven cirkels zijn:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$\text{en } (x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Dan wordt de vergelijking der chordaal van twee dier cir-

Digitized by Google

kels gevonden, door derzelver vergelijkingen van elkander af te trekken.

Wij vinden dus voor de vergelijking der chordaal van de cirkels (2) en (1),

$$2(a_1-a)x+2(b_1-b)y=(r^2-a^2-b^2)-(r_1^2-a_1^2-b_1^2).(4)$$

en van de cirkels (3) en (1),

$$2(a_2-a)x+2(b_2-b)y=(r^2-a^2-b^2)-(r_2^2-a_2^2-b_2^2).(5)$$

Wij vinden de coördinaten van het snijpunt dezer twee chordalen of van het chordaalpunt der drie gegevene cirkels door de waarden van x en y uit de twee laatste vergelijkingen op te lossen.

Vermenigvuldigen wij daartoe (4) met (a_2-a) en (5) met (a_1-a) en nemende alsdan het verschil dezer vergelijkingen, dan verkrijgen wij,

$$2\{(a_2-a)(b_1-b)-(a_1-a)(b_2-b)\}y=$$
$$=(a_2-a)\{(r^2-a^2-b^2)-(r_1^2-a_1^2-b_1^2)\}\ldots.$$
$$\ldots.-(a_1-a)\{(r^2-a^2-b^2)-(r_2^2-a_2^2-b_2^2)\},$$

waaruit na herleiding,

$$y=\frac{(a_2-a_1)(r^2-a^2-b^2)-(a_2-a)(r_1^2-a_1^2-b_1^2)+(a_1-a)(r_2^2-a_2^2-b_2^2)}{2\{a(b_2-b_1)-a_1(b_2-b)+a_2(b_1-b)\}}.$$

Op gelijke wijze uit de vergelijkingen (4) en (5) y eliminerende, door de eerste met (b_2-b) en de laatste met (b_1-b) te vermenigvuldigen en vervolgens het verschil te nemen, vinden wij na herleiding

$$x=\frac{(b_2-b_1)(r^2-a^2-b^2)-(b_2-b)(r_1^2-a_1^2-b_1^2)+(b_1-b)(r_2^2-a_2^2-b_2^2)}{2\{-a(b_2-b_1)+a_1(b_2-b)-a_2(b_1-b)\}},$$

waardoor dus de gevraagde coördinaten bekend zijn.

De gevonden waarden voor x en y kunnen echter zeer vereenvoudigd worden, door aan te nemen, dat een der coördinaten-assen, bijv. die der x, door de middelpunten der cirkels (1) en (2) en alsdan de andere of die der y, door het middelpunt van den cirkel (1) gaat, waardoor aan de algemeenheid der oplossing niets wordt te kort gedaan.

In dat geval worden

$$a=0,\ b=0 \text{ en } b_1=0,$$

waardoor de gevonden waarden overgaan in:

Digitized by Google

$$y = \frac{a_2(r^2 - r_1^2 + a_1^2) - a_1\{r^2 - r_2^2 + a_2^2 + b_2^2)}{-2a_1b_2} =$$

$$= \frac{a_1(r^2 - r_2^2 + a_2^2 + b_2^2) - a_2(r^2 - r_1^2 + a_1^2)}{2a_1b_2}$$

en $z = \frac{b_2(r^2 - r_1^2 + a_1^2)}{2a_1b_2}$.

Zijn de stralen der drie cirkels gelijk of $r = r_1 = r_2$, dan wordt,

$$y = \frac{a_1(a_2^2 + b_2^2) - a_2 a_1^2}{2a_1b_2} = \frac{a_2^2 + b_2^2 - a_1 a_2}{2b_2}$$

en $z = \frac{a_1^2 b_2}{2a_1b_2} = \frac{1}{2}a_1$.

V. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Men vraagt te bewijzen, dat het chordaalpunt van drie gelijke cirkels tevens het middelpunt is van een cirkel welks omtrek door de middelpunten van gezegde cirkels heengaat.

OPGELOST *door* A. BENTHEM GZ., C. J. BOLTEN, W. H. WISSELINK, W. VAN HAARST *en* A. EECEN.

OPLOSSING *van* A. BENTHEM GZ.

Nemen wij het middelpunt der centraal-lijn, die twee der middelpunten m_1 en m_2 verbindt, tot oorsprong van een rechthoekig coördinaten-stelsel aan en die centraal-lijn zelve tot as der abscissen, dan zijn de vergelijkingen der cirkels, in de onderstelling dat de coördinaten der middelpunten zijn:

$$(-a, 0), \quad (a, 0) \quad \text{en} \quad (p, q),$$

$$(z+a)^2 + y^2 = r^2, (z-a)^2 + y^2 = r^2 \text{ en } (z-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

De vergelijking van de chordaal-lijn der beide eersten is:

$$z = 0,$$

die van den eersten en den derden:

$$2z(p+a) + 2qy = p^2 + q^2 - a^2,$$

dus zijn de coördinaten van het chordaal-punt:

$$z = 0 \text{ en } y = \frac{p^2 - a^2}{2q} + \frac{1}{2}q.$$

De afstanden van dit punt tot m_1 en m_2 zijn onderling en elk gelijk aan: $\sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{p^2 - a^2}{2q} + \frac{1}{2}q\right)^2\right]}$

Digitized by Google

en de afstand tot het derde middelpunt $(p\,q)$ is:

$$\sqrt{\left[p^2+\left(\frac{p^2-a^2}{2q}-\tfrac{1}{2}q\right)^2\right]}.$$

De ontwikkeling geeft voor beide waarden:

$$\sqrt{\left[\left(\frac{p^2-a^2}{2q}\right)^2+\tfrac{1}{2}(p^2+a^2)+\tfrac{1}{4}q^2\right]}$$

derhalve is het chordaal-punt op gelijken afstand van de drie middelpunten verwijderd.

Oplossing van W. H. Wisselink.

Nemen we in de oplossing der vorige opgave $r=r_1=r_2$, dan vindt men voor de coördinaten van het chordaalpunt:

$$x=\tfrac{1}{2}a \quad \text{en} \quad y=\frac{1}{2b}(a_1^2+b^2-aa_1) \;.\;.\;.\;.\; (\alpha).$$

Stellen we nu den cirkel, die door de middelpunten der drie gelijke cirkels gaat, voor door:

$$(x-A)^2+(y-B)^2=R^2,$$

dan gaat deze door de punten $(0, 0)$, $(a, 0)$ en (a_1, b).

Wij hebben dus:

$$(0-A)^2+(0-B)^2=R^2,$$
$$(a-A)^2+(0-B)^2=R^2,$$
$$(a_1-A)^2+(b-B)^2=R^2.$$

Uit deze drie vergelijkingen A en B oplossende, vinden wij:

$$A=\tfrac{1}{2}a,$$
$$B=\frac{1}{2b}(a_1^2+b^2-aa_1),$$

zijnde de coördinaten van het middelpunt des cirkels, welks omtrek door de middelpunten der drie cirkels gaat. Daar deze coördinaten blijkens (α) geheel overeenstemmen met die van het chordaalpunt, blijkt daaruit de waarheid der stelling.

Ander bewijs. Nemen we in aanmerking, dat de raaklijnen uit het chordaalpunt aan drie cirkels even lang zijn, zoo volgt daaruit onmiddelijk, dat, wanneer die drie cirkels gelijk zijn, de afstanden van het chordaalpunt tot het middelpunt van elk der drie cirkels onderling gelijk zijn, m. a. w. dat een cirkel uit het chordaalpunt als middelpunt met een straal, gelijk aan den afstand van dat punt tot het middelpunt van één der drie gelijke cirkels beschreven, tevens door de middelpunten der beide andere cirkels zal gaan.

Digitized by Google

VI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Op een voetstuk, dat de gedaante van een regthoek heeft, staan loodregt drie stijlen op 6, 5 en 8 duim afstands van eene langste en in dezelfde volgorde genomen op 7, 3 en 17 duim van eene kortste zijde, terwijl hunne lengten respectievelijk bedragen 12, 4 en 1 duim. Deze stijlen ondersteunen een cirkel. Men begeert den inhoud der ellips te bepalen welke de projectie is van den cirkel op het voetstuk.

Opgelost *door* W. van Haarst, A. Benthem Gz., W. H. Wisseling *en* A. Eecen.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Beschouwen wij de boveneinden der stijlen als punten in de ruimte, dan kunnen wij aannemen, dat 6, 7 en 12 de coördinaten van A, 5, 3, 4 die van B en 8, 17 en 1 die van C zijn. Men vindt dan terstond voor de onderlinge afstanden dier punten

$$AB = \sqrt{\{(6-5)^2+(7-3)^2+(12-4)^2\}} = 9,$$
$$AC = \sqrt{\{(8-6)^2+(17-7)^2+(12-1)^2\}} = 15$$
$$\text{en } BC = \sqrt{\{(8-5)^2+(17-3)^2+(4-1)^2\}} = 214$$

en dan zal blijkbaar de om den driehoek ABC beschreven cirkel de bedoelde zijn. Zijn straal R noemende, is

$$R^2 = \frac{81 \times 225 \times 214}{(9+15+\sqrt{214})(15+\sqrt{214}-9)(9-15+\sqrt{214})(9+15-\sqrt{214})}$$
$$= \frac{135^2 \times 214}{362 \times 178} = 60{,}5275 \text{ vierk. duimen}$$

en alzoo de inhoud van dien cirkel

$R^2\pi = 60{,}5275 \times 3{,}14159 = 1{,}90152588725$ vierk. palmen.

Zij nu de vergelijking van het vlak, waarin de cirkel ligt,

$$z + Ay + Bz + C = 0,$$

dan hebben wij, daar de punten A, B en C in dit vlak liggen, de drie vergelijkingen

$$6 + 7A + 12B + C = 0,$$
$$5 + 3A + 4B + C = 0$$
$$\text{en } 8 + 17A + B + C = 0.$$

Het vijfvoud van het verschil der beide eerste is dan

$$5 + 20A + 40B = 0$$

en het dubbel van het verschil der eerste en der derde wordt

Digitized by Google

$$4 + 20A - 22B = 0.$$

Het verschil van deze beide is

$$1 + 62B = 0, \text{ dus } B = -{}^1/_{62};$$

en daardoor wordt

$$A = \frac{1 + 8B}{4} = -{}^{27}/_{124} \text{ en } C = -3A - 4B - 5 = -4^{35}/_{124}.$$

Het bedoelde vlak is bijgevolg

$$x - {}^{27}/_{124}y - {}^1/_{62}z - 4^{35}/_{124} = 0 \text{ of } 124x - 27y - 2z - 531 = 0.$$

Stellen wij nu den hoek, dien dit vlak met het vlak xy maakt, door α voor, dan wordt, zooals bekend is,

$$Cos\,\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{(124^2 + 27^2 + 2^2)}} = \frac{2}{\sqrt{16109}} = 0{,}0157578.$$

En dewijl inh. projectie gelijk is aan den inhoud des cirkels, vermenigvuldigd met den cosinus van den hoek, dien het vlak des cirkels met dat der projectie maakt, vinden wij

Inh. projectie $= 2{,}9964$ vierk. duimen.

VII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Vrage meetkundig te bewijzen, dat voor $A + B + C = 180°$:

$$Sin\,2A + Sin\,2B + Sin\,2C = 4\,Sin\,A\,.\,Sin\,B\,.\,Sin\,C.$$

Opgelost *door* A. Benthem Gz., W. H. Wisseling *en* W. van Haarst.

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

In de leerboeken der Trigonometrie vindt men meetkundig bewezen, dat de inhoud van een driehoek PQR gelijk is aan $\frac{1}{2}PQ \times PR \times Sin\,P$.

Beschrijft men dan om een driehoek ABC een cirkel, wiens middelpunt zij O, wiens straal zij R, dan is:

$$2\triangle ABC = R^2(Sin\,2A + Sin\,2B + Sin\,2C).$$

Maar nu is ook

$$2\triangle ABC = AC \times BC \times Sin\,C = 4 \times \frac{AC}{2} \times \frac{BC}{2} \times Sin\,C$$

$$= 4R^2 \times \frac{AC}{R} \times \frac{BC}{R} \times Sin\,C$$

$$= 4R^2 \times Sin\,B \times Sin\,A \times Sin\,C,$$

derhalve

$$Sin\,2A + Sin\,2B + Sin\,2C = 4\,Sin\,A \times Sin\,B \times Sin\,C.$$

Digitized by Google

VIII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Vrage meetkundig te bewijzen, dat voor $A + B + C = 180°$:
$Tang\ A + Tang\ B + Tang\ C = Tang\ A . Tang\ B . Tang\ C.$

Opgelost *door* A. Eecen, A. Benthem Gz., W. H. Wisselink *en* W. van Haarst.

Oplossing *van* A. Eecen.

(Zie fig. 4) Uit $\triangle$ AME $\backsim$ $\triangle$ HMB volgt $\frac{AE}{R} = \frac{BH}{MH} = Tang\ A.$

Uit $\triangle$ BMF $\backsim$ $\triangle$ KMC volgt $\frac{BF}{R} = \frac{CK}{MK} = Tang\ B.$

Uit $\triangle$ DMG $\backsim$ $\triangle$ LMC volgt $\frac{DG}{R} = \frac{CL}{ML} = Tang\ C.$

Uit $\triangle$ MBH $\backsim$ $\triangle$ MPK volgt $KP = BH \times \frac{MK}{R}$; $MP = MH \times \frac{MK}{R}$

Uit $\triangle$ MBH $\backsim$ $\triangle$ COK volgt $OK = MH \times \frac{CK}{R}$; $CO = BH \times \frac{CK}{R}$

derhalve, daar CO// en = PL.

$$CL = KP + OK = BH \times \frac{MK}{R} + MH \times \frac{CK}{R}$$

$$ML = PL - MP = BH \times \frac{CK}{R} - MH \times \frac{MK}{R}$$

$$BH \times \frac{MK}{R} \times ML + MH \times \frac{CK}{R} \times ML = BH \times \frac{CK}{R} \times CL - MH \times \frac{MK}{R} \times CL$$

$$\frac{BH}{MH} \times ML \times MP + \frac{CK}{MK} \times ML \times MP = \frac{BH}{MH} \times \frac{CK}{MK} \times CL \times MP - \frac{CL}{ML} \times ML \times MP$$

$$\frac{BH}{MH} \times ML \times MP + \frac{CK}{MK} \times ML \times MP + \frac{CL}{ML} \times ML \times MP =$$

$$= \frac{BH}{MH} \times \frac{CK}{MK} \times \frac{CL}{ML} \times ML \times MP$$

$$\frac{BH}{MH} + \frac{CK}{MK} + \frac{CL}{ML} = \frac{BH}{MH} \times \frac{CK}{MK} \times \frac{CL}{ML}$$

$$Tang\ A + Tang\ B + Tang\ C = Tang\ A \times Tang\ B \times Tang\ C$$

Aanmerking *van* W. van Haarst.

Wanneer

$A + B + C = 180°$, is $Tang\ C = -Tang\ (A + B) \ldots.$
substitueerende deze waarden, verkrijgen wij:

Digitized by Google

$$Tang\,(B+C)+Tang\,(A+C)+Tang\,(A+B)=$$
$$=Tang\,(B+C)\,Tang\,(A+C)\,Tang\,(A+B),$$

derhalve, daar

$$(A+B)+(B+C)+(A+C)=2\,(A+B+C)=360^\circ,$$

gaat deze stelling ook door voor het geval dat

$$A'+B'+C'=360^\circ,$$

zoodat

$$Tang\,A'+Tang\,B'+Tang\,C'=Tang\,A'\times Tang\,B'\times Tang\,C'.$$

IX. Voorstel.

Door D. Bierens de Haan.

Men vraagt de differentiaal-vergelijking

$$ay\frac{d^2y}{dx^2}+b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{y}{\sqrt{(c^2+x^2)}}\frac{dy}{dx}$$

te integreeren.

Opgelost *door* D. Bierens de Haan *en* W. van Haarst.

Oplossing *van* D. Bierens de Haan.

Stel eerst $y=e^u$, waaruit volgt

$$\frac{dy}{dx}=e^u\frac{du}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=e^u\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{d^2u}{dx^2}\right),$$

dan wordt de gegevene vergelijking

$$a\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right)+b\left(\frac{du}{dx}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{c^2+x^2}}\frac{du}{dx},$$

waarin nu de factor van $\frac{d^2u}{dx^2}$ verdwenen is en nergens meer de u zelve voorkomt. Derhalve kan men $\frac{du}{dx}=v$ stellen, waaruit volgt

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{dv}{dx},$$

zoodat men verkrijgt:

$$a\frac{dv}{dx}+(a+b)v^2=\frac{1}{\sqrt{c^2+x^2}}v\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

eene differentiaal-vergelijking der eerste orde.

Om deze te integreeren, neme men eerst $\sqrt{c^2+x^2}=cz+x$ (2) waarin z nu de nieuwe onafhankelijk veranderlijke moet worden: daaruit volgt

$$\frac{dx}{\sqrt{c^2+x^2}}=-\frac{dz}{z},\ \text{en nog}\ \sqrt{c^2+x^2}=\frac{c}{2}\frac{1+z^2}{z},$$

Digitized by Google

zoodat (1) wordt $$-\frac{dv}{dz}+\frac{a+b}{a}v^2.\frac{c}{2}.\left(1+\frac{1}{z^2}\right)=\frac{v}{az}$$

of $$\frac{dv}{dz}+\frac{v}{az}=\frac{a+b}{2a}cv^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ten einde het eerste lid tot een enkelen term te herleiden, stelle men $v^{-a}=zw$, waarin w een nieuwe onafhankelijke veranderlijke is: daaruit volgt wederom

$$-av^{a-1}\frac{dv}{dz}=w+z\frac{dw}{dz}$$

en hiermede wordt (3)

$$\left(w+z\frac{dw}{dz}\right)-w=-\frac{(a+b)c}{2}(wz)^{1-\frac{1}{a}}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)$$

of $$-w^{-1+\frac{1}{a}}dw=\frac{(b+a)c}{2}z^{-\frac{1}{a}}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)dz,$$

zoodat de veranderlijken gescheiden zijn, en nu kan men rechtstreeks integreeren:

$$aC_1-aw^{\frac{1}{a}}=\frac{(a+b)c}{2}\left(\frac{z^{1-\frac{1}{a}}}{1-\frac{1}{a}}+\frac{z^{-1-\frac{1}{a}}}{-1-\frac{1}{a}}\right)$$

$$=\frac{a+b}{a^2-1}.\frac{ac}{2}\left\{(a+1)z^2-(a-1)\right\}z^{-1-\frac{1}{a}}. \quad (4)$$

Nu volgt hieruit

$$z^{\frac{1}{a}}w^{\frac{1}{a}}=v^{-1}=C_1z^{\frac{1}{a}}-\frac{(a+b)}{a^2-1}.\frac{c}{2}\left\{(a+1)z^2-(a-1)\right\}z^{-1}$$

of door invoering der substitutie (2), daar $cz=\sqrt{c^2+x^2}-x$,

dus $$\frac{c}{z}=\sqrt{c^2+x^2}+x \text{ is},$$

$$v^{-1}=C_1\left\{\frac{\sqrt{c^2+x^2}-x}{c}\right\}^{\frac{1}{a}}-\frac{a+b}{a^2-1}(\sqrt{c^2+x^2}-ax)$$

en nu $$ly=u=\int vdx$$

$$=C_2+\int\frac{dx}{C_1\left(\frac{\sqrt{(c^2+x^2)}-x}{c}\right)^{\frac{1}{a}}-\frac{a+b}{a^2-1}(\sqrt{(c^2+x^2)}-ax)}$$

$$=C_2+\frac{a^2-1}{a+b}\int\frac{dx}{C_1\left(\frac{\sqrt{(c^2+x^2)}-x}{c}\right)^{\frac{1}{a}}-\sqrt{c^2+x^2}+ax}; (5)$$

Digitized by Google

als men den factor $\frac{a^2-1}{a+b}$ onder de willekeurige standvastige C_1 opneemt. Deze vergelijking tusschen z en y bevat twee willekeurige standvastigen en is dus de algemeene integraal van de voorgestelde differentiaal-vergelijking.

Zij geldt niet meer 1°. voor $a = 1$; dan wordt de laatste term van (5) $0\int\frac{dx}{0}$; maar dan is ook de integratie in (4) niet meer waar. De vergelijking wordt dan $-dw = \frac{(b+1)c}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}\right)dz$, zoodat de integratie hier geeft

$-w = \frac{(b+1)c}{2}\left(lz - \frac{1}{2z^2}\right)$, derhalve $\frac{1}{v} = \frac{(b+1)c}{2}\left(\frac{1}{2z} - 2lz\right)$, waaruit

$$u = \int v dx$$

$$= \frac{2}{(b+1)c}\int\frac{dx}{\frac{1}{2c}(\sqrt{c^2+x^2}+x) - \frac{1}{c}(\sqrt{c^2+x^2}-x)l(\sqrt{c^2+x^2}-x)}$$

$$= \frac{1}{(b+1)}\int\frac{dx}{\sqrt{c^2+x}+x^2-2(\sqrt{c^2+x^2}-x)l(\sqrt{c^2+x^2}-x)}.$$

Vervolgens geldt de integraal (5) niet meer 2° voor $b = -a$, maar in dit geval wordt reeds $a\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(c^2+x^2)}}v$, in welke vergelijking de veranderlijken gescheiden zijn, en die dadelijk door integratie levert

$l.C_1 + al.v = l.\frac{\sqrt{c^2+x^2}-x}{c}$, dus is $C_1 v^a = \frac{\sqrt{c^2+x^2}-x}{c}$

derhalve

$$l.y = \int v dx = \frac{1}{\sqrt[a]{C_1 c}}\int dx.\sqrt[a]{\sqrt{c^2+x^2}-x}.$$

Ten slotte geldt de integraal (5) evenmin voor 3° $c = 0$, alsdan wordt (1)

$$a\frac{dv}{dx} + (a+b)v^2 = \frac{v}{x}.$$

Stel hierin $v = \frac{1}{z}$, dan wordt $\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{dx}$, derhalve na vermenigvuldiging met z^2:

Digitized by Google

$$-a\frac{dz}{dx}+(a+b)=\frac{1}{x}z$$

eene lineaire differentiaal-vergelijking van de eerste orde, wier integraal is

$$z=e^{-\int\frac{a+b}{a}dx}\left(C_1-\int\frac{1}{ax}e^{\int\frac{a+b}{a}dx}\right)$$

$$=e^{-\frac{a+b}{a}x}\left(C_1-\frac{1}{a}\int e^{-\frac{a+b}{a}x}\frac{dx}{x}\right),$$

zoodat eindelijk

$$ly=\int zdx=\int\frac{dz}{z}=a\int\frac{e^{\frac{a+b}{a}x}dx}{C_1-\int e^{-\frac{a+b}{a}x}\frac{dx}{x}},$$

wanneer men den factor a in de willekeurige standvastige C_1 opneemt.

X. VOORSTEL.

Door D. BIERENS DE HAAN.

Wordt gevraagd de differentiaal-vergelijking

$$2y^3\frac{d^2y}{dx^2}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x^2=0$$

te integreeren.

OPGELOST *door* D. BIERENS DE HAAN *en* W. VAN HAARST.

OPLOSSING *van* D. BIERENS DE HAAN.

Indien men $y=\frac{dz}{dx}$ stelt (1), volgt daaruit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=y\frac{dy}{dz}$$

en door haar te differentiëren, verkrijgt men

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=y^2\frac{d^2y}{dz^2}+y\left(\frac{dy}{dz}\right)^2.$$

Lost men uit deze vergelijkingen $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{d^2y}{dx^2}$ op, zoo komt er

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\frac{dy}{dz}\text{ en }\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{y^2}\left(y\frac{d^2y}{dz^2}-\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right),$$

welke waarden men nu in de voorgestelde vergelijking kan substituëren, zoodat zij wordt

$$2y\frac{d^2y}{dz^2}-\left(\frac{dy}{dz}\right)^2-x^2=0\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

Digitized by Google

Ten einde deze te kunnen integreeren, ga men over tot differentiaal-vergelijkingen van hooger orde; differentieer haar daartoe naar z, zoo wordt

$$2y\frac{d^3y}{dz^3}+2\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2y}{dz^2}-2\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dz}{dz}=2y\frac{d^3y}{dz^3}-2zy=0 \quad (3^a)$$

of

$$\frac{d^3y}{dz^3}-z=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3^b).$$

Differentieer nog eens naar z en dan komt er

$$\frac{d^4y}{dz^4}-\frac{dz}{dz}=\frac{d^4y}{dz^4}-y=0. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Van deze is de algemeene integraal bekend

$$y=C_1e^z+C_2e^{-z}+C_3\,Sin\,z+C_4\,Cos\,z \quad \ldots \quad (5)$$

maar daarin komen twee willekeurige standvastigen te veel voor, om ze als integraal voor onze differentiaal-vergelijking der tweede orde te kunnen gebruiken: deze moeten dus vooreerst bepaald of geëlimineerd worden.

Nu volgt uit (1) en (5)

$$z=\int y\,dz=C+C_1e^z-C_2e^{-z}-C_3\,Cos\,z+C_4\,Sin\,z$$

en

$$\frac{d^3y}{dz^3}=C_1e^z-C_2e^{-z}-C_3\,Cos\,z+C_4\,Sin\,z$$

of daar $\frac{d^3y}{dz^3}=z$ (3^b), zoo volgt dat $C=0$ en wordt derhalve

$$z=C_1e^z-C_2e^{-z}-C_3\,Cos\,z+C_4\,Sin\,z. \quad \ldots \quad (6)$$

Substitueert men nu deze gevonden waarden van z en y in de vergelijking (3^a), zoo heeft men:

$$\begin{aligned}
0 &= 2(C_1e^z+C_2e^{-z}+C_3\,Sin\,z+C_4\,Cos\,z)\times\\
&\quad (C_1e^z+C_2e^{-z}-C_3\,Cos\,z-C_4\,Sin\,z)\\
&\quad -(C_1e^z-C_2e^{-z}+C_3\,Cos\,z-C_4\,Sin\,z)^2\\
&\quad -(C_1e^z-C_2e^{-z}-C_3\,Cos\,z+C_4\,Sin\,z)^2\\
&= 2[(C_1e^z+C_2e^{-z})^2-(C_3\,Sin\,z+C_4\,Cos\,z)^2]\\
&\quad -2[(C_1e^z-C_2e^{-z})^2+(C_3\,Cos\,z-C_4\,Sin\,z)^2]\\
&= 2[4C_1C_2-(C_3^2+C_4^2)(Sin^2z+Cos^2z)]\\
&= 2[4C_1C_2-C_3^2-C_4^2] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)
\end{aligned}$$

als voorwaarde tusschen de vier willekeurige standvastigen. Om aan te toonen, dat deze voor ons doel genoegzaam is, bepale men uit (5) en (6) $z+y$ en $z-y$; dit geeft

$$z+y=2(C_1e^z+C_4\,Sin\,z),\quad z-y=-2(C_2e^{-z}+C_3\,Cos\,z)$$

en hieruit leidt men dadelijk af

Digitized by Google

$$\left(\frac{x+y-2C_1e^z}{C_4}\right)^2+\left(\frac{x-y+2C_2e^{-z}}{C_3}\right)^2=4(Sin^2z+Cos^2z)=4. \quad (8)$$

Verder vindt men nog

$$(y-C_1e^z-C_2e^{-z})^2+(x-C_1e^z+C_2e^{-z})^2$$
$$=(C_3^2+C_4^2)(Sin^2z+Cos^2z)=4C_1C_2$$

als men ten slotte de voorwaarde (7) gebruikt: deze geeft na achtereenvolgende herleiding

$$8C_1C_2=2\,[y^2-2y(C_1e^z+C_2e^{-z})+(C_1^2e^{2z}+C_2^2e-^{2z})$$
$$+2C_1C_1+x^2-2x(C_1e^z-C_2e^{-z})+(C_1^2e^{2z}+C_2^2e^{-2z})-2C_1C_2]$$
$$=2(x^2+y^2)-4(x+y)C_1e^z+4(x-y)C_2e^{-z}+4(C_1^2e^{2z}+C_2^2e^{-2z})$$
$$=(x+y-2C_1e^z)^2+(x-y+2C_2e^{-z})^2=2(C_3^2+C_4^2) \quad (9)$$

als men wederom naar (7) $4C_1C_2$ door $(C_3^2+C_4^2)$ vervangt. En nu geven (8) en (9)

$$x+y-2C_1e^z=C_3\sqrt{2}, \quad x-y+2C_2e^{-z}=C_4\sqrt{2},$$

waaruit verder volgt

$$(x+y-C_3\sqrt{2})(x-y-C_4\sqrt{2})=-4C_1C_2=-(C_3^2+C_4^2),$$

als men nog eens de voorwaarde der vergelijking invoert.

Door uitwerking verkrijgt deze den vorm

$$x^2-y^2-(x+y)C_4\sqrt{2}-(x-y)C_3\sqrt{2}+(C_3^2+C_4^2)^2=0$$

eene vergelijking tusschen x en y met twee willekeurige standvastigen: deze is dan de algemeene integraal van de voorgestelde differentiaal-vergelijking.

XI. Voorstel.

Door J. Versluijs.

Bepaal den graad van het oppervlak, dat beschreven wordt door eene regte lijn, die glijdt langs drie kromme lijnen, wier graad respectievelijk p, q en r is.

Opgelost *door* J. Versluijs *en* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* J. Versluijs.

De graad van het oppervlak wordt uitgedrukt door het aantal snijpunten van 't oppervlak met een willekeurige rechte lijn, dus ook door het aantal der beschrijvende lijnen, die een willekeurige rechte ontmoeten. Dit aantal is blijkbaar gelijk aan 't aantal snijpunten van de kromme van den graad p met het rechtlijnige oppervlak, dat tot richtlijnen heeft de willekeurige rechte en de krommen van den graad q en r; dat is dus p maal den graad van het laatste oppervlak. Om dezen graad te bepalen, merken wij weer op, dat hij gelijk is aan 't aantal snijpunten van de kromme van den

Digitized by Google

graad q met het rechtlijnige oppervlak, dat tot richtlijnen heeft de kromme van den graad r en twee willekeurige rechte lijnen; dat is dus q maal den graad van het laatstgenoemde oppervlak.

Op dezelfde wijze is de graad van het oppervlak, dat tot richtlijnen heeft de kromme van den graad r en twee willekeurige rechte lijnen, gelijk aan het aantal snijpunten van die kromme van den r^{en} graad, met het oppervlak, dat drie rechte lijnen tot richtlijnen heeft. Dit oppervlak is van den 2en graad, en heeft dus $2r$ snijpunten met de kromme van den r^{en} graad. De graad van het oorspronkelijke oppervlak is dus

$$2r \times q \times p = 2pqr.$$

XII. VOORSTEL.

Door L. HOEFNAGEL.

Vier geheele getallen te vinden, die eene gewone evenredigheid uitmaken, zoodanig dat de som van de vierkanten der termen 35 minder is dan zes maal het product der uiterste of middelste termen, en dat het gedurig product der termen 46656 bedraagt.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST, C. J. BOLTEN, W. H. WISSELINK, L. HOEFNAGEL *en* A. BENTHEM GZ.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Stellen wij de evenredigheid

$$x : y = z : v,$$

dan is $vx = yz$

en dus $xyzv = v^2z^2 = y^2z^2 = 46656,$

waaruit $vx = yz = 216$

en volgens de opgave

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + 35 = 6yz = 1296,$$

derhalve $x^2 + v^2 + y^2 + z^2 = 1261.$

Trekken wij hiervan $2vx + 2yz = 864$

af, dan wordt $(x - v)^2 + (y - z)^2 = 397.$

Indien wij nu aannemen dat $x - v$ grooter is dan $y - z$, dan moet $x - v > 14$ en < 20 zijn. Dewijl voorts de som van twee kwadraten op 7 moet uitgaan en een kwadraat niet anders dan 0, 1, 4, 5, 6 of 9 tot laatste cijfer kan hebben, zoo volgt daaruit, dat bij het eene kwadraat 1 en bij het andere 6 op de plaats der eenheden moet staan. Maar daarvoor kan de wortel alleen op 1, 9, 4 of 6 eindigen en aangezien $x - v$ tusschen 14 en

Digitized by Google

20 ligt, zoo moet deze wortel 16 of 19 zijn. Daar echter de rest mede een kwadraat moet wezen, zoo blijkt het dat $x - v = 19$
en bij gevolg $y - z = 6$
is. Nu is dan

$$(x - v)^2 + 4vx = (x + v)^2 = 1225 \text{ of } x + v = 35,$$

waardoor $x = 27$ en $v = 8$
wordt en

$$(y - z)^2 + 4yz = (y + z)^2 = 900 \text{ of } y + z = 30,$$

zoodat $y = 18$ en $z = 12$
is. De gevraagde evenredigheid is alzoo

$$27 : 18 = 12 : 8.$$

XIII. Voorstel,

Door wijlen J. van der Hoeven.

Van het uiteinde B *eener lijn* AB *begint een punt met eenparige snelheid naar* A *te bewegen, op denzelfden oogenblik dat die lijn met eene eenparige versnelde beweging om het punt* A *gaat draaijen. Indien nu het bewegende punt in* A *gekomen is, juist als de lijn eene geheele omwenteling volbragt heeft, zoo vraagt men, welke de rigting en resulteerende snelheid zijn zal in een willekeurig punt* P *van den weg, en in hoeveel tijd het bewegende punt in* P *komt, alsmede in* A.

Opgelost *door wijlen* J. van der Hoeven, A. Benthem Gz. *en* W. van Haarst.

Oplossing *van wijlen* J. van der Hoeven.

Onderstellen wij, (zie Fig. 5) dat B in C gekomen is en dat alzoo P de plaats is waar het bewegend punt zich bevindt, stellen wij dan $\angle BAP = \phi$, $AP = z$; indien dan $BC = \frac{2\pi r}{n}$ en t de tijd is waarin met de versnelling c de geheele omtrek wordt afgelegd, zoo volgt $\frac{1}{2}ct^2 = 2\pi r$ en $t = \sqrt{\frac{4\pi r}{c}}$, evenzoo hebben wij, indien c_1 de snelheid is die het punt op den straal $AB = r$ heeft, $c_1 t = r$ of $t = \frac{r}{c_1} = \sqrt{\frac{4\pi r}{c}}$, waaruit $c = \frac{4\pi c_1^2}{r}$ voor de versnelling.

Is nu in den tijd t' het punt in C, zoo hebben wij $BC =$

Digitized by Google

$\frac{2\pi r}{n} = \frac{1}{2} c t_1^2$ of $\frac{2\pi r}{n} = \frac{2\pi c_1^2}{r} t_1^2$, dat is $\frac{r}{n} = \frac{c_1^2}{r} t_1^2$, maar dan is $CP = r - z = c_1 t_1$, zoodat $t_1^2 = \frac{r^2}{n c_1^2} = \frac{(r-z)^2}{c_1^2}$ en gevolgelijk $n = \frac{r^2}{(r-z)^2}$ is. Nog is $BC = \frac{2\pi r}{n} = \frac{\pi r \Phi}{180}$ of $\frac{2\pi r}{n} = \Phi$ en $n = \frac{2\pi r}{\Phi}$, zoodat $\frac{2\pi r}{\Phi} = \frac{r^2}{(r-z)^2}$ of $\frac{2\pi}{\Phi} = \frac{r}{(r-z)^2}$, dus $(r-z)^2 = \frac{\Phi r}{2\pi}$ de vergelijking is van den afgelegden weg.

Nu zijn in P twee snelheden werkzaam, de eerste loodregt op AC is $c t_1 = \frac{4\pi c_1^2}{r} . \frac{r-z}{c_1} = \frac{4\pi c_1 (r-z)}{r}$, de andere volgens PA gerigt en gelijk aan c_1, mitsdien is de resulteerende snelheid $\sqrt{\left\{c_1^2 + \frac{16\pi^2 c_1^2 (r-z)^2}{r^2}\right\}} = c_1 \sqrt{\left\{1 + \frac{16\pi^2 (r-z)^2}{r^2}\right\}}$ of $c_1 \sqrt{\left(1 + \frac{8\pi\Phi}{r}\right)}$ en de hoek α, dien zij met den voerstraal van het punt P maakt, is $Sin\, \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{8\pi\Phi}{r}\right)}}$. Men heeft reeds $t = \frac{r}{c_1}$ hierboven, en men vindt ook $t_1 = \frac{4\pi c_1 (r-z)}{cr} = \frac{r-z}{c_1}$ voor den tijd, waarin het punt in P komt.

XIV. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Uit het middelpunt O *van een cirkel met den straal* r *beschreven, zijn twee even lange lijnen* $OA = OB = a$ *getrokken onder een hoek* 2α. *Vrage door constructie aan den omtrek eens cirkels een punt* P *zoodanig te bepalen, dat* $\angle$ APO *en* $\angle$ BPO *elkanders supplementen zijn.*

Opgelost *door* C. J. Matthes, A. Benthem Gz, W. van Haarst, H. van Blanken *en* A. Eecen.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Vereenig, (zie fig. 6), de doorsnijdingspunten D en E door eene regte lijn, en trek uit het snijpunt C of C′ dezer lijn met een cirkelboog, uit O met den straal a beschreven, naar

Digitized by Google

O de lijn CO of C'O, zoo is P of P' het begeerde punt. Immers men heeft:

$$\triangle DOC \cong \triangle POA, \text{ dus } \angle OCD = \angle OAP;$$

insgelijks $\triangle EOC \cong \triangle POB$, dus $\angle OCE = \angle OBP$;

bijgevolg $\angle OAP = \angle OBP$, waaruit wederom volgt, dat om den vierhoek ABPO een cirkel kan worden beschreven, zoodat ook $\angle APO = \angle ABO = 90^\circ - \alpha$

$$= \angle BAO = 180^\circ - \angle BPO,$$

en $\angle BPO = 90^\circ + \alpha$ is. $\angle APO + \angle BPO = 180^\circ$.

XV. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES. *)

Als θ den hoek beteekent, welken de twee regte lijnen (l, m, n), (λ, μ, ν), in trilineaire coördinaat-vergelijking gegeven met elkander maken, wordt gevraagd naar het bewijs van

$$Cot\,\theta = \frac{l\lambda + m\mu + n\nu - (m\nu + n\mu)Cos A - (n\lambda + l\nu)Cos B - (l\mu + m\lambda)Cos C}{(m\nu - n\mu)\,Sin\,A + (n\lambda - l\nu)\,Sin\,B + (l\mu - m\lambda)\,Sin\,C}.$$

OPGELOST *door* C. J. MATTHES, H. VAN BLANKEN, A. BENTHEM Gz., W. VAN HAARST, W. H. WISSELINK *en* A. EECEN.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Men stelle $ma - lb = p$, $lc - na = q$, $\mu a - \lambda b = p'$ en $\lambda c - \nu a = q'$. Verder de hoeken, welke de gegeven lijnen maken met de lijn, die den hoek A middendoordeelt, $= \phi$ en ϕ', dan heeft men (zie FERRERS, § 17):

$tang\,\phi = \frac{p-q}{p+q}\,tang\,\frac{1}{2}A$ en $tang\,\phi' = \frac{p'-q'}{p'+q'}\,tang\,\frac{1}{2}A$. Hieruit volgt, omdat $\phi' - \phi = \theta$ is,

$$Cot\,\theta = \frac{1 + \frac{(p-q)(p'-q')}{(p+q)(p'+q')}\,tang^2\,\frac{1}{2}A}{\left(\frac{p'-q'}{p'+q'} - \frac{p-q}{p+q}\right)tang\,\frac{1}{2}A}$$

$$= \frac{(pp' + qq' + pq' + p'q)Cos^2\frac{1}{2}A + (pp' + qq' - pq' - p'q)Sin^2\frac{1}{2}A}{2\,(p'q - pq')\,Sin\,\frac{1}{2}A\,Cos\,\frac{1}{2}A}.$$

$$Cot\,\theta = \frac{pp' + qq' + (pq' + p'q)\,Cos\,A}{(p'q - pq')\,Sin\,A}.$$

---

*) Dit en de vijf volgende Voorstellen zijn ontleend aan FERRER's *Nieuwere Meetkunde*, Hoofdstuk I, Voorbeelden 3, 4, 5, 6 en Hoofdstuk II, Voorbeelden 11 en 12.

Digitized by Google

Het tweede lid van deze vergelijking wordt, als men voor p, q, p' en q' hare waarden invoert,

$$\frac{(m\mu+n\nu)a^2-(m\lambda+\mu l)ab-(n\lambda+\nu l)ac+l\lambda(b^2+c^2)+((m\lambda+\mu l)ac+(n\lambda+\nu l)ab-(m\nu+\mu n)a^2-2l\lambda bc)\,Cos\,A}{((m\nu-\mu n)a^2+(n\lambda-\nu l)ab+(l\mu-\lambda m)ac)\;Sin\,A}.$$

Of, omdat $b^2+c^2-2bc\;Cos\,A=a^2$, $ab-ac\;Cos\,A=a^2\;Cos\,C$ en $ac-ab\;Cos\,A=a^2\;Cos\,B$ is,

$$Cot\,\theta=\frac{(m\mu+n\nu+l\lambda)\,a^2-(m\nu+\mu n)\,a^2\;Cos\,A-(n\lambda+\nu l)\,a^2\;Cos\,B-(m\lambda+\mu l)\,a^2\;Cos\,C}{(m\nu-\mu n)\,a^2\;Sin\,A+(n\lambda-\nu l)\,ab\;Sin\,A+(l\mu-\lambda m)\,ac\;Sin\,A}.$$

Deelt men teller en noemer door a^2, dan verkrijgt men, omdat $b\;Sin\,A=a\;Sin\,B$ en $c\;Sin\,A=a\;Sin\,C$ is,

$$Cot\,\theta=\frac{m\mu+n\nu+l\lambda-(m\nu+\mu n)\;Cos\,A-(n\lambda+\nu l)\;Cos\,B-(m\lambda+\mu l)\;Cos\,C}{(m\nu-\mu n)\;Sin\,A+(n\lambda-\nu l)\;Sin\,B+(l\mu-\lambda m)\;Sin\,C}.$$

XVI. Voorstel.

Door J. A. Sandberg.

Op de zijden van den driehoek ABC, *als bases, zijn drie onderling gelijkvormige driehoeken beschreven* A'BC, AB'C, ABC', *in dier voege, dat hoek* BA'C = B'AC = BAC', *hoek* CB'A = C'BA = CBA', *hoek* AC'B = A'CB = ACB' *is. Te bewijzen, dat de regte lijnen* AA', BB', CC' *door één zelfde punt gaan.*

Opgelost *door* C. J. Matthes, H. van Blanken, A. Benthem Gz, W. H. Wisselink, A. Eecen, W. van Haarst *en* J. A. Sandberg.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Verlengt men de zijden AB en AC, zoo heeft men blijkbaar, (zie fig. 7,)

$$\angle A'CU=180^\circ-(C+C'),\ \angle A'BV=180^\circ-(B+B').$$

Voor de verhouding der trilineaire coördinaten β en γ van het punt A' verkrijgt men derhalve

Digitized by Google

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{A'C}{A'B}\times\frac{Sin\,(C+C')}{Sin\,(B+B')}=\frac{Sin\,B'}{Sin\,C'}\times\frac{Sin\,(C+C')}{Sin\,(B+B')}$$
$$=\frac{Sin\,C\,Cot\,C'+Cos\,C}{Sin\,B\,Cot\,B'+Cos\,B}.$$

Bijgevolg is de vergelijking der lijn AA′:

$(Sin\,B.\,Cot\,B'+Cos\,B)\beta-(Sin\,C.\,Cot\,C'+Cos\,C)\gamma=0.$

Evenzoo die van BB′:

$(Sin\,C.\,Cot\,C'+Cos\,C)\gamma-(Sin\,A.\,Cot\,A'+Cos\,A)\alpha=0$

en van CC′:

$(Sin\,A.\,Cot\,A'+Cos\,A)\alpha-(Sin\,B.\,Cot\,B'+Cos\,B)\beta=0.$

Dat elke dezer drie vergelijkingen in de beide overige opgesloten ligt, is een bewijs dat de regte lijnen één punt gemeen hebben, namelijk

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)::\left(\frac{Sin\,A'}{Sin\,(A+A')},\ \frac{Sin\,B'}{Sin\,(B+B')},\ \frac{Sin\,C'}{Sin\,(C+C')}\right).$$

XVII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Te bewijzen, dat de regte lijn, die het middelpunt van den cirkel, ingeschreven in den driehoek ABC, *met het middelpunt van de zijde* BC *verbindt, evenwijdig loopt met de regte lijn welke het punt* A *verbindt met het aanrakingspunt van den aangeschreven cirkel, die de zijde* BC *uitwendig aanraakt.*

Opgelost *door* C. J. Matthes, H. van Blanken, W. H. Wisselink, A. Benthem Gz., J. A. Sandberg, W. van Haarst *en* A. Eecen.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Voor het middelpunt van den ingeschreven cirkel heeft men $\alpha=\beta=\gamma$, en voor het middelpunt der zijde BC $\alpha=0$ en $b\beta=c\gamma$. Hieruit volgt voor de lijn, welke deze punten verbindt, $(b-c)\alpha-b\beta+c\gamma=0$. . . . . (1)

Laat de aangeschreven cirkel de zijde BC in D aanraken, dan is $CD=\frac{a-b+c}{2}$ en $BD=\frac{a+b-c}{2}$.

Hieruit volgt dat de coördinaten van het punt D zijn $\alpha=0$, $\beta=\frac{a-b+c}{ab}I$, $\gamma=\frac{a+b-c}{ac}I$, en bijgevolg de vergelijking der lijn AD $\frac{a+b-c}{c}\beta=\frac{a-b+c}{b}\gamma$ . . (2)

Digitized by Google

Wanneer twee lijnen (l, m, n) en (l', m', n') evenwijdig zullen zijn, dan moet men hebben

$$(mn' - m'n)\,a + (nl' - n'l)\,b + (lm' - l'm)\,c = 0.$$

Neemt men nu $l = b - c$, $m = -b$, $n = c$, $l' = 0$, $m' = \frac{a + b - c}{c}$ en $n' = -\frac{a - b + c}{b}$, dan blijkt dat de coëfficiënten der vergelijkingen (1) en (2) aan de voorwaardes-vergelijking voldoen, en bijgevolg de lijnen evenwijdig zijn.

XVIII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Op de zijden BC, CA, AB *van een driehoek* ABC *zijn respectivelijk paren punten genomen*, B_1, C_1; C_2, A_2; A_3, B_3, *in dier voege dat de doorsnijdingspunten van* BC *met* B_3C_2, *van* CA *met* C_1A_3 *en van* AB *met* A_2B_1 *in ééne regte lijn liggen*; BC_2, CB_3 *snijden elkander in* L; CA_3, AC_1 *in* M, AB_1, BA_2 *in* N. *Te bewijzen, dat* AL, BM, CN *door één zelfde punt* P *gaan.* (Zie fig. 8.)

Opgelost *door* C. J. Matthes, A. Benthem Gz., H. van Blanken, W. van Haarst, W. H. Wisselink *en* A. Eecen.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Laat de trilineaire coördinaten zijn van B_1, $(0, g_1, h_1)$; van C_1, $(0, g'_1, h'_1)$; van C_2, $(f_2, 0, h_2)$; van A_2 $(f'_2, 0, h'_2)$; van A_3, $(f_3, g_3, 0)$; van B_3, $(f'_3, g'_3, 0)$: zoo vindt men voor de vergelijkingen

van B_3C_2 $\quad \beta h_2 f'_3 + (\gamma f_2 - \alpha h_2)\,g'_3 = 0$;

van C_1A_3 $\quad \gamma f_3 g'_1 + (\alpha g_3 - \beta f_3)\,h'_1 = 0$;

van A_2B_1 $\quad \alpha g_1 h'_2 + (\beta h_1 - \gamma g_1)\,f'_2 = 0$.

Wijders verkrijgt men voor de doorsnijdingspunten

van BC met B_3C_2 $\quad \alpha_1 = 0,\ \frac{\beta_1}{f_2 g'_3} = -\frac{\gamma_1}{h_2 f'_3}$,

„ CA met C_1A_3 $\quad \beta_2 = 0,\ \frac{\gamma_2}{g_3 h'_1} = -\frac{\alpha_2}{f_3 g'_1}$

„ AB met A_2B_1 $\quad \gamma_3 = 0,\ \frac{\alpha_3}{h_1 f'_2} = -\frac{\beta_3}{g_1 h'_2}$.

Zijn nu deze drie punten op ééne regte lijn gelegen, zoo moet er voldaan zijn aan de voorwaarde

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 = 0,$$

dat is in dit geval

$$\alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 = 0 \text{ of } -f_3 f'_3 g_1 g'_1 h_2 h'_2 + f_2 f'_2 g_3 g'_3 h_1 h'_1 = 0.$$

Digitized by Google

Maar men heeft tot vergelijkingen

van BC_2 en B_3C $\gamma f_2 - \alpha h_2 = 0$ en $\alpha g'_3 - \beta f'_3 = 0$;
„ CA_3 „ C_1A $\alpha g_3 - \beta f_3 = 0$ „ $\beta h'_1 - \gamma g'_1 = 0$;
„ AB_1 „ A_2B $\beta h_1 - \gamma g_1 = 0$ „ $\gamma f'_2 - \alpha h'_2 = 0$:

bijgevolg voor de doorsnijdingspunten

$$L \quad \frac{\alpha}{f_2 f'_3} = \frac{\beta}{f_2 g'_3} = \frac{\gamma}{h_2 f'_3};$$

$$M \quad \frac{\beta}{g_3 g'_1} = \frac{\gamma}{g_3 h'_1} = \frac{\alpha}{f_3 g'_1};$$

$$N \quad \frac{\gamma}{h_1 h'_2} = \frac{\alpha}{h_1 f'_2} = \frac{\beta}{g_1 h'_2},$$

en voor de lijnen AL, BM, CN respectievelijk:

$\beta h_2 f'_3 - \gamma f_2 g'_3 = 0$; $\gamma f_3 g'_1 - \alpha g_3 h'_1 = 0$; $\alpha g_1 h'_2 - \beta h_1 f'_2 = 0$.

De vraag is nu nog maar, of

$l_1 m_2 n_3 - l_1 m_3 n_2 + l_2 m_3 n_1 - l_2 m_1 n_3 + l_3 m_1 n_2 - l_3 m_2 n_1 = 0$ is, of in dit geval $l_2 m_3 n_1 + l_3 m_1 n_2$, doch hiervoor vindt men na substitutie: $- f_2 f'_2 g_2 g'_3 h_1 h'_1 + f_3 f'_3 g_1 g'_1 h_2 h'_2$, hetgeen volgens de onderstelling $= 0$ is.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Laten de doorsnijdingspunten gelegen zijn in de lijn (l, m, n), dan is de vergelijking der lijn B_3C_2 $l'\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, die der lijn C_1A_3 $l\alpha + m'\beta + n\gamma = 0$ en die der lijn A_2B_1 $l\alpha + m\beta + n'\gamma = 0$.

Hieruit volgt dat de vergelijking der lijn BC_2 is $l'\alpha + n\gamma = 0$ en die der lijn CB_3 $l'\alpha + m\beta = 0$.

Voor het doorsnijdingspunt L heeft men dus $l'\alpha = - m\beta = - n\gamma$.

Verder heeft men de vergelijking der lijn CA_3 $l\alpha + m'\beta = 0$ en de vergelijking der lijn AC_1 $m'\beta + n\gamma = 0$.

Voor het doorsnijdingspunt M heeft men dus $l\alpha = - m'\beta = n\gamma$.

Voorts is de vergelijking der lijn AB_1 $m\beta + n'\gamma = 0$ en die der lijn BA_2 $l\alpha + n'\gamma = 0$.

Hieruit volgt voor het doorsnijdingspunt N $l\alpha = m\beta = - n'\gamma$.

De vergelijking der lijn AL is bijgevolg $m\beta = n\gamma$, die der lijn BM $l\alpha = n\gamma$ en die der lijn CN $l\alpha = m\beta$.

Deze drie lijnen gaan dus door het punt $l\alpha = m\beta = n\gamma$,

Digitized by Google

dat met de lijn (l, m, n) ten opzigte van den assendriehoek harmonisch is gelegen.

XIX. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Als de normalen eener kegelsnede, waarvan de trilineaire vergelijking $\lambda\beta\gamma + \mu\gamma\alpha + \nu\alpha\beta = 0$ *is, in de hoekpunten van den assendriehoek door één zelfde punt gaan, is de vraag om te bewijzen: dat de meetkundige plaats van het middelpunt der kegelsnede bestaat uit de kromme, die tot vergelijking heeft*

$$\frac{\alpha}{a}(\beta^2 - \gamma^2) + \frac{\beta}{b}(\gamma^2 - \alpha^2) + \frac{\gamma}{c}(\alpha^2 - \beta^2) = 0,$$

alsmede uit de drie regte lijnen, die de middelpunten der zijden van den assendriehoek onderling verbinden.

Opgelost *door* C. J. Matthes, A. Benthem Gz., M. van Blanken *en* W. van Haarst.

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

De vergelijking $\frac{1}{a}(\nu\beta + \mu\gamma) = \frac{1}{b}(\lambda\gamma + \nu\alpha)$ stelt eene lijn voor die gaat door het snijpunt van de raaklijnen aan de hoekpunten A en B en door het midden van AB, derhalve eene middellijn. Het middelpunt der kegelsnede zal bijgevolg bepaald zijn door de vergelijkingen:

$$\frac{1}{a}(\nu\beta + \mu\gamma) = \frac{1}{b}(\lambda\gamma + \nu\alpha) = \frac{1}{c}(\mu\alpha + \lambda\beta).$$

Stellen wij nu $\nu\beta + \mu\gamma = pa$, dan is $\lambda\gamma + \nu\alpha = pb$ en $\mu\alpha + \lambda\beta = pc$, waaruit na oplossing volgt:

$$\lambda = \frac{p}{2\beta\gamma}(-a\alpha + b\beta + c\gamma), \quad \mu = \frac{p}{2\alpha\gamma}(a\alpha - b\beta + c\gamma)$$

en $\nu = \frac{p}{2\alpha\beta}(a\alpha + b\beta - c\gamma)$. Stellen wij kortheidshalve

$-a\alpha + b\beta + c\gamma = A$, $a\alpha - b\beta + c\gamma = B$, $a\alpha + b\beta - c\gamma = C$,

dan is dus: $\lambda = \frac{pA}{2\beta\gamma}$, $\mu = \frac{pB}{2\alpha\gamma}$ en $\nu = \frac{pC}{2\alpha\beta}$.

Volgens N°. CCXLV van het vorige Deel moet tusschen λ, μ en ν de betrekking:

$$\frac{\lambda}{a}(\mu^2 - \nu^2) + \frac{\mu}{b}(\nu^2 - \lambda^2) + \frac{\nu}{c}(\lambda^2 - \mu^2) = 0$$

Digitized by Google

bestaan; de substitutie der gevonden waarden hierin geeft na deeling door $\frac{p^3}{8\alpha^3\beta^3\gamma^3}$:

$$\frac{\alpha}{a}A(B^2\beta^2-C^2\gamma^2)+\frac{\beta}{b}B(C^2\gamma^2-A^2\alpha^2)+\frac{\gamma}{c}C(A^2\alpha^2-B^2\beta^2)=0 \quad (1)$$

Nu is: $B^2\beta^2-C^2\gamma^2=-BC(\beta^2-\gamma^2)+2a\alpha B\beta^2-2a\alpha C\gamma^2$.

Evenzoo $C^2\gamma^2-A^2\alpha^2=-CA(\gamma^2-\alpha^2)+2b\beta C\gamma^2-2b\beta A\alpha^2$

en $A^2\alpha^2-B^2\beta^2=-AB(\alpha^2-\beta^2)+2c\gamma A\alpha^2-2c\gamma B\beta^2$.

De substitutie dezer waarden in (1) geeft:

$$-\frac{\alpha}{a}ABC(\beta^2-\gamma^2)+2\alpha^2AB\beta^2-2\alpha^2AC\gamma^2-\frac{\beta}{b}BCA(\gamma^2-\alpha^2)$$

$$+2\beta^2BC\gamma^2-2\beta^2BA\alpha^2-\frac{\gamma}{c}CAB(\alpha^2-\beta^2)+2\gamma^2CA\alpha^2-2\gamma^2CB\beta^2=0.$$

Voor deze kan men klaarblijkelijk schrijven:

$$\left[\frac{\alpha}{a}(\beta^2-\gamma^2)+\frac{\beta}{b}(\gamma^2-\alpha^2)+\frac{\gamma}{c}(\alpha^2-\beta^2)\right]ABC=0.$$

Hieraan wordt voldaan door

$$\frac{\alpha}{a}(\beta^2-\gamma^2)+\frac{\beta}{b}(\gamma^2-\alpha^2)+\frac{\gamma}{c}(\alpha^2-\beta^2)=0,$$

$$A=0,\quad B=0 \quad \text{en} \quad C=0,$$

zijnde de drie laatste vergelijkingen de vergel. van de lijnen, die de middelpunten der zijden van den assen-driehoek verbinden. (Vraagstuk CCXLII, vorig Deel).

XX. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Drie kegelsneden, die respectivelijk elk paar van de zijden eens driehoeks aanraken in de hoekpunten, welke die zijden met de derde zijde gemeen hebben, gaan allen door één zelfde punt. Te bewijzen: dat de drie raaklijnen in dat gemeenschappelijk punt de zijden van den driehoek, die koorden zijn der respective kegelsneden, ontmoeten in punten op ééne regte lijn gelegen, op welke punten ook de andere raaklijnen aanloopen, die, behalve de zijden des driehoeks, elk paar kegelsneden gezamenlijk aanraken.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES, H. VAN BLANKEN, A. BENTHEM GZ. *en* W. VAN HAARST.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Neemt men gezegden driehoek tot assen-driehoek aan, dan

Digitized by Google

zijn de trilineaire vergelijkingen der drie kegelsneden, (zie FERRERS, bl. 43, § 49,)

$$k_1^2\alpha_1^2 = \beta_1\gamma_1; \quad k_2^2\beta_2^2 = \gamma_2\alpha_2; \quad k_3^2\gamma_3^2 = \alpha_3\beta_3.$$

Dat zij door een zelfde punt gaan, geeft de voorwaardes-vergelijking $k_1^2k_2^2k_3^2 = 1$
en voor de coördinaten van dat punt vindt men

$$k_1^{\frac{2}{3}}\alpha = k_2^{\frac{2}{3}}\beta = k_3^{\frac{2}{3}}\gamma,$$

zoodat, als de constanten voor de vergelijking der raaklijn in dat punt, aan de kegelsnede tegenover A, zijn l, m, n,
men heeft $$-\frac{l}{k_1^{\frac{2}{3}}} = \frac{2m}{k_2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2n}{k_3^{\frac{2}{3}}},$$
bijgevolg voor de vergelijking zelve dier raaklijn:

$$-2k_1^{\frac{2}{3}}\alpha_1 + k_2^{\frac{2}{3}}\beta_1 + k_3^{\frac{2}{3}}\gamma_1 = 0;$$

evenzoo voor de tweede

$$k_1^{\frac{2}{3}}\alpha_2 - 2k_2^{\frac{2}{3}}\beta_2 + k_3^{\frac{2}{3}}\gamma_2 = 0,$$

en voor de derde $k_1^{\frac{2}{3}}\alpha_3 + k_2^{\frac{2}{3}}\beta_3 - 2k_3^{\frac{2}{3}}\gamma_3 = 0.$

Men vindt dus voor de eerstbedoelde doorsnijdings-punten:

$$\alpha_1 = 0, \; k_2^{\frac{2}{3}}\beta_1 + k_3^{\frac{2}{3}}\gamma_1 = 0; \; \beta_2 = 0, \; k_3^{\frac{2}{3}}\gamma_2 + k_1^{\frac{2}{3}}\alpha_2 = 0;$$
$$\gamma_3 = 0, \; k_1^{\frac{2}{3}}\alpha_3 + k_2^{\frac{2}{3}}\beta_3 = 0,$$

die derhalve op éene regte lijn gelegen zullen zijn, daar zij voldoen aan de bekende voorwaardes-vergelijking, vermits blijkbaar $\frac{\alpha_3\beta_1\gamma_2}{\beta_3\gamma_1\alpha_2} = -1$ is.

Wat de tweede bewering aangaat, komt het aan op het vinden der vergelijking van de regte lijn (l, m, n) die bijv. de kegelsneden tegenover B en C aanraakt. Deze moet voldoen aan de voorwaarden

$$m^2 = 4k_2^2nl \text{ en } n^2 = 4k_3^2lm,$$

waaruit $\frac{m^3}{n^3} = \frac{k_2^3}{k_3^2}$ en vervolgens $\frac{l}{k_1^{\frac{2}{3}}} = \frac{m}{4k_2^{\frac{2}{3}}} = \frac{n}{4k_3^{\frac{2}{3}}}$;
zoodat hare vergelijking wordt

$$k_1^{\frac{2}{3}}.x_1 + 4k_2^{\frac{2}{3}}\beta_1 + 4k_3^{\frac{2}{3}}\gamma_1 = 0,$$

welke, gecombineerd met $\alpha_1 = 0$, voor het doorsnijdingspunt met BC vervangen kan worden door

$$k_2^{\frac{2}{3}}\beta_1 + k_3^{\frac{2}{3}}\gamma_1 = 0,$$

en mitsdien hetzelfde doorsnijdingspunt van straks geeft. Evenzoo voor de beide andere raaklijnen, wier vergelijkingen zijn: $4k_1^{\frac{2}{3}}\alpha_2 + k_2^{\frac{2}{3}}\beta_2 + 4k_3^{\frac{2}{3}}\gamma_2 = 0$ en $4k_1^{\frac{2}{3}}\alpha_3 + 4k_2^{\frac{2}{3}}\beta_3 + k_3^{\frac{2}{3}}\gamma_3 = 0.$

Digitized by Google

XXI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Als men in een' driehoek de loodlijnen uit de hoekpunten op de overstaande zijden neêrlaat en de stralen van de raakpunten des ingeschreven cirkels verlengt, dan ontstaan door de onderlinge doorsnijding dezer lijnen drie parallelogrammen, welke dezelfde diagonaal hebben. Stelt men nu hunne inhouden door I_1, I_2 *en* I_3 *voor, dan is:*

$$I_1 I_2 I_3 = (I_1 + I_2)(I_1 - I_3)(I_2 - I_3).$$

Men vraagt zulks te bewijzen.

Opgelost *door* W. van Haarst, A. Benthem Gz. *en* S. de Jong Jz.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Zij, zie fig. 9, in den $\triangle ABC$, I het middelpunt van den ingeschreven cirkel, H het snijdingspunt der drie loodlijnen uit de hoekpunten op de overstaande zijden nedergelaten, $AD = h$, $BE = h_1$, $CF = h_2$: de ingeschreven cirkel raakt de zijden a, b, c van den driehoek aan in de punten B_1, C_1, A_1 en de stralen B_1I, C_1I, A_1I verlengd zijnde, snijden de zijde AC in G_1, BC in G en G_2, en de loodlijnen in de punten K, L, M, N, O, P. De parallelogrammen IKHL, INHP en IOHM zijn dan de bedoelde parallelogrammen, wier inhouden wij door I, I_1 en I_2 voorstellen en in functiën van de zijden des driehoeks zullen uitdrukken.

Uit $\triangle B_1BL \backsim \triangle CBE$ volgt $BE:CE = B_1B:B_1L$, d.i. $h_1 : \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$ $= \frac{a-b+c}{2} : B_1L$ en dus $B_1L = \frac{(a-b+c)(a^2+b^2-c^2)}{4bh_1}$ en $IL =$ $B_1L - r = \frac{(a-b+c)(a^2+b^2-c^2) - 4brh_1}{4bh_1}$ of daar

$$r = \frac{bh_1}{a+b+c}; \quad IL = \frac{(a+b+c)(a-b+c)(a^2+b^2-c^2) - 4b^2h_1^2}{4(a+b+c)bh_1}$$

$$= \frac{(a-b+c)\{a^2+b^2-c^2-(a+b-c)(b+c-a)\}}{4bh_1}$$

$$= \frac{a(a-c)(a-b+c)}{2bh_1}.$$

Digitized by Google

Voorts is

$$B_1D = CD - CB_1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a}$$

en alzoo vinden wij

$$I = B_1D \times IL = \frac{(a-c)(b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{4bh_1}$$

$$= \tfrac{1}{2}(a-c)(b-c)\sqrt{\frac{(a-b+c)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+b-c)}}.$$

Nu volgt uit $\triangle BAE \backsim \triangle CC_1N$

$$AE : BE = C_1N : CC_1 \text{ of } \frac{b^2+c^2-a^2}{2b} : h_1 = C_1N : \frac{a+b-c}{2},$$

derhalve $\quad C_1N = \dfrac{(a+b-c)(b^2+c^2-a^2)}{4bh_1}$ en

$$IN = r - C_1N = \frac{4bh_1r - (a+b-c)(b^2+c^2-a^2)}{4bh_1}.$$

$$IN = \frac{4b^2h_1^2 - (a+b+c)(a+b-c)(b^2+c^2-a^2)}{4(a+b+c)bh_1}$$

$$= \frac{(a+b-c)\{(a-b+c)(b+c-a)-(b^2+c^2-a^2)\}}{4bh_1} = \frac{(a-b)(a+b-c)}{2h_1}.$$

voorts

$$C_1E = CE - CC_1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{(a-c)(a-b+c)}{2b}$$

$$\text{en } I_1 = IN \times C_1E = \frac{(a-b)(a-c)(a+b-c)(a-b+c)}{4bh_1}$$

$$= \tfrac{1}{2}(a-b)(a-c)\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)}}.$$

Eindelijk volgt uit $\triangle AFH \backsim \triangle AA_1O$, $AA_1 : AF = AO : AH$, $AA_1 - AF : AO - AH = AF : AH$ of $A_1F : HO = AF : AH$, $A_1F \times B_1D : HO \times B_1D = AF : AH = AD : AB = h : c$, en

daar nu $I_2 = HO \times B_1D$, zoo is $I_2 = \dfrac{c}{h} \times A_1F \times B_1D$.

Nu is

$$A_1F = AB_1 - AF = \frac{b+c-a}{2} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} = \frac{(a-b)(a+b-c)}{2c},$$

en

$$B_1D = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a}, \quad I_2 = \frac{(a-b)(b-c)(a+b-c)(b+c-a)}{4ah}$$

Digitized by Google

$$I_2 = \tfrac{1}{2}(a-b)(b-c)\sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{(a+b+c)(a-b+c)}}.$$

Men heeft dus $I = \dfrac{(a-c)(b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{4bh_1}$;

$$I_1 = \frac{(a-b)(a-c)(a+b-c)(a-b+c)}{4bh_1};$$

$$I_2 = \frac{(a-b)(b-c)(a+b-c)(b+c-a)}{4ah}.$$

en daar $ah = bh_1 = ch_2$, zoo is

$$I + I_1 = \frac{(a-c)^2(a-b+c)^2}{4ah};\quad I - I_2 = \frac{(b-c)^2(b+c-a)^2}{4ah};$$

$$I_1 - I_2 = \frac{(a-b)^2(a+b-c)^2}{4ah};$$

$$II_1I_2 = \frac{(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(a+b-c)^2(a-b+c)^2(b+c-a)^2}{64a^3h^3}$$

$$= (I + I_1)(I - I_2)(I_1 - I_2).$$

XXII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Twee regte cirkelvormige kegels hebben denzelfden top en dezelfde as. Indien men nu door de as en eene der beschrijvende lijnen van den buitensten kegel een vlak brengt en vervolgens loodregt daarop door een zelfde punt van de beschrijvende lijn willekeurige vlakken, dan zal er tusschen de excentriciteiten van de beide kegelsneden, die in een zelfde vlak liggen, eene zekere betrekking bestaan. Men begeert de vergelijking op te sporen die de wet aangeeft, volgens welke zij zamenhangen.

OPGELOST *door* A. BENTHEM GZ. *en* W. VAN HAARST.

OPLOSSING *van* A. BENTHEM GZ.

Neemt men de gemeenschappelijke as tot z-as, de loodlijn uit het gekozen punt der beschrijvende lijn op deze as neêrgelaten tot x-as aan, dan heeft men voor de vergelijkingen der kegeloppervlakken:

$x^2 + y^2 = (z-h)^2 Tg^2\alpha$. (1) en $x^2 + y^2 = (z-h)^2 Tg^2\beta$ (2)

waarin α en β de halve tophoeken, h de hoogte van den top boven den oorsprong of het xy-vlak voorstelt.

Het vlak van doorsnede zal nu loodrecht op het xz-vlak zijn, zoodat men de vergelijking van die doorsneden in haar eigen vlak zal verkrijgen door in (1) en (2) te substituëeren:

Digitized by Google

$$x = h\,Tg\,\alpha - y\,Cos\,\theta,$$
$$y = x,$$
$$z = y\,Sin\,\theta,$$

Men verkrijgt alsdan na herleiding:

$$x^2 + y^2(Cos^2\theta - Sin^2\theta\,Tg^2\alpha) - 2yh\,Tg\alpha(Cos\theta - Sin\theta\,Tg\alpha) = 0 \quad (3)$$

en $x^2 + y^2(Cos^2\theta - Sin^2\theta\,Tg^2\beta) - 2yh(Cos\theta\,Tg\alpha - Sin\theta\,Tg^2\beta) +$

$$+ h^2(Tg^2\alpha - Tg^2\beta) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Schrijven wij voor deze vergelijkingen de volgende

$$x^2 + A_1y^2 - 2C_1y = 0 \text{ en } x^2 + A'_1y^2 - 2C'_1y + E = 0$$

en stellen wij

$$C_1^2 = T \text{ en } C'^2_1 - A'_1E = T',$$

dan zullen de wortels der vierkants-vergelijkingen:

$$x^2 - \frac{1 + A_1}{A_1^2}Tx + \frac{T^2}{A_1^2} = 0 \text{ en } x^2 - \frac{1 + A'_1}{A'^2_1}T'x + \frac{T'^2}{A'^2_1} = 0$$

de vierkanten van de halve assen der doorsneden aangeven.

Uit de eerste zal men vinden:

$$\frac{1 + A_1}{A_1^2}T = a^2 + b^2, \quad \frac{A_1T^2}{A_1^4} = a^2b^2, \quad \frac{1 - A_1}{A_1^2}T = a^2 - b^2,$$

$$a^2 = \frac{T}{A_1^2}, \; b^2 = \frac{T}{A_1},$$

dus voor de excentriciteit

$$E_1 = \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\frac{T}{A_1^2} - \frac{T}{A_1}}{\frac{T}{A_1^2}}\right)} = \sqrt{(1 - A_1)},$$

dus na substitutie

$$E_1 = \sqrt{(1 - Cos^2\theta + Sin^2\theta\,Tang^2\alpha)} = Sin\,\theta\,Sec\,\alpha. \quad . (5)$$

Evenzoo vindt men uit de 2e vierkants-vergelijking:

$$E_2 = \sqrt{(1 - A'_1)} = Sin\,\theta\,Sec\,\beta,$$

zoodat men verkrijgt

$$E_1 : E_2 = Sec\,\alpha : Sec\,\beta = \frac{1}{Cos\,\alpha} : \frac{1}{Cos\,\beta}.$$

De excentriciteiten zijn dus onafhankelijk van den stand van het vlak van doorsnede en verhouden zich omgekeerd als de cosinussen der halve tophoeken.

Aanmerking. Uit de betrekkingen

$$Sin\,\theta \gtreqless Cos\,\alpha \quad \text{en} \quad Sin\,\theta \gtreqless Cos\,\beta$$

Digitized by Google

volgt of de doorsnede voor den respectieven kegel eene hyperbool, parabool of ellips zal zijn.

XXIII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Een kegelvlak wordt op een gegeven afstand van den top door een vlak loodregt op de as volgens een cirkel gesneden, en men heeft door eene der middellijnen en den top een vlak gebragt. Indien men nu door een der uiteinden van diezelfde middellijn vlakken legt loodregt op het vorige, dan snijden deze den kegel. Men verlangt de meetkundige plaats van de brandpunten dezer kegelsneden te bepalen.

Opgelost *door* W. van Haarst *en* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Nemen wij de as des kegels tot as der abscissen en de door den top O gaande loodlijn tot as der ordinaten aan, (zie fig. 10). Laat voorts het vaste punt A de coördinaten a, b hebben en zij 2α de tophoek des kegels. Indien dan een door A gebragt willekeurig vlak AB den kegel snijdt, is, zooals bekend is, AB de groote as en BC de excentriciteit der ellips volgens welke de kegel gesneden wordt. Zij dan P een harer brandpunten en x en y er de coördinaten van, dan zullen wij tusschen deze eene betrekking moeten vinden, in bekende grootheden uitgedrukt. Stellen wij nu den hoek $CAB=\varphi$, dan is hoek $ACB=90^0+\alpha$ en hoek $ABC=90^0-(\alpha+\varphi)$ en wij hebben dus in den driehoek ABC

$$AC : BC = Sin\left\{90^0 - (\alpha + \varphi)\right\} : Sin\,\varphi,$$

dat is $2b : BC = Cos(\alpha+\varphi) : Sin\,\varphi$ en dus $BC = \dfrac{2b\,Sin\,\varphi}{Cos(\alpha+\varphi)}$

en bovendien $AC : AB = Cos(\alpha+\varphi) : Sin(90^0+\alpha)$ of

$2b : AB = Cos(\alpha+\varphi) : Cos\,\alpha$, waaruit $AB = \dfrac{2b\,Cos\,\alpha}{Cos(\alpha+\varphi)}$.

Daaruit volgt dan $AP = \frac{1}{2}(AB - BC) = \dfrac{b\,(Cos\,\alpha - Sin\,\varphi)}{Cos(\alpha+\varphi)}$

en voorts, dewijl blijkbaar $b - y : b = AP : AD$ en alzoo

$AD = \dfrac{b}{b-y} \times AP$ is, $AD = \dfrac{b^2\,(Cos\,\alpha - Sin\,\varphi)}{(b-y)\,Cos(\alpha+\varphi)}$; maar

Digitized by Google

daar ook $AD = \frac{b}{Cos\,\varphi}$ is, zoo hebben wij door gelijkstelling $\frac{b(Cos\,\alpha - Sin\,\varphi)}{(b-y).\,Cos\,(\alpha+\varphi)} = \frac{1}{Cos\,\varphi}$. Hieruit vindt men

$$b\,Cos\,\alpha\,Cos\,\varphi - b\,Sin\,\varphi\,Cos\,\varphi = (b-y)\,Cos\,(\alpha+\varphi)$$

of $y\,(Cos\,\alpha\,Cos\,\varphi - Sin\,\alpha\,Sin\,\varphi) = b\,(Sin\,\varphi\,Cos\,\varphi - Sin\,\alpha\,Sin\,\varphi)$

of $y\,(Cos\,\alpha - Sin\,\alpha\,Tg\,\varphi) = b\,(Sin\,\varphi - Sin\,\alpha\,Tg\,\varphi)$

of wel $y\,Cos\,\alpha = b\,Sin\,\varphi - Sin\,\alpha\,(b-y)\,Tg\,\varphi$ . . . . (a)

Voorts ziet men gemakkelijk in dat

$$b - y : x - a = b : DO' = b : b\,Tg\,\varphi = 1 : Tg\,\varphi \text{ is,}$$

derhalve $$Tg\,\varphi = \frac{x-a}{b-y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

Dewijl dan nu $(b-y)\,Tg\,\varphi = x - a$ is, kunnen wij (a) schrijven $b\,Sin\,\varphi = y\,Cos\,\alpha + (x-a)\,Sin\,\alpha$ en daaruit volgt

$$b^2 Sin^2\varphi = \frac{b^2\,Tg^2\,\varphi}{1+Tg^2\varphi} = \frac{b^2(x-a)^2}{(b-y)^2+(x-a)^2} = \{y\,Cos\alpha + (x-a)\,Sin\alpha\}^2$$

en deze vergelijking zal dan die van de meetkundige plaats der brandpunten zijn. Het blijkt, dat wij ze eene eenigszins eenvoudiger gedaante kunnen geven, door de assen evenwijdig aan zich zelven zoodanig te verplaatsen, dat het punt A de oorsprong wordt. Stellen wij daartoe $x - a = x_1$ en $y - b = y_1$, dan wordt zij

$$\frac{b^2 x_1^2}{x_1^2 + y_1^2} = \{(y_1 + b)\,Cos\,\alpha + x_1\,Sin\,\alpha\}^2.$$

De kromme welke zij voorstelt is gemakkelijk te construeren. Want de meetkundige plaats van de middelpunten der bedoelde kegelsneden is de lijn, welke door O' evenwijdig met BB' getrokken kan worden en dewijl BC de excentriciteit is, heeft men slechts ter wederzijde van het middelpunt $\frac{1}{2}BC$ uit te zetten, om twee punten van de kromme te vinden. Zij zal den vorm hebben, zooals in de figuur is aangewezen.

XXIV. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Als men van alle rechthoekige driehoeken, welke eene rechthoekzijde gemeen hebben, op de hypotenuse van het midden af den afstand uitzet, dien dit midden van de gemeenschappelijke rechthoekzijde heeft, begeert men de vergelijking van de meetkundige plaats der alzoo verkregen punten te bepalen.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST *en* A. BENTHEM GZ.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Zij, (zie fig. 11) de gegevene rechthoekszijde $AB = 2r$ en ABC een willekeurige daarop beschrevene rechthoekige driehoek. Trekken wij dan door het midden N van AB eene lijn TT' evenwijdig met BC, welke de hypotenuse in M snijdt en nemen wij $MP = MP'$, dan zijn P en P' punten van de gevraagde meetkundige plaats. Wij nemen de rechthoekszijden tot rechthoekige coördinatenassen aan en stellen $BD = x$ en $DP = y$ en zij dan nog $BC = n$ en dus $MN = \frac{1}{2}n$, dan is in de gelijkvormige driehoeken ABC en PDC, $AB : DP = BC : CD$, dat is $2r : y = n : n - x$, dus $2r(n - x) = ny$ en $n = \frac{2rx}{2r - y}$.

Maar nu is $MP : AM = LM : MN$, dat is

$\frac{1}{2}n : \sqrt{(r^2 + \frac{1}{4}n^2)} = \frac{1}{2}n - x : \frac{1}{2}n$ of $n : \sqrt{(4r^2 + n^2)} = n - 2x : n$, waaruit $n^2 = (n - 2x)\sqrt{(4r^2 + n^2)}$ en substitueren wij hierin de gevondene waarde van n, dan vinden wij voor de vergelijking van de gevraagde meetkundige plaats:

$$(y - r)\sqrt{\{x^2 + (2r - y)^2\}} = rx, \text{ dus } x^2(y - r)^2 + (y - r)^2(2r - y)^2 =$$
$$= r^2x^2 \text{ of } \{(y - r)^2(2r - y) - x^2y\}(2r - y) = 0.$$

Verplaatsen wij de abscissen-as tot in TT', dan is

$$y - r = y_1, \text{ dus } y = y_1 + r \text{ en } 2r - y = r - y_1.$$

Voor deze assen is de vergelijking dan

$$x^2 = \frac{y_1^2(r - y_1)}{r + y_1} \text{ of wel } x = \pm y_1\sqrt{\frac{r - y_1}{r + y_1}}.$$

De kromme is gemakkelijk te construeren en verkrijgt den vorm, welke in de figuur wordt aangewezen.

[Zij is de *strophoïde*, zie BRIOT & BOUQUET, *Leçons de Géométrie Analytique*, 6e Edition, p. 21—23. RED.]

XXV. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Vrage te bewijzen: dat bij den bifilair-magnetometer van GAUSS *het draaiingsmoment der beide draden evenredig mag geacht worden aan de sinus van den hoek van omdraaiing.* (*Zie* WÜLLNER's *Lehrbuch der Experimental-Physik*, *D.* II, *bl.* 608).

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Gelijk bekend is, bestaat de bifilair-magnetometer van GAUSS

Digitized by Google

uit twee evenwijdige draden van gelijke lengte AD = BE, (zie fig. 12,) aan wier uiteinden D en E de magneetstaaf is bevestigd, waarvan wij het gewigt p willen noemen. Bij de voorgestelde afwijking u tracht het gewigt p, werkende voor de helft aan D′ en voor de andere helft aan E′, de evenwijdigheid van het draadstelsel te herstellen tegen de horizontale aardmagneetkracht in. Om derhalve het draaiingsmoment te vinden, kunnen wij eerst $\frac{1}{2}p$ = D′S ontbinden in de richting D′U, het verlengde van AD′, en in de horizontale richting der loodlijn D′K uit D′ op AD neêrgelaten. De eerstgenoemde ontbondene spant enkel de draad, de tweede kan wederom ontbonden worden in de richting D′C en in eene horizontale richting loodrecht daarop en het is deze laatste ontbondene die, met 2D′C = d vermenigvuldigd, het begeerde draaiingsmoment geeft.

Nu is de ontbondene volgens D′K = D′S $Tang\,\delta = \frac{1}{2}p \times Tang\,\delta$ en de laatstgenoemde $= \frac{1}{2}p.\,Tang\,\delta\,Sin$ CD′K,

maar $$Cos\,\mathrm{CD'K} = \frac{Cos\,\mathrm{CD'D}}{Cos\,\mathrm{KD'D}} = \frac{Sin\,\frac{1}{2}u}{Cos\,\frac{1}{2}\delta};$$

terwijl $$\mathrm{DD'} = d\,Sin\,\tfrac{1}{2}u = 2l\,Sin\,\tfrac{1}{2}\delta,$$

bijgevolg

$$Sin\,\mathrm{CD'K} = \sqrt{\left\{1 - \frac{Sin^2\,\frac{1}{2}u}{Cos^2\,\frac{1}{2}\delta}\right\}} = \frac{1}{Cos\,\frac{1}{2}\delta}\sqrt{(Cos^2\,\tfrac{1}{2}\delta - Sin^2\,\tfrac{1}{2}u)}$$

$$= \frac{1}{Cos\,\frac{1}{2}\delta}\sqrt{(Cos^2\,\tfrac{1}{2}u - Sin^2\,\tfrac{1}{2}\delta)} = \frac{Cos\,\frac{1}{2}u}{Cos\,\frac{1}{2}\delta}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{d}{2l}\right)^2 Tang^2\,\tfrac{1}{2}u\right]}.$$

Derhalve

$$\text{moment} = \tfrac{1}{2}pd.\frac{Sin\,\delta}{Cos\,\delta}\,Sin\,\mathrm{CD'K}$$

$$= \tfrac{1}{2}pd.\frac{2Sin\,\frac{1}{2}\delta\,Cos\,\frac{1}{2}\delta}{Cos\,\delta} \times \frac{Cos\,\frac{1}{2}u}{Cos\,\frac{1}{2}\delta}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{d}{2l}\right)^2 Tang^2\,\tfrac{1}{2}u\right]}$$

$$= \tfrac{1}{2}pd.\frac{d}{2l\,Cos\,\delta}\,Sin\,u\sqrt{\left[1 - \left(\frac{d}{2l}\right)^2 Tang^2\,\tfrac{1}{2}u\right]}$$

$$= \frac{pd^2}{4l}Sin\,u\left\{1 - \tfrac{1}{2}.\left(\frac{d}{2l}\right)^2 Tang^2\,\tfrac{1}{2}u - \frac{1}{8}\left(\frac{d}{2l}\right)^4 Tang^4\,\tfrac{1}{2}u - \text{enz.}\right\}$$

$$\times\left\{1 + \tfrac{1}{2}.\left(\frac{d}{2l}\right)^2 Sin^2\,\tfrac{1}{2}u + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{d}{2l}\right)^4 Sin^4\,\tfrac{1}{2}u + \text{enz.}\right\}$$

waarvoor $\frac{pd^2}{4l}\,Sin\,u$ mag genomen worden, als d in verhouding tot l zeer klein is, gelijk hier het geval is.

Digitized by Google

XXVI. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Vrage naar de verhouding tusschen hoogte c en breedte a van een rechthoekig parallelepipedum met vierkant grondvlak, bij eene minste waardij dier hoogte, als van de twee stukken waarin het ligchaam door een vlak verdeeld zij, het onderste een cubischen vorm en het bovenste een gegeven volumen v heeft (Zie Wüllner's *Lehrbuch, D.* II, *bl.* 655).

Opgelost *door* C. J. Matthes *en* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Trekt men van den inhoud van het gansche parallelepipedum dien van den cubus af, zoo moet men het gegeven volumen v overhouden. Bijgevolg is

$$(c - a)\,a^2 = v$$

en $c = a + \frac{v}{a^2}$, dus eene bepaalde functie van a.

De vraag is nu, voor welke waarde van a wordt c een minimum. Eene herhaalde differentiatie geeft:

$$\frac{dc}{da} = 1 - \frac{2v}{a^3},$$

$$\frac{d^2c}{da^2} = + \frac{6v}{a^4}.$$

Stelt men de eerste differentiaalverhouding $= 0$, zoo verkrijgt men $a = \sqrt[3]{2v}$; terwijl de tweede voor elke bestaanbare waarde van a, dus ook voor deze, positief is. Substitueert men eindelijk in de uitdrukking voor c, $v = \frac{1}{2}a^3$, zoo komt er $c = a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$, zoodat $c : a = 3 : 2$.

XXVII. Voorstel. *)

Door C. J. Matthes.

Vrage naar een rechtstreeksch bewijs: dat de ontmoetingspunten van de overstaande zijden eens willekeurigen vierhoeks met het doorsnijdingspunt der diagonalen een driespan vormen, met opzigt tot elke kegelsnede den vierhoek omschreven.

Opgelost *door* C. J. Matthes *en* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

De vier gegeven hoekpunten (zie fig. 13) P, Q, R, S van een

*) Dit en de zeven volgende Voorstellen zijn ontleend aan Ferrers *Nieuwere Meetkunde*, Voorbeelden 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20 en 21.

Digitized by Google

volledigen vierhoek bepalen de nevenhoekpunten A, B, C niet alleen, maar deze met één der hoekpunten (P bijv.) bepalen evenzeer de overige Q, R, S. Trekt men toch PA, PB, BC benevens BC, CA, AB, zoo is op PA, Q het aan P toegevoegde harmonische deelpunt van AD; R op PB dat van BE; S op PC dat van CF. Buitendien heeft men eenmaal Q, dan is R het doorsnijdingspunt van PB met QC en S dat van PC met QB. Neemt men nu ABC tot assendriehoek aan, en laat f, g, h de trilineaire coördinaten van P zijn, dan is $CAPDQ$ een harmonische stralenbundel, en derhalve, daar $\alpha - \frac{f}{g}\beta = 0$ de vergelijking van CP is, heeft men voor die van CQ, $\alpha + \frac{f}{g}\beta = 0$, zie FERRERS, bl. 21, gevolg, waaruit voor de coördinaten van Q volgt, aangezien AP tot vergelijking heeft $h\beta = g\gamma$, $(-f, g, h)$. Evenzoo vindt men voor R, $(f, -g, h)$ en voor S, $(f, g, -h)$. Door substitutie dier waarden in de algemeene vergelijking der kegelsnede

$$u\alpha^2 + v\beta^2 + w\gamma^2 + 2u'\beta\gamma + 2v'\gamma\alpha + 2w'\alpha\beta = 0$$

blijkt het, dat $u' = v' = w' = 0$ is, zoodat de vergelijking een vorm heeft waarin de rechthoeken ontbreken, ten bewijze dat de punten A, B, C respectivelijk de polen zijn der overstaande zijden BC, CA, AB met opzigt tot alle aan den vierhoek $PQRS$ omschreven kegelsneden.

OPLOSSING *van* A. BENTHEM GZ.

Het is eene bekende stelling (BRIOT & BOUQUET, pag. 264, Théor. III) dat, als uit een punt B buiten eene kegelsnede lijnen worden getrokken BS en BR, die haar in P en S, Q en R snijden en men trekt de diagonalen SQ en PR, die elkaâr in A snijden, alsdan de lijn, die door A en het snijpunt C van PQ en SR gaat, de poollijn zal zijn van B en dus B de pool van AC; evenzoo zal ook C de pool zijn van de lijn die door A en B gaat. A is dus het snijpunt van de poollijnen B en C, derhalve ook de pool der lijn die B en C verbindt. Bijgevolg vormen A, B en C een driespan.

XXVIII. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Als R *de straal is van den cirkel den assendriehoek omschreven, ϱ die van den cirkel, ten opzigte van welken de as-*

Digitized by Google

sendriehoek wederkeerig gekoppeld is, moet bewezen worden:

$$\varrho^2 + 4R^2 \, Cos\, A.\, Cos\, B.\, Cos\, C = 0.$$

Opgelost *door* H. van Blanken, C. J. Matthes, A. Benthem Gz. *en* J. A. Sandberg.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Wanneer $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ een punt is van den cirkel, die met den assendriehoek wederkeerig is gekoppeld, dan heeft men

$$a\, Cos\, A.\alpha_1^2 + b\, Cos\, B.\beta_1^2 + c\, Cos\, C.\gamma_1^2 = 0, \quad . \quad . \quad (1)$$

verder voor het middelpunt van dien cirkel

$$\alpha_2.\, Cos\, A = \beta_2.\, Cos\, B = \gamma_2.\, Cos\, C = k, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en voor den afstand van die twee punten

$$\varrho^2 = \frac{abc}{4I^2}\left\{aCos\,A(\alpha_1-\alpha_2)^2 + bCosB(\beta_1-\beta_2)^2 + cCosC(\gamma_1-\gamma_2)^2\right\}.$$

Zoo men ontwikkelt en daarbij acht geeft op de vergelijkingen (1) en (2), verkrijgt men:

$$\varrho^2 = \frac{abc}{4I^2}\left\{-2k(a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1)+k(a\alpha_2+b\beta_2+c\gamma_2)\right\} = -\frac{abc}{2I}.k.$$

Uit (2) heeft men

$$k = \frac{2I}{\frac{a}{CosA}+\frac{b}{CosB}+\frac{c}{CosC}} = \frac{2I\, CosA\, CosB\, CosC}{aCosBCosC+bCosACosC+cCosACosB}.$$

Bijgevolg

$$\varrho^2 = -\frac{abc\, Cos\, A\, Cos\, B\, Cos\, C}{a\, Cos\, B\, Cos\, C + b\, Cos\, A\, Cos\, C + c\, Cos\, A\, Cos\, B}. \quad . \quad (3)$$

Maar men heeft

$$a\, Cos\, B\, Cos\, C + b\, Cos\, A\, Cos\, C + c\, Cos\, A\, Cos\, B =$$

$$= \tfrac{1}{2}(a\, Cos\, A + b\, Cos\, B + c\, Cos\, C) = \frac{I}{R}.$$

Brengt men deze waarde in vergelijking (3), dan verkrijgt men $\varrho^2 + 4\,R^2\, Cos\, A\, Cos\, B\, Cos\, C = 0.$

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Voor de coördinaten van het middelpunt van cirkel (ϱ) heeft men, zie Ferrers, bladz. 42, § 48, Gevolg,

$$\alpha_1\, Cos\, A = \beta_1\, Cos\, B = \gamma_1\, Cos\, C,$$

waaruit met behulp van $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2I$:

$$\alpha_1 = \frac{2I\, CosB.CosC}{aCosB.CosC+bCosC.CosA+cCosA.CosB} = \frac{2ICosB.CosC}{aSinB.SinC}$$

Voorts is

Digitized by Google

$$\ddot{a}_1 - \frac{2I}{a} = \frac{aa_1 - 2I}{a} = 2I.\frac{Cos\,B\,Cos\,C - Sin\,B\,Sin\,C}{a.\,Sin\,B.\,Sin\,C} =$$

$$= -2I\,\frac{Cos\,A}{a\,Sin\,B\,Sin\,C};$$

eindelijk

$$\varsigma^2 = \left(a_1 - \frac{2I}{a}\right)x_1 = -\frac{4I^2}{a^2\,Sin^2\,B.\,Sin^2\,C} \times Cos\,A.Cos\,B.Cos\,C$$

$$= -\frac{a^2}{Sin^2\,A}.Cos\,A.Cos\,B.Cos\,C$$

$$= -4\,R^2\,Cos\,A.Cos\,B.Cos\,C.$$

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

Zij (fig. 14) ABC de driehoek, M het orthocentrum en S het punt waar de orthocentrale cirkel *) de zijde AB snijdt, dan is: $\angle\,CSM = 90°$.

Verder is: $CE = a\,Sin\,B = b\,Sin\,A$

$$AE = -b\,Cos\,A$$

$$\angle\,AME = \angle\,B$$

$$ME = AE\,Cot\,B = -b\,Cos\,A\,Cot\,B$$

en $MS^2 = \varsigma^2 = ME \times MC = ME\,(CE + ME) =$

$$= -b\,Cos\,A\,Cot\,B\,(b\,Sin\,A - b\,Cos\,A\,Cot\,B) =$$

$$= b^2\,Cos^2\,A\,Cot^2\,B - b^2\,Cos\,A\,Cot\,B\,Sin\,A =$$

$$= \frac{b^2}{Sin^2\,B}(Cos^2\,A\,Cos^2\,B - Cos\,A\,Sin\,B\,Sin\,A\,Cos\,B) =$$

$$= \frac{b^2\,Cos\,A\,Cos\,B}{Sin^2\,B}\,Cos\,(A + B) =$$

$$= -\frac{b^2}{Sin^2\,B}\,Cos\,A\,Cos\,B\,Cos\,C\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Voorts is $R = \frac{abc}{4I}$, dus ook:

$$4R^2\,Cos\,A\,Cos\,B\,Cos\,C = \frac{a^2b^2c^2\,Cos\,A\,Cos\,B\,Cos\,C}{a^2c^2\,Sin^2\,B} =$$

$$= \frac{b^2}{Sin^2\,B}\,Cos\,A\,Cos\,B\,Cos\,C$$

of na substitutie in (1):

$$\varsigma^2 + 4R^2\,Cos\,A\,Cos\,B\,Cos\,C = 0.$$

*) Deze benaming moge nieuw zijn, zij is echter beknopt en juist, aanduidende den cirkel, wiens middelpunt is het *orthocentrum* van een driehoek, of wel het punt waar de loodlijnen, uit de hoekpunten op de overstaande zijden nedergelaten, elkander snijden. (Red.)

Digitized by Google

XXIX. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Als BC, CA, AB *drie gegeven raaklijnen zijn aan eene kegelsnede*, P, Q, R *drie punten aan haren omtrek en als de inhouden der driehoeken* PBC, PCA, PAB *respectievelijk worden beteekend met* p_1, p_2, p_3, *en die van de driehoeken, welke men verkrijgt door achtervolgens* Q *en* R *voor* P *in de plaats te stellen, met* q_1, q_2, q_3; r_1, r_2, r_3, *te bewijzen: dat*

$$(p_1q_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(p_1q_3r_2)^{\frac{1}{2}}+(p_2q_3r_1)^{\frac{1}{2}}-(p_2q_1r_3)^{\frac{1}{2}}+(p_2q_1r_3)^{\frac{1}{2}}-p_3q_2r_1)^{\frac{1}{2}}=0.$$

Opgelost *door* H. van Blanken, C. J. Matthes *en* A. Bentsem Gz.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Neemt men ABC tot assendriehoek, dan is de vergelijking der kegelsnede

$$\pm(L\alpha)^{\frac{1}{2}}\pm(M\beta)^{\frac{1}{2}}\pm(N\gamma)^{\frac{1}{2}}=0.$$

Zijn nu $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ de coördinaten van het punt P, dan is

$$\alpha_1=\frac{2p_1}{a},\ \beta_1=\frac{2p_2}{b}\ \text{en}\ \gamma_1=\frac{2p_3}{c}.$$

Men heeft derhalve, omdat het punt P in den omtrek der kegelsnede ligt:

$$\pm\left(\frac{2L}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.p_1^{\frac{1}{2}}\pm\left(\frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}}.p_2^{\frac{1}{2}}\pm\left(\frac{2N}{c}\right)^{\frac{1}{2}}.p_3^{\frac{1}{2}}=0,$$

of, zoo men $\pm\left(\frac{2L}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=A$, $\pm\left(\frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=B$ en $\pm\left(\frac{2N}{c}\right)^{\frac{1}{2}}=C$ stelt,

$$Ap_1^{\frac{1}{2}}+Bp_2^{\frac{1}{2}}+Cp_3^{\frac{1}{2}}=0.$$

Op gelijke wijze vindt men voor de punten Q en R:

$$Aq_1^{\frac{1}{2}}+Bq_2^{\frac{1}{2}}+Cq_3^{\frac{1}{2}}=0$$
$$Ar_1^{\frac{1}{2}}+Br_2^{\frac{1}{2}}+Cr_3^{\frac{1}{2}}=0.$$

Zoo men A, B en C tusschen deze drie vergelijkingen elimineert, dan houdt men de navolgende betrekking over:

$$\begin{Bmatrix} p_1^{\frac{1}{2}}, p_2^{\frac{1}{2}}, p_3^{\frac{1}{2}} \\ q_1^{\frac{1}{2}}, q_2^{\frac{1}{2}}, q_3^{\frac{1}{2}} \\ r_1^{\frac{1}{2}}, r_2^{\frac{1}{2}}, r_3^{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix}=0,$$

dat is, de gegevene vergelijking.

XXX. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Te bewijzen, dat de diagonalen van eene willekeurige vierzijde om eene kegelsnede beschreven, en de verbindingslijnen

Digitized by Google

van de raakpunten op de overstaande zijden, allen in één punt elkander snijden.

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN, C. J. MATTHES *en* A. BENTHEM GZ.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Deze stelling is eèn gevolg van het bekende theorema van BRIANCHON. Hier wordt echter blijkbaar bedoeld, de waarheid van het gestelde aan te toonen met behulp van trilineaire coördinaten.

Laat BCDE eene om de kegelsnede beschreven vierzijde zijn, van welke de zijden DC en EB verlengd zijnde, elkander doorsnijden in A. Neemt men nu ABC tot assendriehoek, dan is de vergelijking der kegelsnede

$$\pm (L\alpha)^{\frac{1}{2}} \pm (M\beta)^{\frac{1}{2}} \pm (N\gamma)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Is nu $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ de vergelijking der zijde DE, dan heeft men de voorwaardes-vergelijking

$$\frac{L}{l} + \frac{M}{m} + \frac{N}{n} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Laten de zijden BC, CD, DE, EB achtereenvolgens door de kegelsnede aangeraakt worden in de punten P, Q, R, S.

Voor de coördinaten van het raakpunt R heeft men

$$(\alpha, \beta, \gamma) :: \left(\frac{L}{l^2}, \frac{M}{m^2}, \frac{N}{n^2}\right),$$

en voor het raakpunt P: $\alpha = 0$, $M\beta = N\gamma$.

De vergelijking der lijn, welke door twee punten (f, g, h) en (f', g', h') gaat, is

$$(gh' - gh')\alpha + (hf' - h'f)\beta + (fg' - f'g)\gamma = 0.$$

Neemt men hierin

$$f = \frac{L}{l^2}k,\ g = \frac{M}{m^2}k,\ h = \frac{N}{n^2}k,\ f' = 0,\ g' = \frac{k'}{M} \text{ en } h' = \frac{k'}{N},$$

dan verkrijgt men voor de vergelijking der lijn PR

$$\left(\frac{M}{Nm^2} - \frac{N}{Mn^2}\right)\alpha - \frac{L}{Nl^2}\beta + \frac{L}{Ml^2}\gamma = 0,$$

$$\frac{l^2}{m^2n^2}(M^2n^2 - N^2m^2)\alpha - LM\beta + LN\gamma = 0.$$

Uit vergelijking (1) heeft men

$$\frac{l}{mn} = -\frac{L}{Mn + Nm} \text{ en bijgevolg } \frac{l^2}{m^2n^2} = \frac{L^2}{(Mn + Nm)^2}.$$

Digitized by Google

Door substitutie van deze waarde wordt de vergelijking der lijn PR, $(Mn - Nm)L\alpha - (Mn + Nm)(M\beta - N\gamma) = 0$. (2)

Voor de coördinaten van het raakpunt Q heeft men $\beta = 0$, $L\alpha = N\gamma$, en voor die van het raakpunt S: $\gamma = 0$, $L\alpha = M\beta$; derhalve is de vergelijking der lijn QS:

$$L\alpha - M\beta - N\gamma = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

De vergelijking der lijn BD is $l\alpha + n\gamma = 0$ en die der lijn CE, $l\alpha + m\beta = 0$, voor de coördinaten van het doorsnijdingspunt O dezer lijnen heeft men dus:

$$l\alpha = -m\beta = -n\gamma = k^2; \quad \alpha = \frac{k^2}{l}, \quad \beta = \frac{-k^2}{m}, \quad \gamma = \frac{-k^2}{n}.$$

Brengt men deze waarden in vergelijking (3), dan verkrijgt men vergelijking (1), waaruit blijkt dat het punt O in de lijn QS is gelegen.

Brengt men vervolgens de coördinaten van het punt O in vergelijking (2), dan wordt het eerste lid:

$$(Mn - Nm)\frac{L}{l}k^2 + (Mn + Nm)\frac{Mn - Nm}{mn}k^2,$$

of, zoo men door $(Mn - Nm)k^2$ deelt, $\frac{L}{l} + \frac{M}{m} + \frac{N}{n} = 0$. Het punt O ligt dus ook in de lijn PR.

Aanmerking. In het bijzonder geval dat de zijden DC en EB evenwijdig zijn, wordt de driehoek ABC oneindig groot; de gebruikte vergelijkingen ondergaan daardoor echter volstrekt geene verandering.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Laat (zie fig. 15) *PQRS* den vierhoek, *B*, *C*, *D*, *E* de raakpunten der ingeschreven kegelsnede zijn. Nemen wij nu *ABC* tot assendriehoek aan (*A* is het ontmoetingspunt van *QR* en *SP*), dan is de vergelijking der kegelsnede:

$$k^2\alpha^2 = \beta\gamma. \text{ (Ferrers, bl. 43)} \; . \; . \quad (1)$$

Daar de punten *D* (f, g, h) en *E* (f', g', h') beiden aan derzelver omtrek liggen, krijgen wij door eliminatie van k^2:

$$f^2g'h' = f'^2gh. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

De lijnen *PQ* en *SR* zijn raaklijnen aan *D* en *E*, en hare vergelijkingen zijn dus (zie Ferrers, bl. 45)

$$\left.\begin{array}{r} \text{van } PQ,\ 2gh\alpha - fh\beta - fg\gamma = 0 \\ \text{en van } SR,\ 2g'h'\alpha - f'h'\beta - f'g'\gamma = 0 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Digitized by Google

Dit geeft voor de coördinaten van

$$\left.\begin{array}{l} P \;.\;.\;.\; \gamma = 0,\; 2g\alpha - f\beta = 0 \\ Q \;.\;.\;.\; \beta = 0,\; 2h\alpha - f\gamma = 0 \\ R \;.\;.\;.\; \beta = 0,\; 2h'\alpha - f'\gamma = 0 \\ S \;.\;.\;.\; \gamma = 0,\; 2g'\alpha - f'\beta = 0 \end{array}\right\} \;.\;.\;.\; (4)$$

en bijgevolg voor de vergelijkingen van

$$\left.\begin{array}{l} PR,\; 2gh'\alpha - fh'\beta - f'g\gamma = 0 \\ \text{en van } QS,\; 2g'h\alpha - f'h\beta - fg'\gamma = 0 \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

De lijnen PR en QS snijden derhalve BC ingevolge (2) in eenzelfde punt, waarvoor $\alpha = 0$ en $\beta = -\frac{f'g}{fh'}\gamma = -\frac{fg'}{f'h}\gamma$ is.

De vraag is nu nog maar of ook DE door dat punt gaat, hetwelk gemakkelijk is in te zien, daar hare vergelijking is:

$$\alpha(gh' - g'h) + \beta(hf' - h'f) + \gamma(fg' - f'g) = 0 \;.\; (6)$$

en bijgevolg voor haar doorsnijdingspunt met BC:

$$\alpha = 0 \quad \text{en} \quad \beta = -\frac{fg' - f'g}{f'h - fh'}\gamma = -\frac{fg'}{f'h}\gamma = -\frac{f'g}{fh'}\gamma \quad \text{is.}$$

XXXI. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Aan te toonen, dat de vergelijking der lijn gaande door de voeten der loodlijnen, die men uit een punt $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ van den cirkel $a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta$ op de zijden van den assendriehoek laat vallen, onder den navolgenden vorm kan worden gebragt:

$$\frac{c\beta_1 + b\gamma_1}{\beta_1 Cos C - \gamma_1 Cos B}a\alpha + \frac{a\gamma_1 + c\alpha_1}{\gamma_1 Cos A - \alpha_1 Cos C}b\beta + \frac{b\alpha_1 + a\beta_1}{\alpha_1 Cos B - \beta_1 Cos A}c\gamma = 0.$$

Opgelost *door* C. J. Matthes *en* H. van Blanken.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Door toepassing van de voorwaardes-vergelijking bij Ferrers, bl. 15, vindt men voor de loodlijn uit $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ op $\alpha = 0$:

$$(\beta_1 Cos B - \gamma_1 Cos C)\alpha - (\alpha_1 Cos B + \gamma_1)\beta + (\beta_1 + \alpha_1 Cos C)\gamma = 0,$$

dus voor de voeten der drie loodlijnen:

$$(\gamma_1 + \alpha_1 Cos B)\beta = (\beta_1 + \alpha_1 Cos C)\gamma \text{ en } \alpha = 0,$$
$$(\alpha_1 + \beta_1 Cos C)\gamma = (\gamma_1 + \beta_1 Cos A)\alpha \text{ en } \beta = 0,$$
$$(\beta_1 + \gamma_1 Cos A)\alpha = (\alpha_1 + \gamma_1 Cos B)\beta \text{ en } \gamma = 0.$$

De eerste vergelijking kan men aldus vervormen met behulp van $a\beta_1\gamma_1 + b\gamma_1\alpha_1 + c\alpha_1\beta_1 = 0$,

Digitized by Google

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\beta_1+\alpha_1\,Cos\,C}{\gamma_1+\alpha_1\,Cos\,B}=\frac{bc\alpha_1}{bc\alpha_1}\times\frac{\beta_1+\alpha_1\,Cos\,C}{\gamma_1+\alpha_1\,Cos\,B}=$$

$$=\frac{c}{b}\times\frac{\alpha_1\beta_1(a\,Cos\,C+c\,Cos\,A)+b\alpha_1^2\,Cos\,C}{\alpha_1\gamma_1(b\,Cos\,A+a\,Cos\,B)+c\alpha_1^2\,Cos\,B}=$$

$$=\frac{c}{b}\times\frac{(a\beta_1+b\alpha_1)\,\alpha_1\;Cos\,C+c\alpha_1\beta_1\;Cos\,A}{(c\alpha_1+a\gamma_1)\,\alpha_1\;Cos\,B+b\gamma_1\alpha_1\;Cos\,A}=$$

$$=\frac{c}{b}\times\frac{(a\beta_1+b\alpha_1)(\alpha_1\,Cos\,C-\gamma_1\,Cos\,A)}{(c\alpha_1+a\gamma_1)(\alpha_1\,Cos\,B-\beta_1\,Cos\,A)},$$

dat is: $b\beta\times\frac{c\alpha_1+a\gamma_1}{\gamma_1 CosA-\alpha_1 CosC}+c\gamma\times\frac{a\beta_1+b\alpha_1}{\alpha_1 CosB-\beta_1 CosA}=0,\ \alpha=0,$

evenzoo: $c\gamma\times\frac{a\beta_1+b\alpha_1}{\alpha_1 CosB-\beta_1 CosA}+a\alpha\times\frac{b\gamma_1+c\beta_1}{\beta_1 CosC-\gamma_1 CosB}=0,\ \beta=0,$

en $a\alpha\times\frac{b\gamma_1+c\beta_1}{\beta_1 CosC-\gamma_1 CosB}+b\beta\times\frac{c\alpha_1+a\gamma_1}{\gamma_1 CosA-\alpha_1 CosC}=0,\ \gamma=0;$

waaruit nu duidelijk blijkt, dat de drie punten voldoen aan deze vergelijking eener rechte lijn:

$$a\alpha.\frac{b\gamma_1+c\beta_1}{\beta_1\,Cos\,C-\gamma_1\,Cos\,B}+b\beta.\frac{c\alpha_1+a\gamma_1}{\gamma_1\,Cos\,A-\alpha_1\,Cos\,C}+$$
$$+c\gamma.\frac{a\beta_1+b\alpha_1}{\alpha_1\,Cos\,B-\beta_1\,Cos\,A}=0.$$

XXXII. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Voor de as der parabel, waarvan de vergelijking is $a^2\alpha^2=4bc\beta\gamma$, *vindt men:*

$$(c+b\,Cos\,A)\beta-(b+c\,Cos\,A)\gamma=\tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)a\alpha.$$

Vrage naar het bewijs.

Opgelost *door* H. van Blanken *en* C. J. Matthes.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Men trekke uit het hoekpunt A eene lijn AD door het middelpunt der zijde BC. Deze lijn is eene middellijn der parabel, en heeft tot vergelijking:

$$b\beta=c\gamma\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Verder is genoegzaam bekend, dat de lijn, die uit het brandpunt naar het hoekpunt C wordt getrokken, met de raaklijn CA eenen hoek maakt gelijk aan den hoek CAD, en bijgevolg door het punt gaat, waarin AD gesneden wordt

Digitized by Google

door de lijn, welke loodrecht op het midden van AC staat, en alzoo tot vergelijking heeft:

$$a\alpha + (a \operatorname{Cos} C - c \operatorname{Cos} A)\beta - c\gamma = 0 \ldots . \quad (2)$$

Het brandpunt ligt dus in de lijn, die uit het hoekpunt C getrokken wordt door het snijpunt der lijnen (1) en (2), en bijgevolg tot vergelijking heeft:

$$a\alpha = (b + c \operatorname{Cos} A - a \operatorname{Cos} C)\beta$$

$$a\alpha = 2c \operatorname{Cos} A . \beta.$$

Op gelijke wijze vindt men, dat het brandpunt ligt in de lijn: $a\alpha = 2b \operatorname{Cos} A . \gamma.$

Voor de coördinaten van het brandpunt heeft men dus:

$$a\alpha' = 2c \operatorname{Cos} A . \beta' = 2b \operatorname{Cos} A . \gamma' = k;$$

$$\alpha' = \frac{k}{a}, \quad \beta' = \frac{k}{2c \operatorname{Cos} A}, \quad \gamma' = \frac{k}{2b \operatorname{Cos} A}.$$

Daar de as door het brandpunt evenwijdig aan de lijn $b\beta - c\gamma = 0$ loopt, verkrijgt men voor hare vergelijking:

$$\frac{b\beta - c\gamma}{\frac{bk}{2c \operatorname{Cos} A} - \frac{ck}{2b \operatorname{Cos} A}} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{k + \frac{bk}{2c \operatorname{Cos} A} + \frac{ck}{2b \operatorname{Cos} A}};$$

$$\frac{b\beta - c\gamma}{b^2 - c^2} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{2bc \operatorname{Cos} A + b^2 + c^2};$$

$$(2c^2 + 2bc \operatorname{Cos} A)\, b\beta - (2b^2 + 2bc \operatorname{Cos} A)\, c\gamma = (b^2 - c^2)\, a\alpha;$$

$$(c + b \operatorname{Cos} A)\beta - (b + c \operatorname{Cos} A)\gamma = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) a\alpha.$$

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Blijkens den gegeven vorm van de vergelijking der Parabola raakt zij de zijden *BA* en *BC* van den assendriehoek in de punten *B* en *C* aan. De lijn die het midden *M* van *BC* met *A* verbindt, is dus eene middellijn, behoorende bij koorden evenwijdig met *BC*.

Richt men (zie fig. 16) nu uit *D* en *E*, het midden van *AB* en *AC*, loodlijnen *DP* en *EQ* op, dan is lichtelijk in te zien, dat *BP* en *CQ* elkander moeten snijden in het brandpunt *F*, waardoor men dus slechts eene lijn te trekken heeft evenwijdig aan *AM*, om de as der parabel te verkrijgen.

Voor de loodlijn *DP* vindt men

$$\left.\begin{array}{l} \gamma(a^2 - b^2) + ca\alpha - bc\beta = 0 \\ \text{en voor } EQ \ \beta(c^2 - a^2) + bc\gamma - ab\alpha = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (1)$$

Voorts, daar $b\beta = c\gamma$ de vergelijking van *AM* is, voor

Digitized by Google

het punt P $\quad ca\alpha = 2\beta b^2 \, Cos\, A = 2\gamma bc \, Cos\, A,$
en voor Q $\quad ab\alpha = 2\beta bc \, Cos\, A = 2\gamma c^2 \, Cos\, A;$ . . . (2)

wijders voor de lijnen BP, $\quad a\alpha - 2b\gamma \, Cos\, A = 0$
en CQ, $\quad a\alpha - 2c\beta \, Cos\, A = 0$ . . (3)

wier doorsnijdingspunt F tot coördinaten heeft:

$$\frac{a\alpha}{2bc \, Cos\, A} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Eindelijk vindt men, met behulp der voorwaardes-vergelijking voor de evenwijdigheid met AM, voor de as der parabel:

$$a\alpha(b^2 - c^2) - 2bc\beta(c + b\,Cos\, A) + 2bc\gamma(b + c\,Cos\, A) = 0$$

of wel $\frac{1}{2}a\alpha\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) - \beta(c + b\,Cos\, A) + \gamma(b + c\,Cos\, A) = 0.$

XXXIII. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Aan te toonen, dat de vergelijking van de richtlijn der parabel, die de zijden van den assendriehoek en tevens de rechte lijn $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ aanraakt, is:

$$\alpha \, Cos\, A\left(\frac{b}{m} - \frac{c}{n}\right) + \beta \, Cos\, B\left(\frac{c}{n} - \frac{a}{l}\right) + \gamma \, Cos\, C\left(\frac{a}{l} - \frac{b}{m}\right) = 0.$$

Opgelost *door* H. van Blanken *en* C. J. Matthes.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Het is bekend dat de onderling loodrechte raaklijnen eener parabel elkander in een punt der richtlijn snijden. Is dus (l', m', n') eene raaklijn, welke loodrecht op de zijde BC van den assendriehoek staat, dan is het snijpunt een punt der richtlijn, en men heeft voor de coördinaten van dat punt

$$m'\beta' + n'\gamma' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Voorts heeft men, omdat de lijn (l', m', n') loodrecht op de lijn $\alpha = 0$ staat,

$$l' - n' \, Cos\, B - m' \, Cos\, C = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

en omdat (l', m', n') eene raaklijn is, $Lm'n' + Ml'n' + Nl'm' = 0$, bijgevolg $l' = -\frac{Lm'n'}{Mn' + Nm'}$. Brengt men deze waarde in (2), dan verkrijgt men

$$Lm'n' + (Mn'^2 + Nm'n') \, Cos\, B + (Mm'n' + Nm'^2) \, Cos\, C = 0.$$

Brengt men verder in deze laatste vergelijking de betrekkelijke waarden van m' en n' uit (1), dan verkrijgt men

$$-L\beta'\gamma' + (M\beta'^2 - N\beta'\gamma') \, Cos\, B + (N\gamma'^2 - M\beta'\gamma') \, Cos\, C = 0 \; (3)$$

Digitized by Google

Daar de kegelsnede eene parabel is, heeft men

$$Lbc + Mac + Nab = 0$$

en bijgevolg $$L = -\frac{Mac + Nab}{bc}.$$

Brengt men deze waarde in (3), dan verkrijgt men achtereenvolgens:

$$(Mac + Nab)\,\beta'\gamma' +$$
$$(Mbc\beta'^2 - Nbc\beta'\gamma')\,Cos\,B + (Nbc\gamma'^2 - Mbc\beta'\gamma')\,Cos\,C = 0$$
$$Mc\,(a - b\,Cos\,C)\,\beta'\gamma' +$$
$$Nb\,(a - c\,Cos\,B)\,\beta'\gamma' + Mbc\,Cos\,B\,.\,\beta'^2 + Nbc\,Cos\,C\,.\,\gamma'^2 = 0$$
$$Mc^2\,Cos\,B\,.\,\beta'\gamma' +$$
$$Nb^2\,Cos\,C\,.\,\beta'\gamma' + Mbc\,Cos\,B\,.\,\beta'^2 + Nbc\,Cos\,C\,.\,\gamma'^2 = 0$$
$$(Mc\,Cos\,B\,.\,\beta' + Nb\,Cos\,C\,.\,\gamma')(b\beta' + c\gamma') = 0.$$

Daar de factor $b\beta' + c\gamma'$ niet gelijk nul kan zijn, heeft men voor het punt, alwaar de richtlijn de zijde BC doorsnijdt

$$\frac{M\,Cos\,B}{b}\,\beta' + \frac{N\,Cos\,C}{c}\,\gamma' = 0.$$

Op gelijke wijze vindt men voor het punt, alwaar de richtlijn de zijde AC doorsnijdt,

$$\frac{L\,Cos\,A}{a}\,\alpha' + \frac{N\,Cos\,C}{c}\,\gamma' = 0.$$

De vergelijking der richtlijn is bijgevolg

$$\frac{L\,Cos\,A}{a}\,\alpha' + \frac{M\,Cos\,B}{b}\,\beta + \frac{N\,Cos\,C}{c}\,\gamma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Volgens het Voorstel wordt de parabel door de lijn $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ aangeraakt, men heeft daarom de volgende twee vergelijkingen:

$$Lbc + Mac + Nab = 0 \quad \text{en} \quad Lmn + Mln + Nlm = 0.$$

Uit deze vergelijkingen vindt men

$$\frac{L}{N} = \frac{abln - aclm}{acmn - bcln} \quad \text{en} \quad \frac{M}{N} = \frac{bclm - abmn}{acmn - bcln}.$$

Brengt men deze waarden in vergelijking (4), na haar door N gedeeld te hebben, dan wordt de vergelijking der richtlijn

$$\alpha Cos\,A\,(bln - clm) + \beta Cos\,B\,(clm - amn) + \gamma Cos\,C\,(amn - bln) = 0$$

$$\alpha\,Cos\,A\left(\frac{b}{m} - \frac{c}{n}\right) + \beta\,Cos\,B\left(\frac{c}{n} - \frac{a}{l}\right) + \gamma\,Cos\,C\left(\frac{a}{l} - \frac{b}{m}\right) = 0.$$

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Het doorsnijdingspunt van twee onderling loodrechte raaklijnen aan eene parabel is een punt der richtlijn. Zal de algemeene

Digitized by Google

vergelijking eener kegelsnede, welke de zijden van den assendriehoek aanraakt, eene parabel zijn, dan moet aan deze voorwaarde worden voldaan:

$$\frac{L}{a}+\frac{M}{b}+\frac{N}{c}=0, \text{ (Zie Ferrers, bl. 33, § 37 gevolg) (1)}$$

Voor eene lijn $\perp AC$ hebben wij de voorwaarde:

$$\mu-\nu \, Cos\, A-\lambda \, Cos\, C=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

en, zal deze tevens raaklijn aan de parabel zijn:

$$\frac{L}{\lambda}+\frac{M}{\mu}+\frac{N}{\nu}=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Door eliminatie van μ uit (2) en (3) verkrijgt men, in aanmerking nemende:

$$caM=-b(cL+aN) \quad \text{en} \quad b=a \, Cos\, C+c \, Cos\, A,$$

na herleiding:

$$ca\lambda^2 N \, Cos\, C-\lambda\nu\,(c^2 L \, Cos\, A+a^2 N \, Cos\, C)+\nu^2 ca L \, Cos\, A=0$$

$$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2-\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)\times\frac{c^2 L \, Cos\, A+a^2 N \, Cos\, C}{ca\, N \, Cos\, C}+\frac{L \, Cos\, A}{N \, Cos\, C}=0$$

$$\frac{\lambda}{\nu}=\frac{cL \, Cos\, A}{aN \, Cos\, C} \quad \text{of} \quad =\frac{a}{c};$$

voorts

$$\frac{\mu}{\nu}=Cos\, A+\frac{\lambda}{\nu} \, Cos\, C=\frac{(cL+aN) \, Cos\, A}{aN}=-\frac{cM \, Cos\, A}{bN}$$

of

$$=\frac{c \, Cos\, A+a \, Cos\, C}{c}=\frac{b}{c}.$$

Wij vinden dus twee raaklijnen, waarvan de eene, blijkens hare vergelijking $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$ de lijn op oneindigen afstand is. Voor de andere is de vergelijking:

$$\alpha bc \, L \, Cos\, A-\beta ca \, M \, Cos\, C. \, Cos\, A+\gamma ab \, N \, Cos\, C=0 \quad (4)$$

Evenzoo voor de raaklijn $\perp AB$:

$$\alpha bc \, L \, Cos\, A+\beta ca \, M \, Cos\, B-\gamma ab \, N \, Cos\, A. \, Cos\, B=0 \quad (5)$$

De combinatie der eerste met $\beta=0$ en der tweede met $\gamma=0$ geeft twee punten der richtlijn, te weten:

$$\left.\begin{array}{l} \beta=0\,,\ \gamma a \, N \, Cos\, C+\alpha c \, L \, Cos\, A=0 \\ \text{en}\ \ \gamma=0\,,\ \alpha b \, L \, Cos\, A+\beta a \, M \, Cos\, B=0\,, \end{array}\right\} \; . \; . \; (6)$$

zoodat de vergelijking der lijn door die twee punten bepaald, dat is de richtlijn, wordt:

$$\alpha bc \, L \, Cos\, A+\beta ca \, M \, Cos\, B+\gamma ab \, N \, Cos\, C=0 \; . \; . \; (7)$$

In het Voorstel was opgegeven, dat de parabel nog eene

Digitized by Google

gegeven lijn (l, m, n) moest aanraken. Daardoor worden de betrekkelijke waardijen van L, M, N bekend. Immers wij hebben weêr

$$\frac{L}{a}+\frac{M}{b}+\frac{N}{c}=0,\quad \frac{L}{l}+\frac{M}{m}+\frac{N}{n}=0,$$

waaruit lichtelijk afgeleid wordt

$$(L, M, N) :: \{al(bn-cm), bm(cl-an), cn(am-bl)\}. \quad (8)$$

Die waarden, gesubstitueerd, geven eindelijk voor de gevraagde vergelijking:

$$\alpha \operatorname{Cos} A\left(\frac{b}{m}-\frac{c}{n}\right)+\beta \operatorname{Cos} B\left(\frac{c}{n}-\frac{a}{l}\right)+\gamma \operatorname{Cos} C\left(\frac{a}{l}-\frac{b}{m}\right)=0.$$

XXXIV. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Te bewijzen, dat als de vergelijking:

$$(L\alpha)^{\frac{1}{2}}+(M\beta)^{\frac{1}{2}}+(N\gamma)^{\frac{1}{2}}=0$$

eene parabel voorstelt, de vergelijking van derzelver as is:

$$\frac{a^2\alpha}{L}\left(\frac{b^4}{M^2}-\frac{c^4}{N^2}\right)+\frac{b^2\beta}{M}\left(\frac{c^4}{N^2}-\frac{a^4}{L^2}\right)-\frac{c^2\gamma}{N}\left(\frac{a^4}{L^2}-\frac{b^4}{M^2}\right)=0.$$

Opgelost *door* H. van Blanken.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Wanneer men uit een punt der richtlijn raaklijnen aan de parabel trekt, gaat de koorde, die de raakpunten vereenigt, door het brandpunt. Van deze bekende eigenschap kan men gebruik maken om het brandpunt te bepalen.

In de voorgaande oplossing is gevonden voor de coördinaten van het punt P, alwaar de richtlijn de zijde BC doorsnijdt,

$$\frac{M \operatorname{Cos} B}{b}\beta'+\frac{N \operatorname{Cos} C}{c}\gamma'=0.$$

De vergelijking der lijn PQ, die in dat punt loodrecht op BC staat, is

$$(Nb+Mc)\operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} C.\alpha+Mc \operatorname{Cos} B.\beta+Nb \operatorname{Cos} C.\gamma=0,$$

of $\quad -Lbc \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} C.\alpha+Mac \operatorname{Cos} B.\beta+Nab \operatorname{Cos} C.\gamma=0.$

Deze lijn is eene raaklijn. Om het raakpunt te bepalen heeft men uit deze vergelijking en uit de vergelijking der parabel

$$L\alpha=\frac{Mac \operatorname{Cos} B.\beta+Nab \operatorname{Cos} C.\gamma}{bc \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} C}=M\beta+N\gamma+2(MN\beta\gamma)^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{Mc \operatorname{Cos} B(a-b \operatorname{Cos} C)\beta+Nb \operatorname{Cos} C(a-c \operatorname{Cos} B)\gamma}{bc \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} C}=2(MN\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

Digitized by Google

$$\frac{Mc^2 \, Cos^2 B.\beta + Nb^2 \, Cos^2 C.\gamma}{bc \, Cos \, B \, Cos \, C} = 2(MN\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}.$$

Derhalve $(Mc^2 \, Cos^2 B.\beta + Nb^2 Cos^2 C.\gamma)^2 = 4MNb^2c^2 Cos^2 B Cos^2 C.\beta\gamma$

$$(Mc^2 \, Cos^2 \, B.\beta - Nb^2 \, Cos^2 \, C.\gamma)^2 = 0.$$

Voor de coördinaten van het raakpunt Q heeft men bijgevolg

$$\frac{L}{a^2}\alpha = \frac{M}{b^2 \, Cos^2 \, C}\beta = \frac{N}{c^2 \, Cos^2 \, B}\gamma.$$

Voorts heeft men voor de coördinaten van het punt R, waarin de zijde BC de parabel aanraakt,

$$\alpha = 0, \; M\beta = N\gamma.$$

Verder vindt men voor de lijn, die door de raakpunten Q en R gaat:

$$\frac{b^2 \, Cos^2 \, C - c^2 \, Cos^2 \, B}{MN}\alpha - \frac{a^2}{LN}\beta + \frac{a^2}{LM}\gamma = 0,$$

$$\frac{(b \, Cos \, C + c \, Cos \, B)(b \, Cos \, C - c \, Cos \, B)}{MN}\alpha - \frac{a^2}{LN}\beta + \frac{a^2}{LM}\gamma = 0,$$

$$\frac{ab \, Cos \, C - ac \, Cos \, B}{MN}\alpha - \frac{a^2}{LN}\beta + \frac{a^2}{LM}\gamma = 0,$$

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2}L\alpha - M\beta + N\gamma = 0.$$

In deze lijn ligt het brandpunt.

Op gelijke wijze vindt men dat het brandpunt gelegen is in de lijn $-L\alpha + \frac{a^2 - c^2}{b^2}M\beta + N\gamma = 0.$

Hieruit vindt men verder voor de coördinaten van het brandpunt $\frac{L}{a^2}\alpha = \frac{M}{b^2}\beta = \frac{N}{c^2}\gamma.$

De vergelijking der middellijn, die door het hoekpunt A loopt, is $\frac{\beta}{Lc + Na} = \frac{\gamma}{Lb + Ma};$

of, omdat $Lbc + Mac + Nab = 0$ is, $\frac{b\beta}{Mac} = \frac{c\gamma}{Nab}$

$$Nb^2\beta = Mc^2\gamma.$$

Daar de as der parabel door het brandpunt evenwijdig aan de middellijn loopt, heeft men voor de vergelijking der as

$$\frac{Nb^2\beta - Mc^2\gamma}{Nb^2.\frac{b^2}{M} - Mc^2.\frac{c^2}{N}} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a.\frac{a^2}{L} + b.\frac{b^2}{M} + c.\frac{c^2}{N}};$$

Digitized by Google

$$(Nb^2\beta - Mc^2\gamma)(MNa^3 + LNb^3 + LMc^3)$$
$$= (N^2b^4 - M^2c^4)(La\alpha + Lb\beta + Lc\gamma);$$
$$(N^2b^4 - M^2c^4)\,La\alpha - (MLc^4 + N^2a^3b + LNbc^3)\,Mb\beta +$$
$$(NLb^4 + M^2a^3c + LMb^3c)\,Nc\gamma = 0;$$
$$(N^2b^4 - M^2c^4)\,La\alpha - \left\{\frac{Mac + Nab}{a}\,Lc^3 + N^2a^3b\right\}Mb\beta +$$
$$\left\{\frac{Nab + Mac}{a}\,Lb^3 + M^2a^3c\right\}Nc\gamma = 0,$$

of, omdat $Mac + Nab = -Lbc$ is,

$$(N^2b^4 - M^2c^4)La^2\alpha + (L^2c^4 - N^2a^4)Mb^2\beta + (M^2a^4 - L^2b^4)Nc^2\gamma = 0,$$
$$\frac{a^2\alpha}{L}\left(\frac{b^4}{M^2} - \frac{c^4}{N^2}\right) + \frac{b^2\beta}{M}\left(\frac{c^4}{N^2} - \frac{a^4}{L^2}\right) + \frac{c^2\gamma}{N}\left(\frac{a^4}{L^2} - \frac{b^4}{M^2}\right) = 0.$$

XXXV. VOORSTEL.

Door J. H. SCHÄFER.

Vrage, in het trilineaire coördinatenstelsel, naar de algemeene vergelijkingen van drie lijnen, die door de hoekpunten van den assen-driehoek kunnen getrokken worden en de eigenschap hebben, dat de loodlijnen op die lijnen, welke door dezelfde punten gaan, elkander in één punt snijden, alsmede naar de coördinaten van het snijpunt.

OPGELOST *door* J. H. SCHÄFER *en* A. BENTHEM GZ.

OPLOSSING *van* J. H. SCHÄFER.

Laat van twee lijnen AA' en BB' de vergelijkingen zijn:

$$q\beta + r\gamma = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$
$$p\alpha + r\gamma = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

waarin p, q, r in het algemeen functiën van de hoeken A, B en C beteekenen, dan zal eene derde lijn CC', die door het doorsnijdingspunt van eerstgenoemde gaat, tot vergelijking hebben:

$$p\alpha - q\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

De bedoelde lijnen nu door A, B, C respectivelijk loodrecht op (a), (b) en (c), hebben vergelijkingen van den vorm:

$$m'\beta + n'\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$
$$l''\alpha + n''\gamma = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e)$$
$$l'''\alpha + m'''\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

terwijl de loodrechte stand vordert, dat (a) en (d), (b) en (e), (c) en (f) voldoen aan de voorwaardes-vergelijking (zie FERRERS

Digitized by Google

N. Meetk., § 17), $ll' + mm' + nn' - (mn' + m'n) \cos A - (nl' + n'l) \cos B - (lm' + l'm) \cos C = 0$, waaruit volgt:

$$m'(q - r \cos A) + n'(r - q \cos A) = 0,$$
$$l''(p - r \cos B) + n''(r - p \cos B) = 0,$$
$$l'''(p + q \cos C) - m'''(q + p \cos C) = 0;$$

hetgene voor de gevraagde algemeene vergelijkingen geeft:

$$\beta(q \cos A - r) + \gamma(q - r \cos A) = 0, \quad \ldots \quad (g)$$
$$\gamma(p - r \cos B) + \alpha(p \cos B - r) = 0, \quad \ldots \quad (h)$$
$$\alpha(q + p \cos C) + \beta(p + q \cos C) = 0; \quad \ldots \quad (i)$$

terwijl blijkbaar de coördinaten van het snijpunt zijn:

$$\frac{\alpha_1}{q} = \frac{\beta_1}{p} = -\frac{\gamma_1}{pq : r}.$$

Als toepassing der vergelijkingen (g), (h), (i) kiezen wij de opgave van Voorstel 243, waar gegeven zijn de lijnen:

$$\frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0, \quad \frac{\gamma}{c} + \frac{\alpha}{a} = 0, \quad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 0.$$

Deze vergelijkingen identifieerende met de gevonden algemeene uitdrukkingen, verkrijgt men:

$$(q \cos A - r) b = (q - r \cos A) c,$$
$$\frac{q}{r} = -\frac{b - c \cos A}{c - b \cos A} = -\frac{\cos C}{\cos B};$$
$$(p - r \cos B) c = (p \cos B - r) a,$$
$$\frac{p}{r} = -\frac{a - c \cos B}{c - a \cos B} = -\frac{\cos C}{\cos A};$$
$$(q + p \cos C) a = (p + q \cos C) b,$$
$$\frac{p}{q} = \frac{a - b \cos C}{b - a \cos C} = \frac{\cos B}{\cos A};$$

derhalve

$$\left(p, q, r, \frac{pq}{r}\right) :: \left(-\cos B \cos C, -\cos C \cos A, \cos A \cos B, \cos^2 C\right)$$

en

$$\frac{\alpha_1}{\cos A} = \frac{\beta_1}{\cos B} = \frac{\gamma_1}{\cos C}.$$

XXXVI. VOORSTEL.

Door A. BENTHEM GZ.

De vergelijking:

$$\alpha \cot \tfrac{1}{2}A \cos^2 \tfrac{1}{2}A + \beta \cot \tfrac{1}{2}B \cos^2 \tfrac{1}{2}B + \gamma \cot \tfrac{1}{2}C \cos^2 \tfrac{1}{2}C = 0,$$

stelt de machtlijn voor van de cirkels in *en* om *den assendriehoek beschreven. Men vraagt naar het bewijs.*

OPGELOST *door* A. BENTHEM GZ.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* A. BENTHEM GZ.

Uit FERRERS § 39 volgt door herhaalde quadrateering voor de vergelijking van den ingeschreven cirkel:

$$\alpha^2 \, Cos^4 \tfrac{1}{2}A + \beta^2 \, Cos^4 \tfrac{1}{2}B + \gamma^2 \, Cos^4 \tfrac{1}{2}C - 2\beta\gamma \, Cos^2 \tfrac{1}{2}B . Cos^2 \tfrac{1}{2}C -$$
$$- 2\gamma\alpha \, Cos^2 \tfrac{1}{2}C . Cos^2 \tfrac{1}{2}A - 2\alpha\beta \, Cos^2 \tfrac{1}{2}A . Cos^2 \tfrac{1}{2}B = 0,$$

en uit § 35 voor die van den omschreven cirkel

$$\beta\gamma \, Sin\, A + \gamma\alpha \, Sin\, B + \alpha\beta \, Sin\, C = 0.$$

De vergelijking

$$\alpha^2 \, Cos^4 \tfrac{1}{2}A + \beta^2 \, Cos^4 \tfrac{1}{2}B + \gamma^2 \, Cos^4 \tfrac{1}{2}C - \ldots$$
$$- k\,(\beta\gamma \, Sin\, A + \gamma\alpha \, Sin\, B + \alpha\beta \, Sin\, C) = 0 \quad \ldots \quad (a)$$

stelt nu in het algemeen alle kegelsneden voor, die de vier beiden cirkels gemeenschappelijke punten bevatten. Daaronder moet voorkomen het stelsel der machtlijn met de lijn op oneindigen afstand, wier vergelijking is $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$. Neemt men dus voor die der machtlijn aan $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, zoo moet het product dezer twee identisch kunnen worden met (a) voor eene bepaalde waarde van k. En die identiteit zal leiden tot de bepaling van l, m, n. Zij geeft toch

$$l = \frac{1}{a} Cos^4 \tfrac{1}{2}A, \quad m = \frac{1}{b} Cos^4 \tfrac{1}{2}B, \quad n = \frac{1}{c} Cos^4 \tfrac{1}{2}C;$$

voorts

$$k = -\frac{(b \, Cos^2 \tfrac{1}{2}C + c \, Cos^2 \tfrac{1}{2}B)^2}{bc \, Sin\, A}$$
$$= -\frac{(c \, Cos^2 \tfrac{1}{2}A + a \, Cos^2 \tfrac{1}{2}C)^2}{ca \, Sin\, B}$$
$$= -\frac{(a \, Cos^2 \tfrac{1}{2}B + b \, Cos^2 \tfrac{1}{2}A)^2}{ab \, Sin\, C}$$
$$= -\frac{(a + b + c)^2}{81}.$$

De vergelijking der machtlijn wordt bijgevolg:

$$\frac{\alpha}{a} Cos^4 \tfrac{1}{2}A + \frac{\beta}{b} Cos^4 \tfrac{1}{2}B + \frac{\gamma}{c} Cos^4 \tfrac{1}{2}C = 0$$

of

$$\alpha \frac{Cos^4 \tfrac{1}{2}A}{Sin\, A} + \beta \frac{Cos^4 \tfrac{1}{2}B}{Sin\, B} + \gamma \frac{Cos^4 \tfrac{1}{2}C}{Sin\, C} = 0$$

of nog $\alpha \, Cot \tfrac{1}{2}A . Cos^2 \tfrac{1}{2}A + \beta \, Cot \tfrac{1}{2}B . Cos^2 \tfrac{1}{2}B + \gamma \, Cot \tfrac{1}{2}C . Cos^2 \tfrac{1}{2}C = 0.$

XXXVII. VOORSTEL.

Door A. BENTHEM GZ.

Voor alle geheele positieve waarden van n en p, mits p > 1 zij,

Digitized by Google

geeft de herleiding van $[p+\sqrt{(p^2-1)}]^n$ *een geheel getal met een gebroken; bewijs, dat het geheele getal steeds oneven zijn zal.*

Opgelost *door* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

Zij a het geheel getal en b de breuk, dan is:

$$a+b=p^n+np^{n-1}(p^2-1)^{\frac{1}{2}}+\binom{n}{2}p^{n-2}(p^2-1)^{\frac{2}{2}}+\ldots+(p^2-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Verder is $p-\sqrt{p^2-1}<1$, derhalve is zulks ook $(p-\sqrt{p^2-1})^n$. Noemen we deze waarde b', dan is:

$$b'=p^n-np^{n-1}(p^2-1)^{\frac{1}{2}}+\binom{n}{2}p^{n-2}(p^2-1)^{\frac{2}{2}}-\ldots+(-1)^n(p^2-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Is nu n even, dan is:

$$a+b+b'=2\left(p^n+\binom{n}{2}p^{n-2}(p^2-1)+\binom{n}{4}p^{n-4}(p^2-1)^2+\ldots+(p^2-1)^{\frac{n}{2}}\right)$$

en voor n oneven is:

$$a+b+b'=2\left(p^n+\binom{n}{2}p^{n-2}(p^2-1)+\binom{n}{4}p^{n-4}(p^2-1)^2+\ldots+\binom{n}{1}p(p^2-1)^{\frac{n-1}{2}}\right),$$

dus in elk geval is $a+b+b'$ een even getal.

Nu zijn echter b en b' beide breuken, kleiner dan de eenheid, dus is $b+b'=1$, bijgevolg a een oneven getal.

Aanmerking. De opgegeven stelling gaat zelfs door voor $(p+\sqrt{p^2-q})^n$, ingeval $\sqrt{p^2-q}>p-1$ en q positief is.

XXXVIII. Voorstel.

Door W. H. Wisseline.

De wortels der vergelijking:

$$x^4-mx^3+nx^2-px+q=0$$

stellen de zijden eens in een' cirkel beschreven vierhoeks voor. Men vraagt den inhoud van dien vierhoek uit te drukken in m, n, p *en* q.

Opgelost *door* W. H. Wisseline, S. de Jong Jz. *en* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* W. H. Wisseline.

Noemen we de wortels der gegeven vergelijking a, b, c en

Digitized by Google

d en stellende $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, dan is volgens eene bekende stelling:

$$\text{Inh. vierhoek} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Volgens bekende eigenschappen der hoogere machtsvergelijkingen is:

$$a+b+c+d = +m,$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd = n,$$
$$abc+abd+acd+bcd = +p,$$
$$abcd = q.$$

en

$$s = \tfrac{1}{2}m.$$

Dus, Inh. vierh. $= \sqrt{(\frac{1}{2}m-a)(\frac{1}{2}m-b)(\frac{1}{2}m-c)(\frac{1}{2}m-d)} =$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(m-2a)(m-2b)(m-2c)(m-2d)} =$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(m^2+4ab-2m(a+b))(m^2+4cd-2m(c+d))} =$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(m^4-2m^3(a+b+c+d)+4m^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$
$$-8m(abc+abd+acd+bcd)+16abcd) =$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(m^4-2m^3.m+4m^2.n-8m.p+16q)} =$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(16q-8mp+4m^2n-m^4)}.$$

XXXIX. VOORSTEL.

Door W. H. WISSELINK.

De meetkundige plaats te bepalen van het snijpunt van twee normalen tot de cubische parabel $y^3 = ax^2$, welke loodrecht op elkander staan.

OPGELOST *door* W. H. WISSELINK *en* A. BENTHEM GZ.

OPLOSSING *van* A. BENTHEM GZ.

Volgens de formule is de vergelijking eener normaal van de kromme, wier vergelijking is $f(x,y) = 0$, in een punt wiens coördinaten zijn x_1, y_1:

$$(y-y_1)\frac{df}{dx_1} - (x-x_1)\frac{df}{dy_1} = 0.$$

In dit geval, waarin $f(x,y)$ is:

$$y^3 = ax^2,$$

heeft men voor de normaal in het punt (x_1, y_1):

$$(y-y_1)\,2ax_1 + (x-x_1)\,3y_1^2 = 0$$

en voor den richtings-coefficiënt van deze $-\dfrac{3y_1^2}{2ax_1}$.

Voor de normaal in een tweede punt (x_2, y_2) heeft men:

$$(y-y_2)\,2ax_2 + (x-x_2)\,3y_2^2 = 0$$

en voor haren richtings-coefficiënt $-\dfrac{3y_2^2}{2ax_2}$.

Digitized by Google

Deze normalen snijden zich nu, volgens de opgave, in een punt, wiens coördinaten mogen zijn p, q, dan heeft men:

$$-\frac{3y_1^2}{2ax_1} = \frac{y_1 - q}{x_1 - p} \quad \text{en} \quad -\frac{3y_2^2}{2ax_2} = \frac{y_2 - q}{x_2 - p},$$

waaruit deze vergelijkingen worden afgeleid:

$$x_1(3y_1^2 + 2ay_1 - 2aq) = 3py_1^2 \quad \text{en}$$
$$x_2(3y_2^2 + 2ay_2 - 2aq) = 3py_2^2 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Volgens de tweede voorwaarde, in de opgave vermeld, moet het product der richtings-coefficiënten der beide normalen zijn $= -1$. Men zoude derhalve deze twee vergelijkingen (1) met elkander moeten vermenigvuldigen, doch wij kunnen eene van deze, b. v. de eerste, tot de tweede magt verheffen, en dan y_1 en y_2 als twee van de wortels der resulterende vergelijking aanmerken. Doen wij dit, zoo verkrijgen wij:

$$x_1^2(9y_1^4 + 12ay_1^3 - 12aqy_1^2 + 4a^2y_1^2 - 8a^2qy_1 + 4a^2q^2) = 9p^2y_1^4$$

of daar $y_1^2 = ax_1^2$,

$$9y_1^4 + 12ay_1^3 + 4a(a - 3q)y_1^2 - a(8aq + 9p^2)y_1 + 4a^2q^2 = 0.$$

Deze vergelijking heeft twee positieve wortels, welke nu mogen zijn y_1 en y_2, de beide overige y_3 en y_4, dan heeft men

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{4}{3}a, \; \Sigma y_1y_2 = \frac{4a(a-3q)}{9}.$$

$$\Sigma y_1y_2y_3 = \frac{a}{9}(8aq + 9p^2), \; y_1y_2y_3y_4 = \frac{4}{9}a^2q^2.$$

Volgens de opgave moet nu $-\frac{3y_1^2}{2ax_1} \times -\frac{3y_2^2}{2ax_2}$ zijn $= -1$, hieruit volgt na lichte herleiding $y_1y_2 = \frac{16}{81}a^2$, en dus is

$$y_3y_4 = \frac{4}{9}a^2q^2 : \frac{16}{81}a^2 = \frac{9}{4}q^2.$$

Stel nu $y_1 + y_2 = t$, $y_3 + y_4 = u$, dan is

$$\Sigma y_1y_2 = tu + y_1y_2 + y_3y_4, \text{ of } \frac{4}{9}a(a - 3q) = tu + \frac{16}{81}a^2 + \frac{9}{4}q^2,$$

derhalve

$$tu = \frac{20}{81}a^2 - \frac{1}{12}q(16a + 27q) \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$\Sigma y_1y_2y_3 = y_3y_4t + y_1y_2u \text{ of } \frac{a}{9}(8aq + 9p^2) = \frac{9}{4}q^2t + \frac{16}{81}a^2u$$

Digitized by Google

en terwijl men heeft $t + u = -\frac{4}{3}a$, vindt men uit deze beide laatste vergelijkingen $u = \dfrac{\frac{1}{9}a(8aq + 9p^2) + 3aq^2}{\frac{16}{81}a^2 - \frac{9}{4}q^2}$

of $$u = \frac{36a(8aq + 9p^2 + 27q^2)}{64a^2 - 729q^2},$$

derhalve volgens vergelijking (2).

$$-\frac{36a(8aq + 9p^2 + 27q^2)}{64a^2 - 729q^2}\left\{\frac{36a(8aq + 9p^2 + 27q^2)}{64a^2 - 729q^2} + \frac{4}{3}a\right\}$$
$$= \frac{20}{81}a^2 - \frac{1}{12}q(16a + 27q)$$

of de noemers wegmakende en voor p en q stellende de veranderlijke coördinaten x en y:

$$1296a^2(8ay + 27y^2 + 9x^2)^2 + 48a^2(8ay + 27y^2 + 9x^2)(64a^2 - 729y^2)$$
$$+ \frac{20}{81}a^2(64a^2 - 729y^2)^2 - \frac{1}{12}y(16a + 27y)(64a^2 - 729y^2)^2 = 0,$$

welke dus is de vergelijking van de gevraagde meetkundige plaats.

XL. Voorstel. (*)

Door W. H. Wisselink.

De meetkundige plaats te bepalen van zoodanig punt dat de som der vierkanten van de normalen uit dat punt tot de parabel $y^2 = 2px$ getrokken, standvastig *zij.*

Opgelost *door* W. H. Wisselink *en* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* W. H. Wisselink *en* A. Benthem Gz.

Men stelle de coördinaten van het punt, dat aan de voorwaarde voldoet, te zijn a, b, en de coördinaten van eenig punt der parabola, wier vergelijking $y^2 = 2px$, x_1, y_1, dan is de vergelijking der normaal die door de beide punten gaat

$$(y_1 - b) = -\frac{y_1}{p}(x_1 - a),$$

waaruit wordt afgeleid:

$$x_1y_1 + py_1 - ay_1 - pb = 0,$$

of, daar $y_1^2 = 2px_1$,

$$y_1^3 + 2p(p - a)y_1 - 2p^2b = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(*) Ontleend aan Briot et Bouquet, *Géométrie Analytique.*

Digitized by Google

Men kan derhalve drie normalen aan de parabola uit het punt (a, b) trekken. Noemt men de wortels dezer vergelijking y_1, y_2, y_3, dan is

$y_1+y_2+y_3=0$, $y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=2p(p-a)$ en $y_1y_2y_3=2p^2b$.

Volgens de opgave nu is, wanneer x_1, x_2, x_3 de abscissen zijn der punten, wier ordinaten zijn y_1, y_2, y_3:

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(x_2-a)^2+(y_2-b)^2+(x_3-a)^2+(y_3-b)^2$$
$$= Const. = c^2,$$

of herleidende:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2a(x_1+x_2+x_3)+(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$
$$-2b(y_1+y_2+y_3)+3a^2+3b^2=c^2,$$

of daar $y_1^2=2px_1$, $y_2^2=2px_2$, $y_3^2=2px_3$, $y_1+y_2+y_3=0$,

$$\frac{1}{4p^2}(y_1^4+y_2^4+y_3^4)-\frac{2a}{2p}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$
$$+3a^2+3b^2=c^2,$$
$$(y_1^4+y_2^4+y_3^4)+4p(p-a)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$
$$+12(a^2+b^2)p^2=4c^2p^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Maar uit vergelijking (1) volgt:

$$y_1^4+2p(p-a)y_1^2-2p^2by_1=0,$$

derhalve

$$(y_1^4+y_2^4+y_3^4)+2p(p-a)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$
$$-2p^2b(y_1+y_2+y_3)=0. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

aftrekkende nu verg. (3) van verg. (2) en uit aanmerking dat $y_1+y_2+y_3=0$,

$$2p(p-a)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+12(a^2+b^2)p^2=4c^2p^2 \quad (4)$$

Maar men heeft

$$y_1^2+y_1y_2+y_1y_3=0,$$

dus $\quad y_1^2=-(y_1y_2+y_1y_3)=y_2y_3-2p(p-a)$

en derhalve

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=y_2y_3+y_1y_3+y_1y_2-6p(p-a)$$

of $\quad =2p(p-a)-6p(p-a)=-4p(p-a)$

en de vergelijking (4) wordt:

$$-8p^2(p-a)^2+12(a^2+b^2)p^2=4c^2p^2$$
$$-2p^2+4ap-2a^2+3a^2+3b^2=c^2,$$
$$a^2+3b^2+4ap-2p^2-c^2=0.$$

Stellende nu in de plaats van a en b de veranderlijke coördinaten x en y, heeft men voor de gezochte meetkundige plaats

$$x^2+3y^2+4px-2p^2-c^2=0.$$

Digitized by Google

Stelt men in deze vergelijking $x = x' - 2p$, $y = y'$, dan wordt zij

$$x'^2 + 3y'^2 - 6p^2 - c^2 = 0$$

en de meetkundige plaats is eene *ellips*.

XLI. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Van een bolvormigen vierhoek, om welken een cirkel beschreven kan worden, zijn de spherische straal van dien cirkel en drie van de vier bolvormige hoeken, die rondom de pool gevormd worden, als de stralen naar de hoekpunten getrokken zijn, gegeven. Men verlangt den inhoud van dien vierhoek in die gegevens uit te drukken.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Zij (zie fig. 17) ABCD de bolvormige vierhoek, P de pool en $AP = BP = CP = DP = r$ de spherische straal des omschreven cirkels. Laten voorts de hoeken $APB = \alpha$, $BPC = \beta$ en $APD = \delta$ gegeven zijn, dan is hoek $CPD = 360° - (\alpha + \beta + \delta) = \gamma$. Noemen wij nu den inhoud des vierhoeks I, den inhoud van de driehoeken, waarin die vierhoek gedeeld wordt door de stralen naar de hoekpunten getrokken, A, B, C, D, dan is, als d_1, d_1, d_2, d_3 de halve spherische excessen van deze driehoeken voorstellen en R de straal van den bol

$$A = \frac{d}{90°} \times R^2\pi,\ B = \frac{d_1}{90°} \times R^2\pi,\ C = \frac{d_2}{90°} \times R^2\pi,\ D = \frac{d_3}{90°} \times R^2\pi,$$

$$I = A + B + C + D = \frac{d + d_1 + d_2 + d_3}{90°} \times R^2\pi,$$ waaruit volgt

$$d + d_1 + d_2 + d_3 = \frac{I}{R^2\pi} \times 90° \text{ en } Cot(d + d_1 + d_2 + d_3) = Cot\left(\frac{I}{R^2\pi} \times 90\right)$$

$$Cot\left(\frac{I}{R^2\pi} \times 90°\right)$$

$$= \frac{Cot\,d\,Cot\,d_1\,Cot(d_2 + d_3) - Cot\,d - Cot\,d_1 - Cot(d_2 + d_3)}{Cot\,d\,Cot\,d_1 + Cot\,d\,Cot(d_2 + d_3) + Cot\,d_1\,Cot(d_2 + d_3) - 1}$$

$$= \frac{(Cot\,d\,Cot\,d_1 - 1)(Cot\,d_2\,Cot\,d_3 - 1) - (Cot\,d + Cot\,d_1)(Cot\,d_2 + Cot\,d_3)}{(Cot\,d\,Cot\,d_1 - 1)(Cot\,d_2 + Cot\,d_3) + (Cot\,d_2\,Cot\,d_3 - 1)(Cot\,d + Cot\,d_1)}$$

of daar $Cot\,d = \dfrac{Cot^2\frac{1}{2}r + Cos\,\alpha}{Sin\,\alpha}$, $Cot\,d_1 = \dfrac{Cot^2\frac{1}{2}r + Cos\,\beta}{Sin\,\beta}$,

$$Cot\,d_2 = \frac{Cot^2\frac{1}{2}r + Cos\,\gamma}{Sin\,\gamma},\ Cot\,d_3 = \frac{Cot^2\frac{1}{2}r + Cos\,\delta}{Sin\,\delta},$$

Digitized by Google

$$= \frac{\begin{array}{l}\left\{Cot^4\tfrac{1}{2}r + (Cos\,\alpha + Cos\,\beta)\,Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,(\alpha+\beta)\right\}\left\{Cot^4\tfrac{1}{2}r + (Cos\,\gamma + Cos\,\delta)\,Cos^2\tfrac{1}{2}r + Cos(\gamma+\delta)\right\} \\ -\left\{(Sin\,\alpha + Sin\,\beta)\,Cot^2\tfrac{1}{2}r + Sin\,(\alpha+\beta)\right\}\left\{(Sin\,\gamma + Sin\,\delta)\,Cot^2\tfrac{1}{2}r + Sin\,(\gamma+\delta)\right\}\end{array}}{\begin{array}{l}\left\{Cot^4\tfrac{1}{2}r + (Cos\,\alpha + Cos\,\beta)\,Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,(\alpha+\beta)\right\}\left\{(Sin\,\gamma + Sin\,\delta)\,Cot^2\tfrac{1}{2}r + Sin\,(\gamma+\delta)\right\} \\ \quad + \left\{Cot^4\tfrac{1}{2}r + (Cos\,\gamma + Cos\,\delta)\,Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,(\gamma+\delta)\right\}\left\{(Sin\,\alpha + Sin\,\beta)\,Cot^2\tfrac{1}{2}r + Sin\,(\alpha+\beta)\right\};\end{array}}$$

$$= \frac{\begin{array}{l}Cot^4\tfrac{1}{2}r\,(Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,\alpha + Cos\,\beta)(Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,\gamma + Cos\,\delta) - Cot^4\tfrac{1}{2}r\,(Sin\,\alpha + Sin\,\beta)(Sin\,\gamma + Sin\,\delta) \\ \quad + Cot^2\tfrac{1}{2}r\left\{Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,\alpha + Cos\,\beta)\,Cos\,(\gamma+\delta) + (Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,\gamma + Cos\,\delta)\,Cos\,(\alpha+\beta)\right\} + Cos\,(\alpha+\beta)\,Cos\,(\gamma+\delta) \\ - Cot^2\tfrac{1}{2}r\left\{(Sin\,\alpha + Sin\,\beta)\,Sin\,(\gamma+\delta) + (Sin\,\gamma + Sin\,\delta)\,Sin\,(\alpha+\beta)\right\} - Sin\,(\alpha+\beta)\,Sin\,(\gamma+\delta)\end{array}}{\begin{array}{l}Cot^6\tfrac{1}{2}r\,(Sin\,\gamma + Sin\,\delta) + Cot^4\tfrac{1}{2}r\left\{(Cos\,\alpha + Cos\,\beta)\,(Sin\,\gamma + Sin\,\delta) + Sin\,(\gamma+\delta)\right\} \\ \quad + Cot^2\tfrac{1}{2}r\left\{(Cos\,\alpha + Cos\,\beta)\,Sin\,(\gamma+\delta) + (Sin\,\gamma + Sin\,\delta)\,Cos\,(\alpha+\beta)\right\} + Cos\,(\alpha+\beta)\,Sin\,(\gamma+\delta) \\ \quad + Cot^6\tfrac{1}{2}r\,(Sin\,\alpha + Sin\,\beta) + Cot^4\tfrac{1}{2}r\left\{Sin\,(\alpha+\beta) + (Cos\,\gamma + Cos\,\delta)(Sin\,\alpha + Sin\,\beta)\right\} \\ \quad + Cot^2\tfrac{1}{2}r\left\{(Cos\,\gamma + Cos\,\delta)\,Sin\,(\alpha+\beta) + (Sin\,\alpha + Sin\,\beta)\,Cos\,(\gamma+\delta)\right\} + Cos\,(\gamma+\delta)\,Sin\,(\alpha+\beta).\end{array}}$$

Maar nu is $Cos\,(\alpha+\beta)\,Cos\,(\gamma+\delta) - Sin\,(\alpha+\beta)\,Sin\,(\gamma+\delta) = Cos\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = Cos\,360^\circ = 1$

en $Sin\,(\alpha+\beta)\,Cos\,(\gamma+\delta) + Sin\,(\gamma+\delta)\,Cos\,(\alpha+\beta) = Sin\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = Sin\,360^\circ = 0$

$$= \frac{\begin{array}{l}Cot^6\tfrac{1}{2}r + Cot^4\tfrac{1}{2}r\,(Cos\,\alpha + Cos\,\beta + Cos\,\gamma + Cos\,\delta) + Cot^2\tfrac{1}{2}r\left\{(Cos\,\alpha + Cos\,\beta)\,(Cos\,\gamma + Cos\,\delta) + Cos\,(\alpha+\beta) + Cos\,(\gamma+\delta)\right. \\ \qquad\qquad \left. - (Sin\,\alpha + Sin\,\beta)(Sin\,\gamma + Sin\,\delta)\right\} \\ + (Cos\,\alpha + Cos\,\beta)\,Cos(\gamma+\delta) + (Cos\,\gamma + Cos\,\delta)\,Cos(\alpha+\beta) - (Sin\,\alpha + Sin\,\beta)\,Sin(\gamma+\delta) - Sin(\alpha+\beta)(Sin\,\gamma + Sin\,\delta) + Tang^2\tfrac{1}{2}r\end{array}}{\begin{array}{l}Cot^4\tfrac{1}{2}r(Sin\,\alpha + Sin\,\beta + Sin\,\gamma + Sin\,\delta) + Cot^2\tfrac{1}{2}r\left\{(Cos\,\alpha + Cos\,\beta)(Sin\,\gamma + Sin\,\delta) + Sin(\gamma+\delta) + Sin(\alpha+\beta) + (Cos\,\delta + Cos\,\gamma)(Sin\,\alpha + Sin\,\beta)\right\} \\ + (Cos\,\alpha + Cos\,\beta)\,Sin\,(\gamma+\delta) + (Sin\,\gamma + Sin\,\delta)\,Cos\,(\alpha+\beta) + (Cos\,\gamma + Cos\,\delta)\,Sin\,(\alpha+\beta) + (Sin\,\alpha + Sin\,\beta)\,Cos\,(\gamma+\delta)\end{array}}$$

$$= \frac{\begin{array}{l}Cot^6\tfrac{1}{2}r + Cot^4\tfrac{1}{2}r\,(Cos\,\alpha + Cos\,\beta + Cos\,\gamma + Cos\,\delta) + Cot^2\tfrac{1}{2}r\left\{Cos(\alpha+\beta) + Cos(\alpha+\gamma) + Cos(\alpha+\delta) + Cos(\beta+\gamma) + Cos(\beta+\delta) + Cos(\gamma+\delta)\right\} \\ \quad + Cos\,(\alpha+\gamma+\delta) + Cos\,(\beta+\gamma+\delta) + Cos\,(\alpha+\beta+\delta) + Cos\,(\alpha+\beta+\gamma) + Tang^2\tfrac{1}{2}r\end{array}}{Cot^4\tfrac{1}{2}r(Sin\,\alpha + Sin\,\beta + Sin\,\gamma + Sin\,\delta) + Cot^2\tfrac{1}{2}r\left\{Sin(\alpha+\beta) + Sin(\alpha+\gamma) + Sin(\alpha+\delta) + Sin(\beta+\gamma) + Sin(\beta+\delta) + Sin(\gamma+\delta)\right\}} +$$

Digitized by Google

$$+ Sin(\alpha + \gamma + \delta) + Sin(\beta + \gamma + \delta) + Sin(\alpha + \beta + \delta) + Sin(\alpha + \beta + \gamma).$$

Noemen wij nu het tweede lid dezer vergelijking, dat uit de gegevens bekend is P, dan is

$$\frac{I}{R^2\pi} \times 90^\circ = Boog(Cot = P) \text{ en } I = \frac{R^2\pi}{90^\circ} \times Boog(Cot = P),$$

waarin de boog in graden moet worden uitgedrukt.

Aanmerkingen. 1°. Stellen wij $\delta = \gamma = \beta = \alpha$, zoodat de vierhoek een bolvormig kwadraat wordt, dan hebben wij in dit geval

$$P = \frac{Cot^8 \tfrac{1}{2}r + 4\, Cos\, \alpha\, Cot^6 \tfrac{1}{2}r + 6\, Cos\, 2a\, Cot^4 \tfrac{1}{2}r + 4\, Cos\, 3a\, Cot^2 \tfrac{1}{2}r + 1}{4\, Sin\, \alpha\, Cot^6 \tfrac{1}{2}r + 6\, Sin\, 2a\, Cot^4 \tfrac{1}{2}r + 4\, Sin\, 3a\, Cot^2 \tfrac{1}{2}r}$$

of, daar hier $\alpha = 90^\circ$, en dus $Cos\, \alpha = 0$, $Cos\, 2a = -1$, $Cos\, 3a = 0$, $Sin\, a = 1$, $Sin\, 2a = 0$ en $Sin\, 3a = -1$.

$$= \frac{Cot^8 \tfrac{1}{2}r - 6\, Cot^4 \tfrac{1}{2}r + 1}{4\, Cot^6 \tfrac{1}{2}r - 4\, Cot^2 \tfrac{1}{2}r} = \tfrac{1}{4}\, Tang^2 \tfrac{1}{2}r \times \frac{Cot^8 \tfrac{1}{2}r - 6\, Cot^4 \tfrac{1}{2}r + 1}{Cot^4 \tfrac{1}{2}r - 1}.$$

2°. Stelt men $\gamma = \alpha$ en $\delta = \beta$, waardoor de vierhoek een rechthoek wordt, dan is, daar nu

$$\alpha + \beta = 180^\circ,\ Cos\, \beta = -Cos\, \alpha,\ Sin\, \beta = Sin\, \alpha,\ Cos\, 2\alpha + Cos\, 2\beta = 2(1 - 2\, Sin^2 \alpha),\ Sin\, 2\alpha + Sin\, 2\beta = 0,$$

$$P = \frac{Cot^8 \tfrac{1}{2}r - [4 - (Cos\, 2\alpha + Cos\, 2\beta)]\, Cot^4 \tfrac{1}{2}r + [2\, Cos(2\alpha + \beta) + 2\, Cos(\alpha + 2\beta)]\, Cot^2 \tfrac{1}{2}r + 1}{4\, Sin\, \alpha\, Cot^6 \tfrac{1}{2}r + (Sin\, 2a + Sin\, 2\beta)\, Cot^4 \tfrac{1}{2}r + (2\, Sin(2\alpha + \beta) + 2\, Sin(\alpha + 2\beta))\, Cot^2 \tfrac{1}{2}r},$$

$$= \frac{Cot^8 \tfrac{1}{2}r - 2(1 + 2\, Sin^2 \alpha)\, Cot^4 \tfrac{1}{2}r + 1}{4\, Sin\, a\, Cot^6 \tfrac{1}{2}r - 4\, Sin\, \alpha\, Cot^2 \tfrac{1}{2}r} = \tfrac{1}{4}\, Tang^2 \tfrac{1}{2}r \times \frac{Cot^8 \tfrac{1}{2}r - 2(1 + 2\, Sin^2 \alpha)\, Cot^4 \tfrac{1}{2}r + 1}{(Cot^4 \tfrac{1}{2}r - 1)\, Sin\, \alpha},$$

welke formule de uitdrukking voor P in aanm. 1 gevonden, teruggeeft, zoo als het behoort, wanneer ook $\beta = \alpha$ en dus $\alpha = 90^\circ$.

3°. Stelt men $r = 90^\circ$, dan is $Cot^4 \tfrac{1}{2}r - 1 = 0$ en P oneindig groot, derhalve $I = \frac{R^2\pi}{90^\circ} \times 180^\circ = 2R^2\pi$, welke de uitdrukking is voor de oppervlakte van den halven bol.

Digitized by Google

XLII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Als men uit de polen van den bolvormigen vierhoek, in het vorige voorstel vermeld, koorden naar de hoekpunten trekt, begeert men den inhoud van het lichaam te bepalen, waarvan de koorden de ribben zijn.

Opgelost *door* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Nemen wij aan, dat er om den bolvormigen vierhoek ABCD een cirkel beschreven kan worden, welks spherische straal $AP = BP = CP = DP = r$ en de bolvormige hoeken $APB = \alpha$, $BPC = \beta$, $CPD = \gamma$ en $APD = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma = \delta$ gegeven zijn. Noemen wij de zijden des vierhoeks tegenover deze hoeken a_1, b_1, c_1 en d_1, de koorden dezer bogen a, b, c en d en de vlakke hoeken van den door deze koorden gevormden vierhoek A, B, C en D, dan wordt blijkbaar, als wij den diagonaal BD trekken, de vlakke hoek ABD door denzelfden boog van den omschreven kleinen cirkel gemeten als de halve bolvormige hoek APD, terwijl hetzelfde plaats heeft met den vlakken hoek CBD en den halven bolvormigen CPD. Wij hebben bijgevolg

$$\text{hoek } ABD = \tfrac{1}{2}\delta \text{ en hoek } CBD = \tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\text{dus } B = \text{hoek } ABD + \text{hoek } CBD = \tfrac{1}{2}(\delta + \gamma).$$

Op gelijke wijze vindt men

$$A = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma),\ C = \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta) \text{ en } D = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Nu is

$$\text{inh. drieh. } ABD = \tfrac{1}{2}a^2 \times \frac{Sin\,A\,Sin\,ABD}{Sin(A + ABD)} = \tfrac{1}{2}a^2 \times \frac{Sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)Sin\tfrac{1}{2}\delta}{Sin\tfrac{1}{2}(\beta+\delta+\gamma)}$$

en

$$\text{inh. drieh. } CBD = \tfrac{1}{2}b^2 \times \frac{Sin\,C\,Sin\,CBD}{Sin(C + CBD)} = \tfrac{1}{2}b^2 \times \frac{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)Sin\tfrac{1}{2}\gamma}{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma+\delta)},$$

en dewijl inh. vierh. ABCD = inh. drieh. ABD + inh. drieh. CBD is, hebben wij, dien inhoud I_1 noemende,

$$I_1 = \tfrac{1}{2}a^2 \times \frac{Sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,Sin\tfrac{1}{2}\delta}{Sin\tfrac{1}{2}(\beta+\delta+\gamma)} + \tfrac{1}{2}b^2 \times \frac{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\delta)\,Sin\tfrac{1}{2}\gamma}{Sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma+\delta)}.$$

Bedenkt men hierbij dat

$$Sin\tfrac{1}{2}(\beta + \delta + \gamma) = Sin(180^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = Sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$Sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma + \delta) = Sin(180^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) = Sin\tfrac{1}{2}\beta$$

$$\text{en } Sin\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = Sin(180^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\delta) = Sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta)$$

Digitized by Google

is, dan kan men schrijven

$$I_1 = \tfrac{1}{2}\, Sin\, \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta)\left\{\frac{a^2\, Sin\tfrac{1}{2}\delta}{Sin\tfrac{1}{2}\alpha} + \frac{b^2\, Sin\tfrac{1}{2}\gamma}{Sin\tfrac{1}{2}\beta}\right\} \quad . \; . \; . \; (a)$$

Drukken wij nu de zijde AB $= a$, van den gelijkbeenigen bolvormigen driehoek APB in de beide andere zijden met den ingesloten hoek uit, dan is de gewone formule

$$Cos\, a_1 = Cos^2 r + Sin^2 r\, Cos\, \alpha,$$

daaruit volgt

$$Cos\, a_1 = 1 - Sin^2 r(1 - Cos\, \alpha) = 1 - 2\, Sin^2 r\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

en dus $\dfrac{1 - Cos\, a_1}{2} = Sin^2 \tfrac{1}{2} a_1 = Sin^2 r\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha,$

waaruit $Sin\, \tfrac{1}{2} a_1 = Sin\, r . Sin\, \tfrac{1}{2}\alpha.$

Op gelijke wijze is dan ook

$$Sin\, \tfrac{1}{2} b_1 = Sin\, r\, Sin\, \tfrac{1}{2}\beta,\; Sin\, \tfrac{1}{2} c_1 = Sin\, r\, Sin\, \tfrac{1}{2}\gamma$$

en $Sin\, \tfrac{1}{2} d_1 = Sin\, r\, Sin\, \tfrac{1}{2}\delta.$

En dewijl blijkbaar.

$$a = 2R\, Sin\, \tfrac{1}{2} a_1\,,\; b = 2R\, Sin\, \tfrac{1}{2} b_1\,,\; c = 2R\, Sin\, \tfrac{1}{2} c,$$

en $d = 2R\, Sin\, \tfrac{1}{2} d_1$

is, hebben wij

$$a = 2R\, Sin\, r\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha\,,\; b = 2R\, Sin\, r\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\,,\; c = 2R\, Sin\, r\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma$$

en $d = 2R\, Sin\, r\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\delta.$

Schrijven wij dan deze waarden van a en b in de vergelijking (a), dan wordt zij

$$I_1 = 2R^2\, Sin^2 r\, Sin\, \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta)(Sin\, \tfrac{1}{2}\alpha\, Sin\, \tfrac{1}{2}\delta + Sin\, \tfrac{1}{2}\beta\, Sin\, \tfrac{1}{2}\gamma).$$

Noemen wij eindelijk den inhoud van het gevraagde lichaam I, dan is

$$I = \frac{2}{3} R I_1 = \frac{4}{3} R^3 Sin^2 r\, Sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta)(Sin\tfrac{1}{2}\alpha\, Sin\tfrac{1}{2}\delta + Sin\tfrac{1}{2}\beta\, Sin\tfrac{1}{2}\gamma) \quad (b)$$

Aanmerkingen. Voor $\gamma = \alpha$ en $\delta = \beta$ wordt de loodrechte doorsnede een rechthoek. In dit geval is

$$Sin\tfrac{1}{2}\,(\alpha + \delta) = Sin\, 90^\circ = 1 \text{ en } I = \frac{8}{3} R^3\, Sin^2 r\, Sin\tfrac{1}{2}\alpha\, Sin\tfrac{1}{2}\beta.$$

Is daarbij $\beta = \alpha$, zoodat die doorsnede een kwadraat wordt, dan is $\alpha = 90^\circ$ en $I = \dfrac{4}{3} R^3\, Sin^2 r.$

Stelt men hierin $r = 90^\circ$, zoodat de omschreven cirkel een groote cirkel van den bol is, zoo wordt $I = \dfrac{4}{3} R^3.$

Digitized by Google

XLIII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Indien de vergelijkingen van een cirkel en eene rechte lijn gegeven zijn, de coördinaten van zulk een punt in laatstgemelde te bepalen, dat als men daaruit raaklijnen aan den cirkel trekt, de hoek, welken deze met elkander maken, een maximum zij.

Opgelost *door* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Zij r de straal des cirkels en m, m_1 de coördinaten van zijn middelpunt, dan is zijne vergelijking

$$(y-m_1)^2+(x-m)^2=r^2.$$

Zoo als bekend is, wordt de vergelijking van de raaklijn aan eenig punt (n, n_1) van den cirkel

$$(y-m_1)(n_1-m_1)+(x-m)(n-m)=r^2 \quad . \quad . \quad (a)$$

Nemen wij nu aan, dat deze raaklijn door eenig punt (p, p_1) gaat, dan moet

$$(p_1-m_1)(n_1-m_1)+(p-m)(n-m)=r^2$$

zijn, en doordien het punt (n, n_1) op den omtrek des cirkels ligt, moet $\quad (n_1-m_1)^2+(n-m)^2=r^2$

wezen. Om uit deze beide laatste vergelijkingen n en n_1 op te lossen, hebben wij uit de eerste

$$(p_1-m_1)^2(n_1-m_1)^2=r^4-2r^2(p-m)(n-m)+(p-m)^2(n-m)^2$$

en uit de tweede

$$(p_1-m_1)^2(n_1-m_1)^2=r^2(p_1-m_1)^2-(p_1-m_1)^2(n-m)^2$$

en dus door gelijkstelling der beide laatste leden

$$\{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2\}(n-m)^2-2r^2(p-m)(n-m)-$$
$$-r^2\{(p_1-m_1)^2-r^2\}=0,$$

waaruit wij, door $n-m$ op te lossen, vinden

$$n-m=\frac{r^2(p-m)\pm r(p_1-m_1)\sqrt{\{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2-r^2\}}}{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2}$$

en dan wordt

$$n_1-m_1=\frac{r^2-(p-m)(m-n)}{p_1-m_1}=$$
$$=\frac{r^2(p_1-m_1)\mp r(p-m)\sqrt{\{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2-r^2\}}}{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2}$$

Door nu deze waarden in de vergelijking (a) te substitueren, vinden wij voor de vergelijking van de raaklijnen, welke uit eenig punt buiten den cirkel aan den cirkel getrokken kunnen worden:

Digitized by Google

$$(y-m_1)\{r(p_1-m_1)\mp(p-m)\sqrt{P}\}$$
$$+(x-m)\{r(p-m)\pm(p_1-m_1)\sqrt{P}\}=r\{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2\},$$
waarin kortheidshalve
$$P=(p-m)^2+(p_1-m_1)^2-r^2$$
genomen is, en de bovenste teekens bij elkander behooren. De vergelijking der eene raaklijn is dus
$$y=-\frac{r(p-m)+(p_1-m_1)\sqrt{P}}{r(p_1-m_1)-(p-m)\sqrt{P}}x$$
$$+\frac{r\{p(p-m)+p_1(p_1-m_1)\}-(m_1p-mp_1)\sqrt{P}}{r(p_1-m_1)-(p-m)\sqrt{P}}$$
en die der andere
$$y=-\frac{r(p-m)-(p_1-m_1)\sqrt{P}}{r(p_1-m_1)+(p-m)\sqrt{P}}x$$
$$+\frac{r\{p(p-m)+p_1(p_1-m_1)\}+(m_1p-mp_1)\sqrt{P}}{r(p_1-m_1)+(p-m)\sqrt{P}}.$$
Noemen wij in deze vergelijkingen de coëfficienten van x A en A_1 en den hoek, dien de raaklijnen met elkander maken, ϕ, dan is
$$tg\,\phi=\frac{A-A_1}{1+AA_1}$$
en om derhalve $tg\,\phi$ in de gegevens uit te drukken, is
$$A-A_1=-2r\times\frac{\{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2\}\sqrt{P}}{r^2(p_1-m_1)^2-(p-m)^2P}$$
en
$$1+AA_1=-\{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2-2r^2\}\times\frac{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2}{r^2(p_1-m_1)^2-(p-m)^2P}$$
en alzoo
$$tg\,\phi=\frac{2r\sqrt{P}}{P-r^2}=\frac{2r\sqrt{\{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2-r^2\}}}{(p-m)^2+(p_1-m_1)^2-2r^2}.$$
Nu is het punt, waaruit de raaklijnen getrokken zijn, (p,p_1) en nemen wij aan, dat de gegevene vergelijking van de lijn, waarin dit punt liggen moet, $y=ax+b$ is, dan zal $p_1=ap+b$ moeten zijn, en daardoor wordt dan
$$tg\,\phi=\frac{2r\sqrt{\{(p-m)^2+(ap+b-m_1)^2-r^2\}}}{(p-m)^2+(ap+b-m_1)^2-2r^2}$$
en wij zullen nu moeten bepalen, voor welke waarde van p de hoek φ een maximum of minimum wordt. Indien nu φ altijd kleiner dan 90° bleef, zou φ en $tg\,\varphi$ tegelijk een maxi-

Digitized by Google

mum of minimum worden; dit is echter hier geenszins het geval, waarom wij de waarde van $Sin\,\frac{1}{2}\phi$ berekenen, welke voor een maximum of minimum van $\frac{1}{2}\phi$ en dus ook van ϕ zelve zoodanig wordt. Nu is

$$Cos\,\phi = \frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\phi)}} = \frac{(p-m)^2+(ap+b-m_1)^2-2r^2}{(p-m)^2+(ap+b-m_1)^2}$$

en $$Sin\,\tfrac{1}{2}\phi = \sqrt{\frac{1-Cos\,\phi}{2}} = \frac{r}{\sqrt{\{(p-m)^2+(ap+b-m_1)^2\}}}.$$

Differentiëren wij nu tweemaal ten opzigte van p, dan vinden wij

$$\frac{d\,Sin\,\frac{1}{2}\phi}{dp} = -r\times\frac{(a^2+1)p+ab-am_1-m}{\sqrt{\{(p-m)^2+(ap+b-m_1)^2\}^3}}$$

en $$\frac{d^2\,Sin\,\frac{1}{2}\phi}{dp^2} = -r\times\frac{a^2+1}{\sqrt{Q^3}}+3r\times\frac{(a^2+1)p+(ab-am_1-m)}{\sqrt{Q^5}},$$

waarin $Q=(p-m)^2+(ap+b-m_1)^2$ is.

De eenige waarde van p, welke het eerste quotiënt gelijk nul maakt, is

$$p = \frac{am_1+m-ab}{a^2+1}$$

en, daar deze den tweeden term van het tweede quotiënt nul doet zijn, wordt dit laatste quotiënt negatief, ten bewijze dat genoemde waarde van p een maximum voor $Sin\,\frac{1}{2}\phi$ en alzoo voor $\frac{1}{2}\phi$ en derhalve ook voor ϕ daarstelt. Men ziet gemakkelijk in, dat in dit geval p de abscis is van den voet der loodlijn, welke uit het middelpunt des cirkels op de gegevene lijn neêrgelaten kan worden.

XLIV. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

De vergelijkingen van twee cirkels zijn gegeven. Men wil aan den omtrek van den eenen cirkel de coördinaten van een punt bepalen, zoodanig dat als men daaruit raaklijnen aan den tweeden cirkel trekt, de hoek dier raaklijnen een maximum of minimum zij.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Zij de vergelijking des eenen cirkels

$$y^2+x^2=r^2$$

en die des anderen

$$(y-b)^2+(x-a)^2=r_1^2.$$

Digitized by Google

Uit het vorige Voorstel vinden wij dan terstond, door $m = 0$ en $m_1 = 0$ te stellen, voor den hoek, dien de raaklijnen, uit eenig punt (p, p_1) aan den eersten cirkel getrokken, met elkander maken

$$tg\,\phi = \frac{2r\sqrt{(p^2 + p_1^2 - r^2)}}{p^2 + p_1^2 - 2r^2}$$

en, dewijl ook hier ϕ grooter dan 90° zijn kan, en een maximum voor $tg\,\phi$ dan geen maximum voor ϕ oplevert, nemen wij

$$Sin\,\tfrac{1}{2}\phi = \sqrt{\frac{1 - Cos\,\phi}{2}} = \frac{r}{\sqrt{(p^2 + p_1^2)}}.$$

Dewijl nu het punt (p, p_1) op den omtrek des tweeden cirkels liggen moet, hebben wij

$$(p_1 - b)^2 + (p - a)^2 = r_1^2,$$

waaruit volgt

$$p_1 = b \pm \sqrt{\{r_1^2 - (p - a)^2\}} \text{ en}$$

$$p^2 + p_1^2 = 2ap + r_1^2 + b^2 - a^2 \pm 2b\sqrt{\{r_1^2 - (p - a^2)\}}$$

en daardoor wordt dan

$$Sin\,\tfrac{1}{2}\phi = \frac{r}{\sqrt{\{2ap + r_1^2 + b^2 - a^2 \pm 2b\sqrt{[r_1^2 - (p - a)^2]}\}}}$$

en nu zal ϕ een maximum worden, als $Sin\,\tfrac{1}{2}\phi$ het is. Differentiëren wij deze vergelijking, dan is

$$\frac{d\,Sin\,\tfrac{1}{2}\phi}{dp} =$$

$$= r \times \frac{-a\sqrt{\{r_1^2 - (p - a)^2\}} \pm b(p - a)}{\sqrt{\{r_1^2 - (p - a)^2\}}\,\{2ap + r_1^2 + b^2 - a^2 \pm 2b\sqrt{[r_1^2 - (p - a)^2]}\}^3}.$$

Om het tweede differentiaalquotiënt op te maken, stellen wij ter vereenvoudiging

$$r_1^2 - (p - a)^2 = A \text{ en}$$

$$2ap + r_1^2 + b^2 - a^2 \pm 2b\sqrt{A} = B,$$

dan is

$$\frac{d\,Sin\,\tfrac{1}{2}\phi}{dp} = r \times \left\{-\frac{a}{\sqrt{B^3}} \pm \frac{b(p - a}{\sqrt{AB^3}}\right\},$$

$$dA = -2(p - a)\,dp \text{ en}$$

$$dB = \frac{2a\sqrt{A} \pm 2b(p - a)}{\sqrt{A}}\,dp.$$

Voorts $$-d\frac{a}{\sqrt{B^3}} = \frac{3a\{a\sqrt{A} \pm b(p - a)\}}{\sqrt{AB^5}}\,dp$$

Digitized by Google

en $$\pm d.\frac{b(p-a)}{\sqrt{AB^3}}=$$

$$=\mp\frac{bdp}{\sqrt{AB^3}}\pm a_1(p-a)\left\{\frac{3a\sqrt{A}\pm 3b(p-a)}{\sqrt{A^2B^5}}-\frac{p-a}{\sqrt{A^3B^3}}\right\}dp.$$

Nu is dus

$$\frac{d^2 Sin\tfrac{1}{2}\phi}{dp^2}=r\times\left\{\frac{3\left\{a^2r_1^2-(a^2-b^2)(p-a)^2\pm 2ab(p-a)\sqrt{A}\right\}}{\sqrt{A^2B^5}}\mp\frac{br_1^2}{\sqrt{A^3B^3}}\right\}.$$

Door nu het eerste differentiaalquotiënt gelijk nul te stellen, verkrijgen wij

$$p=a\mp\frac{ar_1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

en deze waarde in het tweede substituërende, daarbij in het oog houdende, dat de bovenste teekens bij elkander behooren, vinden wij, daar

$$\sqrt{A}=\frac{br_1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

en $$\sqrt{B}=\mp r_1+\sqrt{(a^2+b^2)}\text{ wordt,}$$

$$\frac{d^2\,Sin\,\tfrac{1}{2}\phi}{dp^2}=\mp\frac{r(a^2+b^2)\sqrt{(a^2+b^2)}}{b^2r_1\left\{\mp r_1+\sqrt{(a^2+b^2)}\right\}^3}.$$

Het blijkt alzoo, dat bedoelde hoek voor

$$p=a-\frac{ar_1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

een maximum en voor

$$p=a+\frac{ar_1}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

een minimum wordt. Blijkbaar zijn deze de abscissen der punten, waarin de lijn, welke de middelpunten vereenigt, den omtrek des tweeden cirkels snijdt.

XLV. Voorstel. (*)

Door A. Benthem Gz.

Te bewijzen, dat, als men van eenig punt der kegelsnede $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2$, *raaklijnen aan de kegelsnede* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *trekt, de middellijnen, die door de raakpunten gaan, toegevoegde middellijnen zijn.*

(*) Dit en de volgende drie Voorstellen behooren tot de opgaven van het examen voor Master of Arts in Junij 1867 bij de London-University, voorkomende in den London-Almanac van 1868.

Digitized by Google

OPGELOST *door* A. BENTHEM GZ. *en* D. B. WISSELINK.

OPLOSSING *van* A. BENTHEM GZ.

Laat (p,q) en (p_1,q_1) de raakpunten zijn, dan zijn de lijnen die het middelpunt met dezelve vereenigen:

$$y=\frac{q}{p}x \quad \text{en} \quad y=\frac{q_1}{p_1}x.$$

Er moet dus bewezen worden dat

$$Tg\alpha\, Tg\beta \text{ of } \frac{qq_1}{pp_1}=-\frac{b^2}{a^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

is. De vergelijkingen der raaklijnen zelve zijn:

$$\frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}=1 \quad \text{en} \quad \frac{p_1x}{a^2}+\frac{q_1y}{b^2}=1.$$

Voor het snijpunt derzelve vindt men na eene kleine herleiding:

$$x=a^2\,\frac{q_1-q}{pq_1-p_1q} \quad \text{en} \quad y=b^2\,\frac{p_1-p}{p_1q-pq_1};$$

dit snijpunt moet liggen op de ellips:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2;$$

door de substitutie der waarden van x en y in deze laatste vergelijking verkrijgt men:

$$a^2(q_1-q)^2+b^2(p_1-p)^2=2(pq_1-p_1q)^2 \quad . \; . \; (\beta)$$

Voorts liggen de punten (p,q) en (p_1,q_1) op de ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, men heeft dus ook:

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1 \quad \text{en} \quad \frac{p_1^2}{a^2}+\frac{q_1^2}{b^2}=1. \quad . \; . \; . \; (1)$$

of $a^2q^2+b^2p^2=a^2b^2$ en $a^2q_1^2+b^2p_1^2=a^2b^2$, waardoor de vergelijking (β) overgaat in:

$$a^2qq_1+b^2pp_1-a^2b^2=-p^2q_1^2+2pp_1qq_1-p_1^2q^2$$

$$\text{of} \quad \frac{qq_1}{b^2}+\frac{pp_1}{a^2}-1=\frac{-p^2q_1^2+2pp_1qq_1-p_1^2q^2}{a^2b^2} \quad . \; . \; (2)$$

Telt men hierbij het produkt der vergelijkingen (1), dus:

$$1=\frac{p^2p_1^2}{a^4}+\frac{q^2q_1^2}{b^4}+\frac{p^2q_1^2+p_1^2q^2}{a^2b^2},$$

dan vindt men:

$$\frac{qq_1}{b^2}+\frac{pp_1}{a^2}=\frac{p^2q_1^2}{a^4}+\frac{2pp_1qq_1}{a^2b^2}+\frac{q^2q_1^2}{b^4},$$

Digitized by Google

waaraan klaarblijkelijk voldaan wordt door:

$$\frac{qq_1}{b^2}+\frac{pp_1}{a^2}=1 \quad \text{en} \quad \frac{qq_1}{b^2}+\frac{pp_1}{a^2}=0,$$

welke laatste vergelijking geeft: $\frac{qq_1}{pp_1}=-\frac{b^2}{a^2}$.

Substitueert men de 1e vergelijking in (2), dan verkrijgt men $pq_1-p_1q=0$, hetgeen aanduidt dat de inhoud van den driehoek, die den oorsprong en de beide raakpunten tot hoekpunten heeft, gelijk nul is en dus de raakpunten samenvallen, zoodat steeds $\frac{qq_1}{pp_1}=-\frac{b^2}{a^2}$ zal zijn.

XLVI. Voorstel.

Door A. Benthem Gz.

De lengte der assen te bepalen van de doorsnede der ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *met het platte vlak* $lx+my+nz=0$.

Opgelost *door* A. Benthem Gz., D. B. Wisselink *en* W. H. Wisselink.

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

Neemt men het vlak van doorsnede als XY-vlak aan, dan zal in de transformatie-formules:

$$x=x'Cos\psi-y'Sin\psi Cos\theta,\ y=x'Sin\psi+y'Cos\psi Cos\theta \text{ en } z=y'Sin\theta$$

$$Sin\,\psi=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}},\ Cos\,\psi=-\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}},\ Sin\,\theta=\sqrt{\frac{l^2+m^2}{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\text{en } Cos\,\theta=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

zijn.

De substitutie der genoemde transformatie-formules in de gegeven vergelijking der ellipsoïde geeft:

$$x'^2\left(\frac{Cos^2\psi}{a^2}+\frac{Sin^2\psi}{b^2}\right)+y'^2\left(\frac{Sin^2\psi\,Cos^2\theta}{a^2}+\frac{Cos^2\psi\,Cos^2\theta}{b^2}+\frac{Sin^2\theta}{c^2}\right)$$
$$+2x'y'\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)Sin\,\psi\,Cos\,\psi\,Cos\,\theta=1.$$

Schrijft men deze vergelijking in den vorm: $\alpha x'^2+\beta y'^2+2\gamma'xy'=1$, dan zal de lengte der assen uitgedrukt worden door de positieve wortels der vergelijking:

$$(\alpha\beta-\gamma^2)q^4-(\alpha+\beta)q^2+1=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Voor de coëfficienten dezer vergelijking vindt men uit de vorige:

Digitized by Google

$$\alpha\beta - \gamma^2 = \frac{1}{a^2b^2c^2}(c^2\,Cos^2\theta + (b^2\,Cos^2\psi + a^2\,Sin^2\psi)\,Sin^2\theta) \text{ en}$$

$$\alpha + \beta = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)Cos^2\theta + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{Cos^2\psi}{a^2} + \frac{Sin^2\psi}{b^2}\right)Sin^2\theta$$

of na substitutie der boven opgegeven waarden:

$$\alpha\beta - \gamma^2 = \frac{c^2n^2 + b^2m^2 + a^2l^2}{a^2b^2c^2\,(l^2 + m^2 + n^2)} \text{ en}$$

$$\alpha + \beta = \frac{n^2(b^2c^2 + a^2c^2) + (l^2 + m^2)\,a^2b^2 + m^2b^2c^2 + l^2a^2c^2}{a^2b^2c^2\,(l^2 + m^2 + n^2)}$$

$$= \frac{a^2b^2\,(l^2 + m^2) + a^2c^2\,(l^2 + n^2) + b^2c^2\,(m^2 + n^2)}{a^2b^2c^2\,(l^2 + m^2 + n^2)}.$$

De substitutie dezer waarden in de vergelijking (1) geeft:

$$(a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2)\,q^4$$
$$-\left\{a^2b^2\,(l^2 + m^2) + a^2c^2\,(l^2 + n^2) + b^2c^2\,(m^2 + n^2)\right\}q^2$$
$$+ a^2b^2c^2\,(l^2 + m^2 + n^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waaruit dus de positieve waarden van q moeten bepaald worden, die de lengte der assen aangeven.

Aanm. De vergelijking (2) kan na eenige herleiding onder de symmetrische vormen:

$$a^2l^2\,(q^2 - b^2)(q^2 - c^2) + b^2m^2\,(q^2 - a^2)(q^2 - c^2)$$
$$+ c^2n^2\,(q^2 - a^2)(q^2 - b^2) = 0$$

$$\text{en} \quad \frac{a^2l^2}{q^2 - a^2} + \frac{b^2m^2}{q^2 - b^2} + \frac{c^2n^2}{q^2 - c^2} = 0$$

geschreven worden.

XLVII. Voorstel.

Door A. Benthem Gz.

Is $\phi\,(x, y, z) = Ax^2 + A_1y^2 + A_2z^2 + 2Byz + 2B_1zx + 2B_2xy = 1$ *de vergelijking eener conicoïde, dan zal de doorsnede met het vlak* $lx + my + nz = \delta$ *eene gelijkzijdige hyperbel zijn, bijaldien* $\phi\,(l, m, n) = (A + A_1 + A_2)(l^2 + m^2 + n^2)$ *is. Vrage naar het bewijs.*

Opgelost *door* A. Benthem Gz., D. B. Wisselink *en* W. H. Wisselink.

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

Brengt men door den oorsprong een vlak evenwijdig aan het gegeven vlak, dan kan men door middel van de transformatie-formules: $x = x'\,Cos\,\psi - y'\,Sin\,\psi\,Cos\,\theta$,

$$y = x'\,Sin\,\psi + y'\,Cos\,\psi\,Cos\,\theta\,,$$
$$z = y'\,Sin\,\theta\,,$$

Digitized by Google

de doorsnede van de conicoïde met dit nieuwe vlak bepalen; daar voorts alle evenwijdige doorsneden gelijknamige kegelsneden opleveren, behoeven wij dus slechts de voorwaarde te zoeken, waaronder de genoemde doorsnede eene gelijkzijdige hyperbel zal zijn. De substitutie van de aangegeven formules in de vergelijking $\phi(x, y, z) = 1$ geeft:

$$z^2(A\,Cos^2\psi + A_1\,Sin^2\psi + 2B_2\,Cos\psi\,Sin\psi) + y^2(A\,Sin^2\psi\,Cos^2\theta + A_1\,Cos^2\psi\,Cos^2\theta + A_2\,Sin^2\theta - 2B_2\,Sin\psi\,Cos\psi\,Cos^2\theta - 2B_1\,Sin\psi\,Cos\theta\,Sin\theta + 2B\,Cos\psi\,Sin\theta\,Cos\theta) + (2zy)\times(-A\,Sin\psi\,Cos\psi\,Cos\theta + A_1\,Sin\psi\,Cos\psi\,Cos\theta + B_2\,Cos^2\psi\,Cos\theta - B_2\,Sin^2\psi\,Cos\theta + B_1\,Cos\psi\,Sin\theta + B\,Sin\psi\,Sin\theta) = 1,$$

Zal deze vergelijking eene gelijkzijdige hyperbel voorstellen, dan moet de som der coëfficienten van z^2 en $y^2 = 0$ zijn, en dus

$$(A\,Cos^2\theta + A_1)\,Sin^2\psi + (A + A_1\,Cos^2\theta)\,Cos^2\psi + A_2\,Sin^2\theta + 2B_2\,Sin\psi\,Cos\psi\,Sin^2\theta - 2(B_1\,Sin\psi - B\,Cos\psi)\,Sin\theta\,Cos\theta = 0,$$

maar nu is: $Sin\,\psi = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}$, $Cos\,\psi = -\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}$, $Sin\,\theta = \sqrt{\frac{l^2+m^2}{l^2+m^2+n^2}}$ en $Cos\,\theta = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$. Deze waarden, in de gevonden voorwaardes-vergelijking gesubstitueerd, geven, wanneer men $\sqrt{l^2+m^2+n^2} = p$ stelt:

$$\left(\frac{An^2}{p^2} + A_1\right)\frac{l^2}{p^2-n^2} + \left(A + \frac{A_1 n^2}{p^2}\right)\frac{m^2}{p^2-n^2} + \frac{A_2(p^2-n^2)}{p^2} - 2B_2\frac{lm}{p^2} - 2(B_1 l + Bm)\frac{n}{p^2} = 0,$$

of na vermenigvuldiging met p^2 en herleiding:

$$(Al^2n^2 + A_1l^2p^2 + Am^2p^2 + A_1n^2m^2)\frac{1}{p^2-n^2} + A_2(p^2-n^2) = 2Bmn + 2B_1ln + 2B_2lm$$

of $(A + A_1 + A_2)(l^2+m^2+n^2) = Al^2 + A_1m^2 + A_2n^2 + 2Bmn + 2B_1ln + 2B_2lm,$

dat is: $\phi(l, m, n) = (A + A_1 + A_2)(l^2+m^2+n^2)$, waardoor het gestelde bewezen is.

XLVIII. Voorstel.

Door A. Benthem Gz.

Zonder differentiaal-rekening de vergelijking op te maken

Digitized by Google

van den kegel, die eene gegeven ellipsoïde omhult, en welks top in een gegeven punt ligt.

OPGELOST *door* A. BENTHEM GZ., B. D. WISSELINK *en* W. H. WISSELINK.

OPLOSSING *van* A. BENTHEM GZ.

Zij het gegeven punt (α, β, γ) en de ellipsoïde $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$. Laat voorts door dat punt en door een punt (x, y, z) der ellipsoïde eene lijn gaan en zij (x_1, y_1, z_1) eenig ander punt dezer lijn, dan is: $\frac{x-\alpha}{x_1-\alpha} = \frac{y-\beta}{y_1-\beta} = \frac{z-\gamma}{z_1-\gamma}$.

Stel dat elk dezer verhoudingen gelijk zij aan p, dan is: $x = \alpha + p(x_1 - \alpha)$, $y = \beta + p(y_1 - \beta)$ en $z = \gamma + p(z_1 - \gamma)$.

Substitueert men deze waarden in de vergelijking der ellipsoïde, dan verkrijgt men met weglating der accenten:

$$p^2\left\{\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-\gamma}{c}\right)^2\right\}$$
$$+ 2p\left[\frac{\alpha(x-\alpha)}{a^2} + \frac{\beta(y-\beta)}{b^2} + \frac{\gamma(z-\gamma)}{c^2}\right]$$
$$+ \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) = 0.$$

Zal de lijn de ellipsoïde raken, dan moeten de beide waarden van p gelijk zijn; de voorwaarde dat zulks het geval is, geeft voor de vergelijking van den kegel:

$$\left[\frac{\alpha(x-\alpha)}{a^2} + \frac{\beta(y-\beta)}{b^2} + \frac{\gamma(z-\gamma)}{c^2}\right]^2 =$$
$$= \left[\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-\gamma}{c}\right)^2\right] \times \left[\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right]$$

of na herleiding:

$$(x-\alpha)^2(\beta^2c^2 + \gamma^2b^2 - b^2c^2) + (y-\beta)^2(\alpha^2c^2 + \gamma^2a^2 - a^2c^2)$$
$$+ (z-\gamma)^2 \times (\alpha^2b^2 + \beta^2a^2 - a^2b^2) - 2\alpha\beta c^2(x-\alpha)(y-\beta)$$
$$- 2\alpha\gamma b^2(x-\alpha)(z-\gamma) - 2\beta\gamma a^2(y-\beta)(z-\gamma) = 0,$$

waarvoor men kan schrijven:

$$\alpha\beta\gamma\left[\frac{c^2}{\gamma}\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)^2 + \frac{b^2}{\beta}\left(\frac{z}{\gamma} - \frac{x}{\alpha}\right)^2 + \frac{a^2}{\alpha}\left(\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right)^2\right]$$
$$= a^2b^2c^2\left[\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-\gamma}{c}\right)^2\right]$$

Digitized by Google

of ook:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)$$
$$=\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)^2.$$

XLIX. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Een stoffelijk punt beweegt in eene ellips onder de werking van twee aantrekkende krachten in de brandpunten, elke omgekeerd evenredig aan de tweede macht van den afstand. Vrage naar de snelheid in eenig punt der loopbaan.

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Laat het stoffelijk punt, na den boog AP $= s$ te hebben doorloopen, in de rigting der raaklijn PT, eene snelheid v verkregen hebben. Stel den voerstraal FP $= r$, den voerstraal F'P $= r_1$, en den hoek FPT $= \phi$. Verder de halve groote as der ellips $= a$ en de snelheden, welke de aantrekkende krachten, bij eene ongestoorde werking, in eene tijds-eenheid op den afstand a aan het stoffelijk punt kunnen mededeelen, g en g', dan is de versnelling der kracht in F, in de rigting der raaklijn PT $= \frac{a^2 g}{r^2} Cos\,\phi$

en die der kracht in F' $= -\frac{a^2 g'}{r_1^2} Cos\,\phi.$

Men heeft bijgevolg

$$\frac{vdv}{ds}=\frac{a^2 g}{r^2} Cos\,\phi-\frac{a^2 g'}{r_1^2} Cos\,\phi.$$

Of, omdat $ds\,Cos\,\phi = -dr = +dr_1$ is,

$$vdv=-\frac{a^2 g}{r^2}dr-\frac{a^2 g'}{r_1^2}dr_1.$$

Derhalve $$v^2=\frac{2a^2 g}{r}+\frac{2a^2 g'}{r_1}+C.$$

Was nu aanvankelijk

$$v=v_1\ ,\ r=r' \text{ en } r_1=r_1',$$

dan verkrijgt men:

$$v^2=\frac{2a^2 g}{r}+\frac{2a^2 g'}{r_1}-\frac{2a^2 g}{r'}-\frac{2a^2 g'}{r_1'}+v_1^2.$$

Digitized by Google

Stelt men de normale drukking, welke de ellips in het punt P ondergaat, $= D$, de kromtestraal in dat punt $= \rho$ en de massa van het stoffelijk punt $= m$, dan heeft men:

$$D = \frac{ma^2 g}{r^2} \, Sin\, \phi + \frac{ma^2 g'}{r_1^{\,2}} \, Sin\, \phi - \frac{mv^2}{\rho};$$

$$\frac{D\rho}{m} = \left(\frac{g}{r^2} + \frac{g'}{r_1^{\,2}}\right) a^2 \rho \, Sin\, \phi - v^2.$$

Stelt men verder de halve kleine as $= b$, den parameter $= 2p = \frac{2b^2}{b^4}$ en de normaal in het punt $P = n = \frac{b}{a} \sqrt{rr_1}$, dan heeft men:

$$\rho = \frac{n^3}{p^2} = \frac{a^2 n^3}{b^4} \text{ en } Sin\, \phi = \frac{an}{rr_1};$$

bijgevolg $$\rho \, Sin\, \phi = \frac{a^3 n^4}{b^4 rr_1} = \frac{rr_1}{a}.$$

Brengt men deze waarde in bovenstaande vergelijking, dan verkrijgt men achtereenvolgens:

$$\frac{D\rho}{m} = \frac{agr_1}{r} + \frac{ag'r}{r_1} - \frac{2a^2 g}{r} - \frac{2a^2 g'}{r_1} + \frac{2a^2 g}{r'} + \frac{2a^2 g'}{r_1'} - v_1^{\,2};$$

$$= \frac{ag(r_1 - 2a)}{r} + \frac{ag'(r - 2a)}{r_1} + \frac{2a^2 g}{r'} + \frac{2a^2 g'}{r_1'} - v_1^{\,2};$$

$$= -ag - ag' + \frac{2a^2 g}{r'} + \frac{2a^2 g'}{r_1'} - v_1^{\,2}.$$

Nemen wij nu aan, dat er geene normale drukking plaats heeft, dan moet men hebben:

$$v_1^{\,2} = \frac{2a^2 g}{r'} + \frac{2a^2 g'}{r_1'} - ag - ag';$$

weshalve men verkrijgt voor de snelheid in eenig punt van de loopbaan:

$$v^2 = \frac{2a^2 g}{r} + \frac{2a^2 g'}{r_1} - ag - ag' = \frac{ag}{r}(2a - r) + \frac{ag'}{r_1}(2a - r_1) =$$

$$= ag \times \frac{r_1}{r} + ag' \times \frac{r}{r_1}.$$

Wanneer de brandpunten in elkander vallen, gaat de ellips over in eenen cirkel, en men heeft alsdan in elk punt van de loopbaan: $v^2 = ag + ag'$.

Neemt men den afstand $FF' = 2a$, dan gaat de ellips over

Digitized by Google

in eene regte lijn. In dit bijzonder geval kan het bewegend ligchaam blijkbaar verschillende snelheden hebben zonder eenen normalen druk voort te brengen.

Laat in dit geval het stoffelijk punt aanvankelijk in het midden O der lijn FF′ eene snelheid v_1 in de rigting van O naar F hebben en na den tijd t in het punt P zijn gekomen en aldaar eene snelheid v hebben verkregen. Stelt men nu $OP = x$ en bijgevolg $PF = a - x$ en $PF' = a + x$, dan heeft men:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a^2g}{(a-x)^2} - \frac{a^2g'}{(a+x)^2}.$$

Derhalve: $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2a^2g}{a-x} + \frac{2a^2g'}{a+x} - 2ag - 2ag' + v_1^2.$

Neemt men nu $v_1^2 = ag + ag'$, dan verkrijgt men weder:

$$v^2 = ag \times \frac{a+x}{a-x} + ag' \times \frac{a-x}{a+x} = ag \times \frac{r_1}{r} + ag' \times \frac{r}{r_1}.$$

Aanmerking. In het bijzonder geval van $g' = 0$ wordt $v^2 = ag \times \frac{r_1}{r}$. Op het uiteinde der kleine as is dus alsdan de snelheid $= \sqrt{ag}$, en bijgevolg de sector, dien de voerstraal in eene tijdseenheid beschrijft $= \frac{1}{2}b\sqrt{ag}$. Hieruit volgt verder, omdat de inhoud der ellips $= ab\pi$ is, voor den omloops-tijd:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Stelt men de versnelling der kracht in het brandpunt op den eenheids-afstand $= \mu$ en bijgevolg $g = \frac{\mu}{a^2}$, dan verkrijgt men $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$; derhalve $T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}.a^3$.

L. Voorstel.

Door H. van Blanken.

In een verticaal vlak zijn oneindig vele lemniscaten, die een gegeven punt O *tot middelpunt hebben, terwijl de assen langs de lijn* OA *vallen, welke met de verticale lijn* OT *een' hoek van* 45° *maakt. Vrage naar de kromme, die van elke lemniscate een boog* OP *afsnijdt, langs welken een lichaam zonder wrijving in een bepaalden tijd kan glijden.*

Opgelost *door* H. van Blanken.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Laat OP de boog eener lemniscate zijn, welker as met de, vertikaal naar beneden getrokken, lijn OT eenen hoek van 45° maakt. Stel den voerstaal OP $= s$, den hoek POT $= \phi$ en de halve as der lemniscate $= a$, dan is

$$s^2 = a^2 \, Sin\, 2\phi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Stel den boog OP $= s$, den tijd, in welken een lichaam door dien boog is gegleden, $= t$ en de verkregen snelheid $= v$, dan is

$$v = \sqrt{2gz \, Cos\, \phi}$$

en

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{\frac{ds}{d\phi}}{\sqrt{2gz \, Cos\, \phi}} d\phi.$$

Uit vergelijking (a) heeft men

$$z = a\sqrt{Sin\, 2\phi}$$

en

$$ds = \sqrt{(dz^2 + z^2 d\phi^2)} = \frac{a d\phi}{\sqrt{Sin\, 2\phi}}.$$

Door substitutie van deze waarden verkrijgt men:

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{a d\phi}{\sqrt{2gz \, Cos\, \phi \, Sin 2\phi}} = \int_0^{\varphi} \frac{a d\phi}{\sqrt{(2ag \, Cos\phi \, Sin 2\phi \sqrt{Sin 2\phi})}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{4g\sqrt{2}}} \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{Cos^{5/4}\, \phi \, Sin^{\frac{1}{2}}\, \phi}.$$

Men heeft

$$\frac{d\phi}{Cos^{5/4}\, \phi \, Sin^{\frac{1}{2}}\, \phi} = \left(\frac{Sin\, \phi}{Cos\, \phi}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\phi}{Cos^2\, \phi} = \left(\frac{Sin\, \phi}{Cos\, \phi}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{Sin\phi}{Cos\, \phi}\right);$$

bijgevolg

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{Cos^{5/4}\, \phi \, Sin^{\frac{1}{2}}\, \phi} = 4\left(\frac{Sin\, \varphi}{Cos\, \phi}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{4a}{g\sqrt{2}}} \left(\frac{Sin\varphi}{Cos\varphi}\right)^{\frac{1}{4}}; \quad t^4 = \frac{8a^2 \, Sin\varphi}{g^2 \, Cos\, \varphi} = \frac{4a^2 \, Sin 2\varphi}{g^2 \, Cos^2\varphi} = \frac{4z^2}{g^2 \, Cos^2\varphi};$$

$$\therefore z = \tfrac{1}{2} g t^2 \, Cos\, \phi.$$

De gevraagde kromme is dus een cirkel, die $\frac{1}{2}gt^2$ tot middellijn heeft.

Digitized by Google

LI. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Eene dunne gelijkslachtige staaf, die de gedaante van een cirkelsegment heeft, slingert om eene as, welke in het midden van den boog loodregt op de schijf staat, gelijktijdig met een eenvoudigen slinger, die gelijk is aan den straal des cirkels. Vrage naar het aantal graden van den boog van het segment.

Opgelost *door* H. van Blanken.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Laat M het middelpunt des cirkels zijn, AB de koorde van het segment en C het midden van den boog AB. Het zwaartepunt G van het segment ligt dan op den straal MC. Laat gegeven zijn $MC = a$, $MG = h$ en hoek $CMA = CMB = \alpha$.

Men trekke uit het middelpunt naar eenig punt P van het segment de lijn MP, welke de koorde AB in een punt D doorsnijdt, en stelle hoek $CMP = \phi$, $MP = z$ en $MD = z_1 = \frac{a \, Cos\, \alpha}{Cos\, \phi}$. Voorts neme men een gedeelte der schijf, dat de vierkante lengte-eenheid tot oppervlak heeft, tot eenheid der massa en stelle de massa van de schijf $= m$ en het moment van traagheid ten opzigte van eene as, die in M loodregt op het vlak des cirkels staat, $= mk^2$, dan heeft men:

$$mh = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{z_1}^{a} z d\phi dz \,.\, z\, Cos\, \phi = \frac{1}{3}\int_{-\alpha}^{+\alpha} (a^3 - z_1{}^3)\, Cos\, \phi\, d\phi$$

$$= \frac{1}{3} a^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(Cos\, \phi - \frac{Cos^3 \alpha}{Cos^2 \phi} \right) d\phi$$

$$= \frac{2}{3} a^3 \left(Sin\, \alpha - Cos^3 \alpha\, Tang\, \alpha \right) = \frac{2}{3} a^3\, Sin^3 \alpha.$$

$$mk^2 = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{z_1}^{a} z d\phi dz \,.\, z^2 = \frac{1}{4}\int_{-\alpha}^{+\alpha} (z^4 - z_1{}^4)\, d\phi$$

$$= \frac{1}{4} a^4 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(1 - \frac{Cos^4 \alpha}{Cos^4 \phi} \right) d\phi.$$

Neemt men nu in aanmerking, dat $\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{Cos^4 \phi} = tg\phi + \frac{1}{3} tg^3 \phi$ is, dan verkrijgt men:

Digitized by Google

$$mk^2 = \frac{1}{2} a^4 \left(\alpha - Sin\, \alpha\, Cos^2 \alpha - \frac{1}{3} Sin^3 \alpha\, Cos\, \alpha \right)$$

$$= \frac{1}{2} a^4 \times \left(\alpha - \frac{1}{3} Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha\, (1 + 2\, Cos^2 \alpha) \right).$$

De lengte l van den eenvoudigen slinger, die gelijktijdig met de schijf slingert, is dus:

$$l = \frac{mk^2}{mh} = \frac{1}{4} a \times \frac{3\alpha - Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha\, (1 + 2\, Cos^2 \alpha)}{Sin^2 \alpha}.$$

Wanneer men in deze uitdrukking $Sin\, \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120}$ en $Cos\, \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}$ neemt, dan verkrijgt men:

$l = \left(1 - \frac{1}{10} \alpha^2 + \ldots\right)$. Hieruit blijkt, dat l, voor eene oneindig kleine waarde van α, $= a$ wordt, en aanvankelijk vermindert, terwijl α aangroeit.

Voor $\alpha = 60°$ wordt $l = \frac{1}{4} a \times \frac{8\pi - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 0{,}9592a$ en voor $\alpha = 90°$ wordt $l = \frac{3a\pi}{8} = 1{,}1781a$.

Hieruit blijkt, dat, voor eene waarde van α tusschen 60° en 90°, $l = a$ wordt. In dat bijzonder geval ligt het slingerpunt in het midden C van den boog, weshalve de slingertijd alsdan niet zoude veranderen, zoo men de schijf liet slingeren om eene as, die in C loodregt op het vlak des cirkels staat.

Voor $l = a$ wordt bovenstaande vergelijking

$$3\alpha - Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha\, (1 + 2\, Cos^2 \alpha) - 4\, Sin^3 \alpha = 0.$$

Deze vergelijking kan men, inachtnemende dat $2\, Cos^2 \alpha = 1 + Cos\, 2\alpha$ en $4\, Sin^3 \alpha = 3\, Sin\, \alpha - Sin\, 3\alpha$ is, gemakkelijk herleiden tot de volgende:

$$12\, (\alpha - Sin\, \alpha) - 4\, (Sin\, 2\alpha - Sin\, 3\alpha) - Sin\, 4\alpha = 0.$$

Wij weten reeds, dat aan deze vergelijking voldoet eene waarde van α tusschen 60° en 90°. Het blijkt bij beproeving spoedig, dat die waarde gelegen is tusschen 73° en 74°. Stelt men nu in deelen van den straal $\alpha = \frac{73}{180} \pi + x$, dan is x eene kleine breuk, zoodat men met eene geringe verwaarloozing heeft $Cos\, x = Cos\, 2x = Cos\, 3x = Cos\, 4x = 1$,

Digitized by Google

$Sin\, x = x$, $Sin\, 2x = 2x$, $Sin\, 3x = 3x$ en $Sin\, 4x = 4x$. Men heeft daarom nagenoeg $\alpha = 1{,}27409 + x$, $Sin\, \alpha = 0{,}95630 + 0{,}29238x$, $Sin\, 2\alpha = 0{,}55919 - 1{,}65808x$, $Sin 3\alpha = -0{,}62932 - 2{,}33145x$ en $Sin\, 4\alpha = -0{,}92718 + 1{,}49844x$.

Door substitutie van deze waarden verkrijgt men $4{,}29953x = 0{,}01345$; dus $x = 0{,}00313 = 10'45''$, en bijgevolg nagenoeg boog ACB $= 146°21'30''$.

LII. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Eene dunne gelijkslachtige staaf volbrengt, aan een uiteinde opgehangen, in een verticaal vlak eene slingering in n *secunden. Vervolgens wordt zij tot een cirkelboog gebogen en volbrengt dan, in het midden ondersteund, wederom in een verticaal vlak in* n *secunden eene slingering. Vrage naar het aantal graden van den cirkelboog.*

Opgelost *door* H. van Blanken.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Laat M het middelpunt des cirkels en C het midden van den cirkelboog ACB zijn. Het zwaartepunt G van dien boog ligt blijkbaar op den straal MC. Stel MC $= a$, GC $= h$ en hoek CMA $=$ hoek CMB $= \alpha$.

Men trekke naar eenig punt P van den boog AB den straal MP en de koorde CP, en stelle hoek CMP $= \phi$, boog CP $= s = a\phi$ en koorde CP $= z = 2a\, Sin\, \frac{1}{2}\phi$. Voorts stelle men, de lengte-eenheid der staaf tot massa-eenheid aannemende, de massa van den boog AB $= m$ en het moment van traagheid ten opzigte van eene as, die in C loodregt op het cirkelvlak staat, $= mk^2$, dan heeft men

$$mh = \int_{-\alpha}^{+\alpha} (a - a\, Cos\, \phi) \frac{ds}{d\phi} d\phi = 2a^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} Sin^2\, \tfrac{1}{2}\phi\, d\phi,$$

$$mk^2 = \int_{-\alpha}^{+\alpha} z^2 \frac{ds}{d\phi} d\phi = 4a^3 \int_{-\alpha}^{+\alpha} Sin^2\, \tfrac{1}{2}\phi\, d\phi.$$

De lengte l van den eenvoudigen slinger, die gelijktijdig met den boog slingert, is dus:

$$l = \frac{mk^2}{mh} = 2a = \text{de middellijn des cirkels.}$$

Stelt men de lengte van de staaf $= x$, dan is de lengte

Digitized by Google

van den eenvoudigen slinger, die met de staaf gelijktijdig slingert, $\frac{2}{3}x = l = 2a$; bijgevolg $x = 3a$.

Het aantal graden van den boog AB is dus $= \frac{3}{\pi} \times 180°$ $= 171° 53' 14''$.

LIII. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Een gelijkslachtig viervlak rust met een hoekpunt A *op een horizontaal vlak, terwijl de ribbe* AB *een verticalen stand heeft, en wordt nu gedurende* t *seconden door eene op het hoekpunt* A *werkende horizontale kracht zoo voortgeschoven, dat de ribbe* AB *den verticalen stand behoudt. Vrage naar den doorgeloopen weg.*

Opgelost *door* H. van Blanken.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Men trekke uit het hoekpunt A naar het zwaartepunt G de lijn AG, en stelle AG $= l$, hoek BAG $= \alpha$, de massa van het viervlak $= m$ en de horizontale kracht $=$ K.

Op het viervlak werkt in het zwaartepunt G eene kracht mg van boven naar beneden. Verplaatst men deze kracht evenwijdig aan zichzelve naar het hoekpunt A, dan ontstaat er een koppel, dat $mgl \, Sin \, \alpha$ tot moment heeft, en waarvan de as loodregt op het vlak GAB staat. Door de horizontale kracht K, welke in het hoekpunt A werkt, evenwijdig aan zichzelve naar zwaartepunt G te verplaatsen, verkrijgt men weder een koppel, waarvan de werking, omdat er geene draaiing plaats heeft, gelijk en tegenovergesteld is aan die van het vorige. De as van dit koppel moet daarom ook loodrecht op het vlak GAB staan, en het moment $Kl \, Cos \, \alpha = mgl \, Sin \, \alpha$ zijn. Hieruit volgt $K = mg \, tg \, \alpha$. Deze kracht werkt nu in het zwaartepunt in de richting der projectie van AG op het horizontale vlak.

Daar het viervlak in het punt A op het horizontale vlak drukt, zal er bij de beweging nog eene wrijving W kunnen ontstaan. Dit geeft echter geene wezenlijke verandering. De kracht K moet dan slechts zooveel grooter genomen worden, dat de in het zwaartepunt werkende kracht $K - W = mg \, tg \, \alpha$ blijft.

Digitized by Google

Stelt men nu den weg, langs welken het viervlak in t seconden is geschoven, $= x$, dan is

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\,tg\,\alpha;\ \text{bijgevolg}\ \frac{dx}{dt} = gt\,tg\,\alpha\ \text{en}\ x = \tfrac{1}{2}gt^2 tg\alpha.$$

Stelt men de ribbe van het viervlak $= a$ en de hoogte $= h$, dan is $h = \frac{1}{3}a\sqrt{6} = a\,Cos\,\alpha$; derhalve $Cos\,\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ en $tg\,\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Hierdoor verkrijgt men $x = \frac{gt^2}{2\sqrt{2}}$.

LIV. VOORSTEL. *)

Door C. J. MATTHES.

Uit ieder hoekpunt van een driehoek zijn door twee gegeven punten lijnen getrokken. Te bewijzen: dat de zes snijpunten dier verbindingslijnen met de overstaande zijden des driehoeks aan den omtrek eener kegelsnede liggen.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Laat de gegeven punten P en Q zijn (f, g, h) en (f', g', h'), dan heeft men voor de punten:

$$A_1,\ \frac{\beta}{g} = \frac{\gamma}{h};\quad A_2,\ \frac{\beta}{g'} = \frac{\gamma}{h'},\ \text{alsmede}\ \alpha = 0;$$

$$B_1,\ \frac{\gamma}{h} = \frac{\alpha}{f};\quad B_2,\ \frac{\gamma}{h'} = \frac{\alpha}{f'},\quad \text{»}\quad \beta = 0;$$

$$C_1,\ \frac{\alpha}{f} = \frac{\beta}{g};\quad C_2,\ \frac{\alpha}{f'} = \frac{\beta}{g'},\quad \text{»}\quad \gamma = 0.$$

De onderstelling, dat die zes punten aan den omtrek eener kegelsnede zouden liggen, brengt mede dat zij voldoen aan de algemeene vergelijking

$$u\alpha^2 + v\beta^2 + w\gamma^2 + 2u'\beta\gamma + 2v'\gamma\alpha + 2w'\alpha\beta = 0;$$

zoodat

$$\begin{aligned} g^2v + h^2w + 2ghu' &= 0,\\ g'^2v + h'^2w + 2g'h'u' &= 0,\\ f^2u + h^2w + 2fhv' &= 0,\\ f'^2u + h'^2w + 2f'h'v' &= 0,\\ f^2u + g^2v + 2fgw' &= 0,\\ f'^2u + g'^2v + 2f'g'w' &= 0. \end{aligned}$$

Men heeft dus alleen te bewijzen, dat de eliminatie der zes betrekkelijke waardijen van u, v, w, u', v', w', uit die zes

*) Dit en de volgende zes voorstellen zijn ontleend aan FERRERS *Nieuwere Meetkunde*, voorbeelden 28, 29, 30, 31, 32, 33 en 34.

Digitized by Google

vergelijkingen eene identische vergelijking geeft, met andere woorden: dat de determinante

$$D = \begin{vmatrix} 0 & g^2 & h^2 & 2gh & 0 & 0 \\ 0 & g'^2 & h'^2 & 2g'h' & 0 & 0 \\ f^2 & 0 & h^2 & 0 & 2fh & 0 \\ f'^2 & 0 & h'^2 & 0 & 2f'h' & 0 \\ f^2 & g^2 & 0 & 0 & 0 & 2fg \\ f'^2 & g'^2 & 0 & 0 & 0 & 2f'g' \end{vmatrix}$$

$$= -8 \begin{vmatrix} 0 & 0 & gh & h^2 & g^2 & 0 \\ 0 & 0 & g'h' & h'^2 & g'^2 & 0 \\ 0 & fh & 0 & h^2 & 0 & f^2 \\ 0 & f'h' & 0 & h'^2 & 0 & f'^2 \\ fg & 0 & 0 & 0 & g^2 & f^2 \\ f'g' & 0 & 0 & 0 & g'^2 & f'^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ is,}$$

hetgene men door herleiding werkelijk bevindt het geva te zijn.

LV. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Een kegelsnede is beschreven welke drie gegeven rechte lijnen aanraakt en door een gegeven punt gaat. Te bewijzen: dat de meetkundige plaats van haar middelpunt weér eene kegelsnede is. Voorts, in meetkundige taal, de ligging van het bewuste punt met betrekking tot de rechte lijnen aan te wijzen, bijaldien de meetkundige plaats van het middelpunt een cirkel is. Eindelijk de meetkundige plaats van gezegd punt te vinden, opdat de meetkundige plaats van het middelpunt eene gelijkzijdige hyperbel zij.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Als men de drie gegeven rechte lijnen als zijden aanmerkt van den coördinaten- of assendriehoek, is de vergelijking der kegelsnede die ze aanraakt:

$$L^2\alpha^2 + M^2\beta^2 + N^2\gamma^2 - 2MN\beta\gamma - 2NL\gamma\alpha - 2LM\alpha\beta = 0.$$

Voor de coördinaten van het centrum heeft men, (zie Ferrers, bl. 33,)

$$\frac{(\alpha)}{Nb + Mc} = \frac{(\beta)}{Lc + Na} = \frac{(\gamma)}{Ma + Lb},$$

bijgevolg

Digitized by Google

$$\frac{L}{a[b(\beta)+c(\gamma)-a(\alpha)]}=\frac{M}{b[c(\gamma)+a(\alpha)-b(\beta)]}=\frac{N}{c[a(\alpha)+b(\beta)-c(\gamma)]}.$$

Deze waarden gesubstitueerd en tevens voor α, β, γ de coördinaten f, g, h van het gegeven punt gesteld hebbende, vindt men, met weglating der haakjes, voor de meetkundige plaats van het centrum:

$$\begin{aligned}
&\alpha^2a^2(a^2f^2+b^2g^2+c^2h^2-2bcgh+2cahf+2abfg)\\
&+\beta^2b^2(a^2f^2+b^2g^2+c^2h^2+2bcgh-2cahf+2abfg)\\
&+\gamma^2c^2(a^2f^2+b^2g^2+c^2h^2+2bcgh+2cahf-2abfg)\\
&+2\beta\gamma bc(a^2f^2-b^2g^2-c^2h^2-2bcgh)\\
&+2\gamma\alpha ca(-a^2f^2+b^2g^2-c^2h^2-2cahf)\\
&+2\alpha\beta ab(-a^2f^2-b^2g^2+c^2h^2-2abfg)=0;
\end{aligned}$$

dus eene kegelsnede.

Zal die kegelsnede een cirkel zijn, dan moet voldaan worden aan de voorwaardesvergelijkingen, (zie FERRERS, bl 75, § 84.)

$$wb^2+vc^2-2u'bc=uc^2+wa^2-2v'ca=va^2+ub^2-2w'ab,$$

dat is, in dit geval, aan:

$$b^2c^2(bg+ch)^2=c^2a^2(ch+af)^2=a^2b^2(af+bg)^2.$$

Hierin kan worden voorzien, maar ook alleen, op *vier* verschillende wijzen, door te stellen:

$$\begin{aligned}
&bc(bg+ch)=ca(ch+af)=ab(af+bg),\\
\text{of } &-bc(bg+ch)=ca(ch+af)=ab(af+bg),\\
\text{of } &bc(bg+ch)=-ca(ch+af)=ab(af+bg),\\
\text{of } &bc(bg+ch)=ca(ch+af)=-ab(af+bg);
\end{aligned}$$

zoodat vier punten aan het vereischte beantwoorden, waarvoor men na eene lichte herleiding vindt:

$$\begin{aligned}
(f,\ g,\ h) &::\left(\frac{1}{Sin^2\frac{1}{2}A},\ \frac{1}{Sin^2\frac{1}{2}B},\ \frac{1}{Sin^2\frac{1}{2}C}\right)\\
(f_1,\ g_1,\ h_1) &::\left(\frac{1}{Sin^2\frac{1}{2}A},\ -\frac{1}{Cos^2\frac{1}{2}B},\ -\frac{1}{Cos^2\frac{1}{2}C}\right)\\
(f_2,\ g_2,\ h_2) &::\left(-\frac{1}{Cos^2\frac{1}{2}A},\ \frac{1}{Sin^2\frac{1}{2}B},\ -\frac{1}{Cos^2\frac{1}{2}C}\right)\\
(f_3,\ g_3,\ h_3) &::\left(-\frac{1}{Cos^2\frac{1}{2}A},\ -\frac{1}{Cos^2\frac{1}{2}B},\ \frac{1}{Sin^2\frac{1}{2}C}\right)
\end{aligned}$$

of wel, door combinatie met $af+bg+ch=2l$, als men d_1, d_2, d_3, r, r_1, r_2, r_3 voor de hoogte-loodlijnen uit A, B, C en voor de stralen der in- en aangeschreven cirkels stelt:

Digitized by Google

$$f = \frac{d_1}{r_1} r\,,\quad g = \frac{d_2}{r_2} r\,,\quad h = \frac{d_3}{r_3} r\,;$$

$$f_1 = \frac{d_1}{r} r_1\,,\quad g_1 = -\frac{d_2}{r_3} r_1\,,\quad h_1 = -\frac{d_3}{r_2} r_1\,;$$

$$f_2 = -\frac{d_1}{r_3} r_2\,,\quad g_2 = \frac{d_2}{r} r_2\,,\quad h_2 = -\frac{d_3}{r_1} r_2\,;$$

$$f_3 = -\frac{d_1}{r_2} r_3\,,\quad g_3 = -\frac{d_2}{r_1} r_3\,,\quad h_3 = \frac{d_3}{r} r_3\,.$$

Moet de meetkundige plaats der middelpunten eene gelijkzijdige hyperbel zijn, zoo dient, (zie FERRERS, bl. 75, § 83,) aan de voorwaardesvergelijking

$$u + v + w - 2u' \cos A - 2v' \cos B - 2w' \cos C = 0$$

voldaan te worden, welke, na substitutie der waarden van u, v, w, u', v', w', geeft

$$a^4 f^2 + b^4 g^2 + c^4 h^2 + 2b^2c^2 \cos A.gh + 2c^2a^2 \cos B.fh$$
$$+ 2a^2b^2 \cos C.fg = 0;$$

derhalve voor de meetkundige plaats van het punt (f, g, h) wederom eene kegelsnede.

LVI. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Vier cirkels zijn zoo beschreven, dat elk van de vier driehoeken, gevormd door drie van vier gegeven rechte lijnen, weêrkeerig gekoppeld is met opzicht tot een hunner. Te bewijzen, dat de vier cirkels eene gemeenschappelijke chordaal hebben.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Laat (zie fig. 18) AB, BC, CA en EDF de vier gegeven lijnen zijn, dan neme men △ ABC voor assendriehoek, en zij $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ de vergelijking van EDF, waardoor men terstond voor een van de bewuste cirkels verkrijgt, (zie FERRERS, bl. 42, § 48,)

$$a^2(b^2+c^2-a^2)\alpha^2 + b^2(c^2+a^2-b^2)\beta^2 + c^2(a^2+b^2-c^2)\gamma^2 = 0, \quad . (1)$$

terwijl de coördinaten der punten D, E, F zullen zijn

$$\alpha = 0,\ \frac{\beta}{n} = -\frac{\gamma}{m};$$

$$\beta = 0,\ \frac{\gamma}{l} = -\frac{\alpha}{n};\ \gamma = 0,\ \frac{\alpha}{m} = -\frac{\beta}{l}. \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

Digitized by Google

Laat nu van den tweeden cirkel, waartoe de driehoek AFE gekoppeld is, de vergelijking in 't algemeen zijn:

$$u\alpha^2 + v\beta^2 + w\gamma^2 + 2u'\beta\gamma + 2v'\gamma\alpha + 2w'\alpha\beta = 0,$$

dan is E ten opzigte van dien cirkel de pool van AF ($\gamma = 0$)
en F « « « « « « « « AE ($\beta = 0$).
Volgens FERRERS, bl. 69, zijn nu voor de poollijn (p, q, r) van een punt (f, g, h)

$$\frac{uf + w'g + v'h}{p} = \frac{w'f + vg + u'h}{q} = \frac{v'f + u'g + wh}{r}, \quad (3)$$

dus hebben wij in dit geval

voor E en AF: $un - v'l = 0$, $w'n - u'l = 0$,
alsmede voor F en AE: $um - w'l = 0$, $v'm - u'l = 0$;
waaruit volgt $u'l = v'm = w'n$ . . . . . (4)

en $u' = \frac{mn}{l^2}u$, $v' = \frac{nl}{l^2}u$, $w' = \frac{lm}{l^2}u$. . . . . (5)

Zij nu $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$ de vergelijking der onderstelde chordaal, dan moet, (zie FERRERS, bl. 77 en vg.)

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2)\alpha^2 + b^2(c^2 + a^2 - b^2)\beta^2 + c^2(a^2 + b^2 - c^2)\gamma^2$$
$$+ k(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

de vergelijking van den tweeden cirkel kunnen voorstellen, of wel na herleiding:

$$[a^2(b^2 + c^2 - a^2) + ak\lambda]\alpha^2 + [b^2(c^2 + a^2 - b^2) + bk\mu]\beta^2$$
$$+ [c^2(a^2 + b^2 - c^2) + ck\nu]\gamma^2 + (b\nu + c\mu)k\beta\gamma + (c\lambda + a\nu)k\gamma\alpha$$
$$+ (a\mu + b\lambda)k\alpha\beta = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

waaruit terstond volgt wegens $u'l = v'm = w'n$ (4)

$$(b\nu + c\mu)l = (c\lambda + a\nu)m = (a\mu + b\lambda)n,$$

derhalve voor de chordaal:

$$\frac{\lambda}{(bnl + clm - amn)a} = \frac{\mu}{(clm + amn - bnl)b} = \frac{\nu}{(amn + bnl - clm)c}. \quad (8)$$

bijgevolg

$$(bnl + clm - amn)a\alpha + (clm + amn - bnl)b\beta$$
$$+ (amn + bnl - clm)c\gamma = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Voor den derden cirkel, behoorende bij $\triangle$ BDF, bijv. heeft men geheel op dezelfde wijs uit vergg. (3):

voor D en BF . . . $w'n - v'm = 0$, $vn - u'm = 0$;
» F » BD . . . $w'm - vl = 0$, $v'm - u'l = 0$.
bijgevolg evenzoo $u'l = v'm = w'n$

Digitized by Google

en $$u' = \frac{mn}{m^2}v,\quad v' = \frac{nl}{m^2}v,\quad w' = \frac{lm}{m^2}v \quad . \; . \; . \; . (10)$$

Het blijkt derhalve, dat men ook voor den eersten en derden cirkel dezelfde chordaal moet vinden als voor den eersten en tweeden; voor den vierden cirkel eindelijk kan de uitkomst geen andere zijn.

Ter nadere bevestiging willen wij de vergelijking van den tweeden cirkel uitbrengen. Omdat het een cirkel is, hebben wij het navolgende verband:

$$wb^2 + vc^2 - 2w'bc = uc^2 + wa^2 - 2v'ca = va^2 + ub^2 - 2w'ab \; . (11)$$

Substitueert men nu de waarden in u van u', v', w' (5) in de algemeene vergelijking der kegelsnede, benevens in de vergelijkingen die haar als cirkel bepalen, zoo verkrijgt men de volgende vergelijkingen in u, v, w:

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha^2 l^2 + 2(\beta\gamma mn + \gamma anl + \alpha\beta lm)]u + \beta^2 l^2 v + \gamma^2 l^2 w = 0, \\ (c^2 l^2 - 2canl + 2bcmn)u - c^2 l^2 v + (a^2 - b^2) l^2 w = 0, \\ (b^2 l^2 - 2abln + 2bcmn)u + (a^2 - c^2) l^2 v - b^2 l^2 w = 0. \end{array}\right\} . \; (12)$$

Worden daaruit u, v, w geëlimineerd, zoo heeft men in de determinante

$$l^4 \begin{vmatrix} \alpha^2 l^2 + 2(\beta\gamma mn + \gamma anl + \alpha\beta lm), & \beta^2, & \gamma \\ c^2 l^2 - 2canl + 2bcmn, & -c^2, & a^2 - b^2 \\ b^2 l^2 - 2abln + 2bcmn, & a^2 - c^2, & -b^2 \end{vmatrix} = 0. \; . (13)$$

de vergelijking van den tweeden cirkel, welke na herleiding wordt:

$$\begin{aligned} & a^2(b^2 + c^2 - a^2) l^2 \alpha^2 \\ & + [b^2(c^2 + a^2 - b^2) l^2 - 2ab(a^2 - b^2) lm + 2abcn(am - bl)] \beta^2 \\ & + [c^2(a^2 + b^2 - c^2) l^2 - 2ac(a^2 - c^2) ln + 2abcm(an - cl)] \gamma^2 \\ & + 2(\beta\gamma mn + \gamma anl + \alpha\beta lm) a^2 (b^2 + c^2 - a^2) = 0. \; (14) \end{aligned}$$

Deze zelfde vergelijking komt naar behooren voor den dag, als men in verg. (7) voor λ, μ, ν, k deze waarden stelt:

$$\lambda = (bnl + clm - amn)a, \mu = (clm + amn - bnl)b, \nu = (amn + bml - clm)c$$

$$k = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{(am - bl)(an - cl)}.$$

Voor den derden en vierden cirkel had men te nemen:

$$k' = \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{(bn - cm)(bl - am)},\quad k'' = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{(cl - an)(cm - bn)}.$$

Digitized by Google

LVII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Als A, B, C, A′, B′, C′ *zes punten zijn zoodanig, dat de rechte lijnen* B′C′, C′A′, A′B′ *de verschillende poollijnen van de punten* A, B, C *zijn met betrekking tot eene gegeven kegelsnede, te bewijzen: dat de drie rechte lijnen* AA′, BB′, CC′ *één punt gemeen hebben, en dat de snijpunten van* BC *met* B′C′, *van* CA *met* C′A′, *van* AB *met* A′B′ *in ééne rechte lijn gelegen zijn.*

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Als u, v, w, u', v', w' de constanten van de algemeene trilineaire vergelijking eener kegelsnede zijn, en van eenig punt (f, g, h) de poollijn is (l, m, n), dan bestaat er dit verband, (zie Ferrers, bl. 69):

$$\frac{uf + w'g + v'h}{l} = \frac{w'f + vg + u'h}{m} = \frac{v'f + u'g + wh}{n},$$

waaruit volgt, als men ABC tot assendriehoek neemt, voor de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{van B'C'} & u\alpha + w'\beta + v'\gamma = 0 \\ \text{» C'A'} & w'\alpha + v\beta + u'\gamma = 0 \\ \text{» A'B'} & v'\alpha + u'\beta + w\gamma = 0 \end{array}\right\} ; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

voorts voor de coördinaten

$$\left.\begin{array}{ll} \text{van A'} & \frac{\alpha}{U} = \frac{\beta}{W'} = \frac{\gamma}{V'} \\ \text{» B'} & \frac{\alpha}{W'} = \frac{\beta}{V} = \frac{\gamma}{U'} \\ \text{» C'} & \frac{\alpha}{V'} = \frac{\beta}{U'} = \frac{\gamma}{W} \end{array}\right\} , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

zijnde $U = vw - u'^2$, $V = wu - v'^2$, $W = uv - w'^2$,
$U' = v'w' - uu'$, $V' = w'u' - vv'$, $W' = u'v' - ww'$.

Mitsdien zijn de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{van AA'} & V'\beta - W'\gamma = 0 \\ \text{» BB'} & U'\alpha - W'\gamma = 0 \\ \text{» CC'} & U'\alpha - V'\beta = 0 \end{array}\right\} , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waaruit terstond blijkt dat zij allen door één punt gaan, te weten:

$$(\alpha, \beta, \gamma) :: \left(\frac{1}{U'}, \frac{1}{V'}, \frac{1}{W'}\right).$$

Digitized by Google

Voor de doorsnijdingspunten van

$$\left.\begin{array}{lll} \text{BC en B'C' vindt men} & \alpha_1 = 0\,, & \dfrac{\beta_1}{v'} + \dfrac{\gamma_1}{w'} = 0 \\ \text{CA en C'A'} \quad » \quad » & \beta_2 = 0\,, & \dfrac{\gamma_2}{w'} + \dfrac{\alpha_2}{u'} = 0 \\ \text{AB en A'B'} \quad » \quad » & \gamma_3 = 0\,, & \dfrac{\alpha_3}{u'} + \dfrac{\beta_3}{v'} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

die blijkbaar allen gelegen zijn op de rechte lijn, welke tot vergelijking heeft: $\dfrac{\alpha}{u'} + \dfrac{\beta}{v'} + \dfrac{\gamma}{w'} = 0.$

LVIII. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Bijaldien twee driehoeken eener zelfde kegelsnede omschreven zijn, liggen hunne hoekpunten aan den omtrek van eene andere kegelsnede. Vrage naar het bewijs.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Zijn (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) de drie lijnen, die behalve de zijden van den assendriehoek de kegelsnede aanraken, dan valt er te bewijzen dat hare doorsnijdingspunten $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ met de hoekpunten A, B, C aan den omtrek eener zelfde kegelsnede liggen.

Twee van die punten bepalen met A, B, C eene kegelsnede, de vraag is dus maar, of het derde punt ook daarin ligt. Daartoe wordt vereischt dat voldaan worde aan de voorwaardesvergelijking door eliminatie van de onderstelde constanten der kegelsnede, λ, μ, ν, verkregen, (zie FERRERS, bl. 27,) uit

$$\frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\mu}{\beta_1} + \frac{\nu}{\gamma_1} = 0\,,\ \frac{\lambda}{\alpha_2} + \frac{\mu}{\beta_2} + \frac{\nu}{\gamma_2} = 0\,,\ \frac{\lambda}{\alpha_3} + \frac{\mu}{\beta_3} + \frac{\nu}{\gamma_3} = 0,$$

dat is aan:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\alpha_1}, & \dfrac{1}{\beta_1}, & \dfrac{1}{\gamma_1} \\ \dfrac{1}{\alpha_2}, & \dfrac{1}{\beta_2}, & \dfrac{1}{\gamma_2} \\ \dfrac{1}{\alpha_3}, & \dfrac{1}{\beta_3}, & \dfrac{1}{\gamma_3} \end{vmatrix} = 0$$

of

$$\alpha_2\alpha_3\,\beta_1\gamma_1\,(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_3\alpha_1\,\beta_2\gamma_2\,(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)$$
$$+ \alpha_1\alpha_2\,\beta_3\gamma_3\,(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0. \quad \ldots\ldots (1)$$

Digitized by Google

Zullen de drie bewuste lijnen de ingeschreven kegelsnede raken, zoo moet, (zie FERRERS, bl. 34,) voldaan worden aan de navolgende vergelijkingen:

$$\frac{L}{l_1}+\frac{M}{m_1}+\frac{N}{n_1}=0,\quad \frac{L}{l_2}+\frac{M}{m_2}+\frac{N}{n_2}=0,\quad \frac{L}{l_3}+\frac{M}{m_3}+\frac{N}{n_3}=0;$$

welke door eliminatie van L, M, N, opleveren de vergelijking:

$$l_2l_3m_1n_1(m_2n_3-m_3n_2)+l_3l_1m_2n_2(m_3n_1-m_1n_3)$$
$$+l_1l_2m_3n_3(m_1n_2-m_2n_1)=0\ldots\ldots\ (2)$$

Het komt er dus op aan te betoogen, dat verg. (1) dezelfde is als verg. (2) en daarin kan worden getransformeerd. Te dien einde zij herinnerd, dat wij, (zie FERRERS, bl. 9, § 9,) hebben:

$$\frac{\alpha_1}{m_2n_3-m_3n_2}=\frac{\beta_1}{n_2l_3-n_3l_2}=\frac{\gamma_1}{l_2m_3-l_3m_2},$$
$$\frac{\alpha_2}{m_3n_1-m_1n_3}=\frac{\beta_2}{n_3l_1-n_1l_3}=\frac{\gamma_2}{l_3m_1-l_1m_3},$$
$$\frac{\alpha_3}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{\beta_3}{n_1l_2-n_2l_1}=\frac{\gamma_3}{l_1m_2-l_2m_1};$$

in aanmerking waarvan vergelijking (1) wordt:

$$(m_3n_1-m_1n_3)(m_1n_2-m_2n_1)(n_2l_3-n_3l_2)(l_2m_3-l_3m_2)\times$$
$$\{(n_3l_1-n_1l_3)(l_1m_2-l_2m_1)-(n_1l_2-n_2l_1)(l_3m_1-l_1m_3)\}$$
$$+(m_1n_2-m_2n_1)(m_2n_3-m_3n_2)(n_3l_1-n_1l_3)(l_3m_1-l_1m_3)\times$$
$$\{(n_1l_2-n_2l_1)(l_2m_3-l_3m_2)-(n_2l_3-n_3l_2)(l_1m_2-l_2m_1)\}$$
$$+(m_2n_3-m_3n_2)(m_3n_1-m_1n_3)(n_1l_2-n_2l_1)(l_1m_2-l_2m_1)\times$$
$$\{(n_2l_3-n_3l_2)(l_3m_1-l_1m_3)-(n_3l_1-n_1l_3)(l_2m_3-l_3m_2)\}=0.$$

Stelt men

$$l_1m_2n_3-l_1m_3n_2+l_2m_3n_1-l_2m_1n_3+l_3m_1n_2-l_3m_2n_1=P,$$

dan blijkt bij herleiding, dat de laatste factor van elken van de drie termen der verkregen vergelijking respectivelijk de waarde heeft van l_1P, l_2P, l_3P. Men zal dus door P kunnen verkleinen, en men heeft alsdan:

$$\left.\begin{array}{l}(m_3n_1-m_1n_3)(m_1n_2-m_2n_1)(n_2l_3-n_3l_2)(l_2m_3-l_3m_2)l_1\\+(m_1n_2-m_2n_1)(m_2n_3-m_3n_2)(n_3l_1-n_1l_3)(l_3m_1-l_1m_3)l_2\\+(m_2n_3-m_3n_2)(m_3n_1-m_1n_3)(n_1l_2-n_2l_1)(l_1m_2-l_2m_1)l_3\end{array}\right\}=0.$$

Bij herleiding en ontwikkeling dezer vergelijking, bevindt men dat zij nogmaals door P verkleind kan worden, en alsdan identisch wordt met vergelijking (2), waardoor het gestelde bewezen is.

Digitized by Google

LIX. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Aan te toonen, dat de trilineaire vergelijking eener kegelsnede den assen-driehoek omschreven, en waarvan de halve middellijnen, aan deszelfs zijden evenwijdig, respectivelijk gelijk r_1, r_2, r_3 *zijn, is:*

$$\frac{a}{r_1^2\alpha}+\frac{b}{r_2^2\beta}+\frac{c}{r_3^2\gamma}=0.$$

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

De trilineaire vergelijking eener kegelsnede den assen-driehoek omschreven, heeft een vorm, waarin de vierkanten der coördinaten niet, maar alleen de regthoeken voorkomen, zoodat hier de constanten uit de algemeene vergelijking $u=v=w=0$ zijn, en gewoonlijk $2u'=\lambda$, $2v'=\mu$, $2w'=\nu$ worden genomen, zoodat zij dan deze gedaante verkrijgt:

$$\lambda\beta\gamma+\mu\gamma\alpha+\nu\alpha\beta=0 \text{ of } \frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu}{\beta}+\frac{\nu}{\gamma}=0.$$

Nu blijkt gemakkelijk uit eene figuur, dat als men $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ de coördinaten van het middelpunt noemt, voor de uiteinden der middellijn evenwijdig aan BC $\alpha_1=\bar{\alpha}$ en dus $\alpha_1-\bar{\alpha}=x_1=0$ zal zijn, voorts $\beta_1-\bar{\beta}=y_1=\pm r_1 \mathit{Sin}\, C$ en $\gamma_1-\bar{\gamma}=z_1=\mp r_1 \mathit{Sin}\, B$.

Even zoo heeft men voor de uiteinden der middellijn evenwijdig aan CA: $\alpha_2-\bar{\alpha}=x_2=\mp r_2 \mathit{Sin}\, C$, $\beta_2-\bar{\beta}=y_2=0$, $\gamma_2-\bar{\gamma}=z_2=\pm r_2 \mathit{Sin}\, A$ en voor die der middellijn evenwijdig aan AB: $\alpha_3-\bar{\alpha}=x_3=\pm r_3 \mathit{Sin}\, B$, $\beta_3-\bar{\beta}=y^3=\mp r_3 \mathit{Sin}\, A$, $\gamma_3-\bar{\gamma}=z_3=0$.

Maar in 't algemeen is, (zie Ferrers, bl. 84, bovenaan): $ux^2+vy^2+wz^2+2u'yz+2v'zx+2w'xy=$ eene constante, die geheel onafhankelijk is van α, β, γ.

Dit geeft dus hier

$$-\lambda r_1^2 \mathit{Sin}\, B.\mathit{Sin}\, C=-\mu r_2^2 \mathit{Sin}\, C.\mathit{Sin}\, A=-\nu r_3^2 \mathit{Sin}\, A.\mathit{Sin}\, B,$$

of

$$\frac{\lambda r_1^2}{\mathit{Sin}\, A}=\frac{\mu r_2^2}{\mathit{Sin}\, B}=\frac{\nu r_3^2}{\mathit{Sin}\, C},$$

of nog

$$\frac{\lambda}{a:r_1^2}=\frac{\mu}{b:r_2^2}=\frac{\nu}{c:r_3^2},$$

waaruit volgt voor de vergelijking der kegelsnede:

Digitized by Google

$$\frac{a}{r_1{}^2\alpha}+\frac{b}{r_2{}^2\beta}+\frac{c}{r_3{}^2\gamma}=0.$$

LX. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Eene kegelsnede raakt steeds de zijden eens gegeven driehoeks aan; bovendien is de som der vierkanten op hare assen standvastig en gegeven. Te bewijzen: dat de meetkundige plaats van haar middelpunt een cirkel is uit het orthocentrum van den driehoek als middelpunt beschreven.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Neemt men den gegeven driehoek tot assen-driehoek aan, dan is de trilineaire vergelijking eener ingeschreven kegelsnede van den vorm

$$L^2\alpha^2+M^2\beta^2+N^2\gamma^2-2MN\beta\gamma-2NL\gamma\alpha-2LM\alpha\beta=0.$$

Bijgevolg is hier

$$\begin{aligned}
U &= vw-u'^2=M^2N^2-M^2N^2=0,\\
V &= wu-v'^2=N^2L^2-N^2L^2=0,\\
W &= uv-w'^2=L^2M^2-L^2M^2=0,\\
U' &= v'w'-uu'=L^2MN+L^2MN=2L^2MN,\\
V' &= w'u'-vv'=LM^2N+LM^2N=2LM^2N,\\
W' &= u'v'-ww'=LMN^2+LMN^2=2LMN^2.
\end{aligned}$$

De waarden nu van beide halve assen worden verkregen uit de oplossing eener tweedemachtsvergelijking in den vorm eener determinante, te vinden bij FERRERS, bl. 85, welke na herleiding, en in aanmerking genomen dat

$abc\,(a\,Cos\,B.\,Cos\,C+b\,Cos\,C.\,Cos\,A+c\,Cos\,A.\,Cos\,B)=4I^2$

is, wordt:

$$\frac{4I^2s^2}{r^4}-\frac{s}{r^2}abc\,(u+v+w-2u'\,Cos\,A-2v'\,Cos\,B-2w'\,Cos\,C)$$
$$+Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab=0,$$

waarin

$$s=-abc\times\frac{uU+v'V'+w'W'}{Ua^2+Vb^2+Wc^2+2U'bc+2V'ca+2W'ab}$$
$$=abc\times\frac{LMN}{bcL+caM+abN}\text{ in dit geval.}$$

Door substitutie voorts van de bijzondere waarden van

Digitized by Google

u, v, w, u', v', w' en deeling door den coefficiënt van $\frac{1}{r^4}$, gaat zij over in:

$$\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2} \times \frac{aCosA\,(bN+cM)^2 + bCosB(cL+aN)^2 + cCosC(am+bL)^2}{4I^2s}$$
$$+ \frac{LMN\,(bcL + caM + abN)}{I^2s^2} = 0 \ldots\ldots (1)$$

Zij $4p^2$ de gegeven som van de vierkanten op de assen, dan is:

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{\frac{1}{r_1^2}} + \frac{1}{\frac{1}{r_2^2}} = \frac{\frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_1^2}}{\frac{1}{r_2^2} \times \frac{1}{r_1^2}} = p^2 \ldots (2)$$

De teller dezer zamengestelde breuk is de coefficiënt der eerste macht van $\frac{1}{r^2}$ in vergelijking (1) met een tegengesteld teeken genomen, de noemer is de bekende term. Door deeling verkrijgt men dus, als tevens de waarde van s gesubstitueerd wordt:

$$p^2 = \frac{abc\{aCosA(bN+cM)^2 + bCosB(cL+aN)^2 + cCosC(am+bL)^2\}}{4(bcL + caM + abN)^2}$$
$$= \frac{abc\{aCosA(bN+cM)^2 + bCosB(cL+aN)^2 + cCosC(aM+bL)^2\}}{\{a\,(bN + cM) + b\,(cL + aN) + c\,(aM + bL)\}^2}, (3)$$

waarvoor geschreven kan worden, daar, (zie FERRERS, bl. 33,) de coördinaten van het middelpunt zijn:

$$\frac{\alpha}{bN + cM} = \frac{\beta}{cL + aN} = \frac{\gamma}{aM + bL}:$$
$$p^2 = \frac{abc\,\{a\alpha^2\,Cos\,A + b\beta^2\,Cos\,B + c\gamma^2\,Cos\,C\}}{(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2} \ldots (4)$$

Na ordening geeft zulks voor de meetkundige plaats van het middelpunt:

$$a^2(p^2 - bcCosA)\,\alpha^2 + b^2\,(p^2 - caCosB)\,\beta^2 + c^2(p^2 - abCosC)\gamma^2$$
$$+ 2bcp^2\beta\gamma + 2cap^2\gamma\alpha + 2abp^2\alpha\beta = 0 \ldots\ldots (5)$$

Het is dus eene kegelsnede; of het een cirkel is hangt hiervan af, of er voldaan wordt aan de voorwaarde:

$$wb^2 + vc^2 - 2u'bc = uc^2 + wa^2 - 2v'ca = va^2 + ub^2 - 2w'ab,$$

hetgeen na toetsing inderdaad het geval blijkt te zijn.

De vraag is eindelijk naar het middelpunt van dien cirkel.

Digitized by Google

Deszelfs coördinaten worden gevonden, (zie FERRERS, bl. 73,) uit:

$$\frac{\bar{\alpha}}{Ua + W'b + V'c} = \frac{\bar{\beta}}{W'a + Vb + U'c} = \frac{\bar{\gamma}}{V'a + U'b + Wc};$$

waar
$$\begin{aligned}
U &= vw - u'^2 = a^2b^2c^2\,(bc\,Cos\,B.\,Cos\,C - p^2),\\
V &= wu - v'^2 = a^2b^2c^2\,(ca\,Cos\,C.\,Cos\,A - p^2),\\
W &= uv - w'^2 = a^2b^2c^2\,(ab\,Cos\,A.\,Cos\,B - p^2),\\
U' &= v'w' - uu' = a^2b^2c^2p^2\,Cos\,A,\\
V' &= w'u' - vv' = a^2b^2c^2p^2\,Cos\,B,\\
W' &= u'v' - ww' = a^2b^2c^2p^2\,Cos\,C.
\end{aligned}$$

Deze waardijen gesubstitueerd, geven:

$$\frac{\bar{\alpha}}{Cos\,B.\,Cos\,C} = \frac{\bar{\beta}}{Cos\,C.\,Cos\,A} = \frac{\bar{\gamma}}{Cos\,A.\,Cos\,B}$$

of
$$\bar{\alpha}\,Cos\,A = \bar{\beta}\,Cos\,B = \bar{\gamma}\,Cos\,C,$$

dat is:
$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) :: \left(\frac{1}{Cos\,A}, \frac{1}{Cos\,B}, \frac{1}{Cos\,C}\right);$$

waaruit blijkt, dat het middelpunt het doorsnijdingspunt van de hoogteloodlijnen des assen-driehoeks is.

LXI. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

De hoekpunten van een bolvormigen driehoek en de bol zelf, waarop zij liggen, zijn op twee elkander rechthoekig snijdende vlakken geprojecteerd: men vraagt te bepalen de projectiën van de hoekpunten des pool-driehoeks.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Zooals bekend is, verkrijgt men den pool-driehoek, door uit de hoekpunten van een driehoek als polen, met een' boog van 90°, op den bol bogen te beschrijven, daardoor ontstaan dus groote cirkels, en de snijpunten dier cirkels zijn de hoekpunten des pool-driehoeks. Daaruit volgt dan, dat de zijden van den pool-driehoek in vlakken moeten liggen, die door het middelpunt van den bol gaan en de middellijnen, die door de hoekpunten des gegeven driehoeks gaan, loodrecht snijden. Construeert men alzoo die drie vlakken, dan zal in elk dier vlakken een boog des pool-driehoeks gelegen zijn, en de snijpunten dier bogen twee aan twee moeten derhalve in twee dier vlakken, en gevolgelijk in de onderlinge doorsnede dier vlakken, liggen. Na dan die doorsnede geconstrueerd te heb-

Digitized by Google

ben, behoeft men slechts de punten te bepalen, waarin zij den bol snijdt, want deze zullen blijkbaar de hoekpunten des driehoeks zijn. De drie bedoelde groote cirkels zullen echter het oppervlak des bols in acht bolvormige driehoeken verdeelen, waaronder evenwel maar twee zullen zijn, die aan de voorwaarde van den pool-driehoek voldoen, dat de zijden en de hoeken de supplementen van de hoeken en de zijden des gegeven driehoeks zijn, welke wij in de figuur zullen aanwijzen door de koorden die de hoekpunten vereenigen.

Laten nu (zie fig. 19) a_1, a_2, b_1, b_2 en c_1, c_2 de gegevene hoekpunten zijn, dan trekken wij de stralen a_1M_1, a_2M_2, b_1M_1, b_2M_2 en c_1M_1, c_2M_2, en brengen door het middelpunt M_1, M_2 vlakken welke respectievelijk loodrecht deze stralen snijden, dan vinden wij het vlak A_1AA_2 loodrecht op aM, het vlak B_1BB_2 loodrecht op bM en het vlak C_1CC_2 loodrecht op cM. Dewijl nu het middelpunt M in alle drie vlakken ligt en dus een punt van alle drie onderlinge doorsneden van de vlakken twee aan twee is, zoo behoeft men van elk dier doorsneden slechts nog één punt te bepalen. Zoo is voor de doorsnede D_1E_1, D_2E_2 van de vlakken A_1AA_2 en B_1BB_2 het punt D_1, D_2, voor F_1M_1, F_2M_2 van B_1BB_2 en C_1CC_2 het punt F_1, F_2, en voor G_1H_1, G_2H_2 van A_1AA_2 en C_1CC_2 het punt G_1, G_2 voldoende. Slaan wij nu deze doorsneden om de horizontale doorgangen van hunne projecterende vlakken op het horizontale projectievlak neder, dan is DE de eerste, FI de tweede en GH de derde; het middelpunt in elk derzelve liggende, kan men daarbij gebruik maken van zijne hoogte boven het horizontale vlak, waardoor dan tegelijk zijne ligging in elk der neergeslagene doorsneden bepaald is. Neemt men nu op elk dier doorsneden ter wederzijde van het punt M stukken, gelijk aan den straal des bols, dan zal men daardoor de neergeslagene gezochte punten verkrijgen. Die punten zijn n en s op DE, p en y op FI en s en z op GH. Op de gewone wijze vindt men, door het trekken van de bekende loodlijnen, voor de projectiën dier punten n_1, n_2, p_1, p_2, s_1, s_2, x_1, x_2, y_1, y_2 en z_1, z_2. Van welke de eerste drie, zoowel als de laatste, de hoekpunten van een' pool-driehoek zijn. De laatste wordt echter gewoonlijk als zoodanig beschouwd.

Digitized by Google

LXII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Van een gelijkzijdigen driehoek, welks hoekpunten op een bol liggen, zijn de projectiën van eene der zijden en die van den bol zelven gegeven; men vraagt de beide andere zijden te projecteren, terwijl de projectie-vlakken aangenomen worden elkander rechthoekig te snijden.

Opgelost *door* W. van Haarst *en* P. C. F. Frowein.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Als men de werkelijke lengte van de zijde des gelijkzijdigen driehoeks construeert, en om de punten a_1, a_2, b_1 en b_2, met deze zijde als straal, cirkels beschrijft, dan kan men die beschouwen als de projectiën van twee bollen. Dewijl nu de oppervlakken dier bollen alle punten bevatten, die op den afstand ab van hun middelpunt verwijderd zijn, zoo moet het derde hoekpunt des driehoeks op beide bollen en gevolgelijk in hunne onderlinge doorsneden liggen. Zoekt men derhalve de punten, waarin deze doorsnede den gegeven bol doorsnijdt, dan zal elk dier beide punten aan de voorwaarde voldoen.

Anders. Het derde hoekpunt moet blijkbaar in het vlak liggen, dat loodrecht door het midden der gegevene zijde gaat; dewijl echter die zijde eene koorde van den bol is, moet dat vlak door het middelpunt van den bol gaan en hem bij gevolg volgens een' grooten cirkel snijden; maar dan moet het gezochte hoekpunt ergens in den omtrek van dien cirkel liggen en wel op een' bekenden afstand van het midden der zijde. Construeert men derhalve het bedoelde vlak en slaat men het met alles, wat er zich in bevindt, om zijn' horizontalen doorgang op het horizontale projectievlak neer, dan heeft men de doorsnede in hare ware grootte en het midden der zijde in zijne ligging met betrekking tot dien cirkel. Men behoeft alzoo met de hoogte des driehoeks om het laatstgenoemde punt een' cirkelboog te beschrijven, dan zullen de snijpunten van dezen met de doorsnede de neergeslagene gezochte punten aanwijzen. Op de gewone wijze vindt men de projectiën dier punten, als het vlak in zijn' vorigen stand wordt teruggebragt. De laatste wijze is hier gevolgd.

Zij (zie fig. 20) a_1b_1, a_2b_2 de gegevene zijde, m_1, m_2 het middelpunt des bols. Deelen wij a_1b_1 in c_1 en a_2b_2 in c_2

Digitized by Google

middendoor, dan is c_1c_2 het midden der zijde. Het vlak, dat in dit punt loodrecht door ab gaat, is C_1CC_2. Bij het neerslaan komt m_1m_2 in m, c_1c_2 in c. Nemen wij voorts $aa_1 = a_2d$, dan is ab_1 de werkelijke lengte der zijde, en dus ef de hoogte des driehoeks. Beschrijven wij nu om c als middelpunt, met ef als straal, een' cirkelboog, dan snijdt deze den om m met den straal des bols beschreven' cirkel in de punten x en y. Op de gewone wijze worden dan de projectiën dier punten x_1, x_2 en y_1, y_2 bepaald. Er zijn alzoo twee gelijkzijdige driehoeken, t. w.: $a_1b_1x_1$, $a_2b_2x_2$ en $a_1b_1y_1$, $a_2b_2y_2$.

LXIII. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Van een drievlakkigen hoek zijn twee zijvlakken in stand en grootte gegeven, terwijl het derde een in stand en grootte gegeven bol moet aanraken. Vrage: den stand en de grootte van het derde zijvlak door constructie te bepalen.

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Men neme aanvankelijk de voorwaarde, dat het derde zijvlak den gegeven bol moet aanraken, niet in aanmerking. In dat geval kan men, als A'AA" en B'BB" (fig. 21) de doorgangen van de twee gegeven zijvlakken zijn, het snijpunt D der horizontale doorgangen tot hoekpunt van den drievlakkigen hoek aannemen. Men trekke uit het snijpunt C der verticale doorgangen de lijn CE loodrecht op de as van projectie, verder uit E eene loodlijn door den doorgang AA en snijde deze loodlijn in C_1 door een boogje, dat uit A met AC als straal wordt beschreven. Trekt men nu de lijnen C_1A en C_1D, dan zal, als het vlak A'AA" om den horizontalen doorgang wordt neêrgeslagen, de lijn CA langs C_1A vallen en de doorsnede der gegeven vlakken langs de lijn C_1D.

Men make nu hoek C_1DF gelijk aan den bekenden vlakken hoek van het eerste zijvlak en neme CF" gelijk aan C_1F, dan zal, als het vlak A'AA" weder in den oorspronkelijken stand wordt gebracht, het punt F in F" vallen. Ten opzichte van het zijvlak B'BB" handele men eveneens, ter bepaling van het punt G". Het vlak H'HH", dat door het punt D in het horizontale vlak en door de punten F" en G" in het verticale gaat, vormt nu bijkbaar met de twee gegeven vlakken eenen

Digitized by Google

drievlakkigen hoek, die voldoet aan de voorwaarde, dat de twee zijvlakken den gegeven stand en de gegevene grootte hebben.

Om den vlakken hoek van het derde zijvlak te vinden, behoeft men slechts eenen driehoek te beschrijven, die de lijnen DF, DG en F"G" tot zijden heeft.

Laten nu M' en M" de projectiën zijn van het middelpunt des bols, die door het derde zijvlak moet aangeraakt worden. Trekt men uit M' en M" loodlijnen op de doorgangen van het vlak H'HH", dan verkrijgt men de projectiën der loodlijn, welke uit het middelpunt des bols op dat vlak valt en het horizontale vlak in N ontmoet. Door het horizontaal-projecteerend vlak neêr te slaan, verkrijgt men de plaats van het middelpunt M op de neêrgeslagen loodlijn MN. Men neme nu op deze lijn MP gelijk aan den straal des bols en trekke PP' loodrecht op M'N, dan is P' de horizontale projectie en PP' de hoogte van een punt, waarin het oppervlak van den bol gesneden wordt door eene lijn, welke uit het middelpunt loodrecht op het vlak H'HH" wordt getrokken.

Men brenge nu op de gewone wijze door het punt P het vlak Q'QQ" evenwijdig aan het vlak H'HH", dan voldoet dit aan alle voorwaarden.

Aanmerking. Had men het punt P aan den anderen kant van het punt M genomen, dan zoude men ook een vlak verkregen hebben dat evenwijdig aan H'HH" loopt en den bol aanraakt. Verder had men de hoeken C_1DF en C_2DG aan de andere zijde van de lijnen DC_1 en DC_2 kunnen nemen en alzoo in plaats van het vlak H'HH" drie andere vlakken hebben kunnen verkrijgen, die aan de voorwaarden voldoen en tot de drie overige tweevlakkige hoeken behooren, welke door de onderlinge snijding van de twee gegeven vlakken ontstaan. Hieruit blijkt, dat er in het algemeen acht vlakken kunnen gevonden worden, welke aan alle voorwaarden der vraag voldoen.

LXIV. Voorstel.

Door J. W. Tesch.

Men vraagt een rechtstreeksch en meetkundig *bewijs van de stelling: wanneer in een driehoek de lijnen, die twee der hoeken*

Digitized by Google

middendoordeelen, gelijk zijn, dan is de driehoek gelijkbeenig. (1)

OPGELOST *door* J. W. TESCH.

OPLOSSING *van* J. W. TESCH. (2)

Zij gegeven dat de lijnen BD en CE de hoeken B en C middendoordeelen en BD = CE.

Volgens bekende eigenschappen is

$$AE : AC = BE : BC. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$AD : AB = CD : BC. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$CE^2 = AC \times BC - AE \times BE. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$BD^2 = AB \times BC - AD \times CD. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Uit de onderstelling en uit (3) en (4) volgt:

$$\frac{AC}{AD+CD} \times BC - AE \times BE = \frac{AB}{AE+BE} \times BC - AD \times CD.$$

of $AD \times BC + CD \times BC - AE \times BE = AE \times BC + BE \times BC - AD \times CD$. (5)

Uit (1) en (2) volgt: $\begin{array}{l} AE \times BC = BE\,(AD + CD) \\ AD \times BC = CD\,(AE + BE). \end{array}$

Door substitutie in (5) en na herleiding verkrijgt men:

$$AE \times CD + BC \times CD + AD \times CD = BE \times AD + BE \times BC + BE \times AE$$

waaruit: $CD = BE$.

Uit de congruentie van de driehoeken BCD en BCE volgt nu onmiddellijk $\angle ACB = \angle ABC$, dat te bewijzen was.

LXV. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

In een gegeven driehoek is een gelijkzijdige driehoek beschreven. Indien nu de ligging van één der hoekpunten des ingeschreven driehoeks bekend is, vraagt men, diens zijden te bepalen.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST, A. PSICHA *en* P. C. F. FROWEIN.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Laat van den gegeven driehoek ABC (zie fig. 22) op de zijde $AB = c$ het punt P door den afstand $BP = d$ bepaald zijn en zij dan PQR de ingeschreven gelijkzijdige driehoek. Stellen wij dan de zijde $PQ = x$ en den hoek $BPQ = \varphi$, dan is hoek $APR = 120° - \varphi$ en dus $ARP = \varphi + 60° - A$, terwijl blijk-

(1) Voor deze stelling zijn bewijzen gegeven, die niet rechtstreeksch of wel analytisch zijn in de *Wisk. Opg.* 1855—1859, N°. 149 en 1866—1870 N°. 130.

(2) Eene tweede oplossing is ingezonden, doch geheel overeenkomende met de *tweede* oplossing in de *Wisk. Opgaven* 1855—1859, N°. 149.

Digitized by Google

baar $Sin\,BQP = Sin\,(180^\circ - \beta - \phi) = Sin\,(B + \phi)$ is. In den driehoek BPQ hebben wij dan $d : x = Sin\,(B + \phi) : Sin\,B$,

waaruit $x = \dfrac{d\,Sin\,B}{Sin\,(B + \varphi)}$

en in den driehoek APR: $c - d : x = Sin\,(\varphi + 60^\circ - A) : Sin\,A$,

waaruit $x = \dfrac{(c - d)\,Sin\,A}{Sin\,(\varphi + 60^\circ - A)}$.

Door gelijkstelling wordt dan

$$\frac{d\,Sin\,B}{Sin\,(B + \phi)} = \frac{(c - d)\,Sin\,A}{Sin\,(\varphi + 60^\circ - A)},$$

of wel

$$\frac{d\,Sin\,B}{Sin\,B\,Cos\,\phi + Cos\,B\,Sin\,\phi} = \frac{(c - d)\,Sin\,A}{Sin\,\phi\,Cos\,(60^\circ - A) + Cos\,\phi\,Sin\,(60^\circ - A)}.$$

Daaruit volgt

$$\{d\,Sin\,B\,Cos\,(60^\circ - A) - (c - d)\,Sin\,A\,Cos\,B\} \times tang\,\phi$$
$$= (c - d)\,Sin\,B\,Sin\,A - d\,Sin\,B\,Sin\,(60^\circ - A)$$

of $tg\,\phi = Sin\,B \times \dfrac{(c - d)\,Sin\,A - d\,Sin\,(60^\circ - A)}{d\,Sin\,B\,Cos\,(60^\circ - A) - (c - d)\,Cos\,B\,Sin\,A}$,

of wel, den teller dezer breuk m en den noemer n stellende:

$$tg\,\varphi = Sin\,B \times \frac{m}{n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Maar nu is:

$$Sin\,(B + \phi) = Sin\,B\,Cos\,\phi + Cos\,B\,Sin\,\varphi = \frac{d}{x}\,Sin\,B,$$

waaruit:

$$Sin^2\,B\,Cos^2\,\phi = Sin^2\,B - Sin^2\,B\,Sin^2\,\phi$$
$$= \frac{d^2}{x^2}\,Sin^2\,B - \frac{2d}{x}\,Sin\,B\,Cos\,B\,Sin\,\varphi + Cos^2\,B\,Sin^2\,\varphi,$$

dus: $Sin^2\,\phi - \dfrac{2d}{x}\,Sin\,B\,Cos\,B\,Sin\,\varphi - \dfrac{x^2 - d^2}{x^2}\,Sin^2\,B = 0$

en hieruit $Sin\,\phi$ oplossende, komt er:

$$Sin\,\phi = \frac{d\,Sin\,B\,Cos\,B \pm \sqrt{\{d^2\,Cos^2\,B\,Sin^2\,B + (x^2 - d^2)\,Sin^2\,B\}}}{x}$$
$$= Sin\,B \times \frac{d\,Cos\,B \pm \sqrt{(x^2 - d^2\,Sin^2\,B)}}{x}$$

en dan vindt men gemakkelijk:

Digitized by Google

$$Cos^2\phi = 1 - Sin^2\phi = \frac{x^2 - x^2\,Sin^2 B - d^2\,Cos^2 B\,Sin^2 B + d^2\,Sin^4 B \mp 2d\,Cos\,B\,Sin\,B\sqrt{(x^2 - d^2\,Sin^2 B)}}{x}$$

$$= \frac{d^2\,Sin^4 B \mp 2d\,Cos\,B\,Sin^2 B\sqrt{(x^2 - d^2\,Sin^2 B)} + Cos^2 B\,(x^2 - d^2\,Sin^2 B)}{x^2}$$

en alzoo:

$$Cos\,\phi = \frac{d\,Sin^2 B \mp Cos\,B\sqrt{(x^2 - d^2\,Sin^2 B)}}{x}.$$

Wij hebben dan:

$$tg\,\phi = Sin\,B \times \frac{d\,Cos\,B \pm \sqrt{(x^2 - d^2\,Sin^2 B)}}{d\,Sin^2 B \mp Cos\,B\sqrt{(x^2 - d^2\,Sin\,B)}}$$

en door gelijkstelling met (a): $\dfrac{d\,Cos\,B \pm \sqrt{(x^2 - d^2\,Sin^2 B)}}{d\,Sin^2 B \mp Cos\,B\sqrt{(x^2 - d^2\,Sin^2 B)}} = \dfrac{m}{n}$. Om hieruit x op te lossen, is

$$(m\,Cos\,B + n)\sqrt{(x^2 - d^2\,Sin^2 B)} = d\,(n\,Cos\,B - m\,Sin^2 B)$$

en

$$x^2 = d^2 \times \left\{\frac{(n\,Cos\,B - m\,Sin^2 B)^2}{(m\,Cos\,B + n)^2} + Sin^2 B\right\},$$

derhalve:

$$x = \frac{d\sqrt{\{(n\,Cos\,B - m\,Sin^2 B)^2 + (m\,Cos\,B + n)^2\,Sin^2 B\}}}{m\,Cos\,B + n}.$$

Nu was: $m = (c - d)\,Sin\,A - d\,Sin\,(60^\circ - A)$ en $n = d\,Sin\,B\,Cos\,(60^\circ - A) - (c - d)\,Cos\,B\,Sin\,A$;
daaruit volgt dan: $m\,Cos\,B + n = d\,Sin\,(B + A - 60^\circ)$
en $n\,Cos\,B - m\,Sin^2 B = d\,Sin\,B\,Cos\,(B + A - 60^\circ) - (c - d)\,Sin\,A$.

Substitueren wij alzoo deze waarden in die van x, dan vinden wij:

$$x = \frac{\sqrt{\{[d\,Sin\,B\,Cos\,(B + A - 60^\circ) - (c - d)\,Sin\,A]^2 + d^2\,Sin^2\,(B + A - 60^\circ)\,Sin^2 B\}}}{Sin\,(B + A - 60^\circ)}$$

Digitized by Google

of wel: $$x = \frac{\sqrt{\{d^2 \, Sin^2 \, B - 2(c-d)\, d \, Sin \, B \, Sin \, A \, Cos(B + A - 60^\circ) + (c-d)^2 \, Sin^2 \, A\}}}{Sin(B + A - 60^\circ)}.$$

Is de gegevene driehoek gelijkzijdig, dan wordt $x = \sqrt{\{c^2 - 3(c-d)\,d\}}$ en is daarbij het punt P in het midden van AC gelegen, zoodat $d = \frac{1}{3}c$ is, dan vindt men $x = \frac{1}{3}c$, zooals het behoort.

LXVI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

In een gegeven driehoek ABC *is een andere driehoek* PQR, *gelijkvormig aan den eerstgenoemde, ingeschreven, zoodat het hoekpunt* P *op de zijde* AB *ligt, terwijl de zijden* PQ *en* PR *gelijkstandig zijn met* BC *en* AB. *Indien men nu* BP $= d$ *stelt, wenscht men de zijden van den driehoek* PQR *in* d *en de waarden der zijden van den driehoek* ABC *uit te drukken.*

Opgelost *door* W. van Haarst, D. B. Wisselink *en* P. C. F. Frowein.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Laat van den gegeven driehoek ABC (zie fig 23) hoek $B = \alpha$, hoek $C = \beta$, hoek $A = \gamma$, en voorts $BP = d$ zijn. Stellen wij dan hoek $BPQ = \phi$, $PQ = x$ en $PR = y$, dan is wegens de gelijkvormigheid der driehoeken ABC en PQR hoek $RPQ = \alpha$ en $x : y = a : c$, dus $y = \frac{c}{a}x$, terwijl hoek $APR = 180^\circ - \alpha - \phi$ en hoek $ARP = \alpha + \phi - \gamma$ is. In den driehoek BPQ hebben wij dan $d : x = Sin(\alpha + \phi) : Sin\,\alpha$ en in den driehoek CPR $c - d : y = Sin(\alpha + \phi - \gamma) : Sin\gamma$. Uit de eerste evenredigheid volgt dan $x = \frac{d \, Sin\,\alpha}{Sin(\phi + \alpha)}$ en uit de tweede $y = \frac{(c-d)\, Sin\,\gamma}{Sin(\phi + \alpha - \gamma)}$ en dewijl nu $y = \frac{c}{a}x$ is, zoo ontstaat de vergelijking $\frac{(c-d)\, Sin\,\gamma}{Sin(\phi + \alpha - \gamma)} = \frac{cd \, Sin\,\alpha}{a \, Sin(\phi + \alpha)}$, dat is na herleiding:

Digitized by Google

$$(c-d)a\,Cos\,\alpha\,Sin\,\gamma\,Sin\,\phi+(c-d)a\,Sin\,\gamma\,Sin\,\alpha\,Cos\,\phi$$
$$=cd\,Sin\,\alpha\,Cos\,(\alpha-\gamma)\,Sin\,\phi+cd\,Sin\,\alpha\,Sin\,(\alpha-\gamma)\,Cos\,\phi,$$

waaruit volgt:

$$\{cd\,Sin\,\alpha\,Cos\,(\alpha-\gamma)-(c-d)a\,Cos\,\alpha\,Sin\,\gamma\}\times tang\,\phi$$
$$=Sin\,\alpha\,\{(c-d)a\,Sin\,\gamma-cd\,Sin\,(\alpha-\gamma)\}$$

en derhalve:

$$tg\,\phi=Sin\,\alpha\times\frac{(c-d)a\,Sin\,\gamma-cd\,Sin\,(\alpha-\gamma)}{cd\,Sin\,\alpha\,Cos\,(\alpha-\gamma)-(c-d)a\,Cos\,\alpha\,Sin\,\gamma}.$$

Stellen wij ook hier als in het vorige voorstel den teller der breuk m en den noemer n, dan vinden wij even als daar uit de vergelijking $x=\frac{d\,Sin\,\alpha}{Sin(\phi+\alpha)}$,

$$tg\,\phi=Sin\,\alpha\times\frac{d\,Cos\,\alpha\pm\sqrt{(x^2-d^2\,Sin^2\,\alpha)}}{d\,Sin^2\,\alpha\mp Cos\,\alpha\sqrt{(x^2-d^2\,Sin^2\,\alpha)}}$$

en vervolgens:

$$x=\frac{d\sqrt{\{(n\,Cos\,\alpha-m\,Sin^2\,\alpha)^2+(m\,Cos\,\alpha+n)^2\,Sin^2\,\alpha\}}}{m\,Cos\,\alpha+n}.$$

Nu is hier $m\,Cos\,\alpha+n=cd\,Sin\,\gamma$ en

$$n\,Cos\,\alpha-m\,Sin^2\,\alpha=cd\,Sin\,\alpha\,Cos\,\gamma-(c-d)a\,Sin\,\gamma,$$

zoodat wij door substitutie hebben:

$$x=\frac{\sqrt{\{[cd\,Sin\,\alpha\,Cos\,\gamma-(c-d)a\,Sin\,\gamma]^2+c^2d^2\,Sin^2\,\alpha\,Sin^2\gamma\}}}{c\,Sin\,\gamma}$$

of

$$x=\frac{\sqrt{\{c^2d^2Sin^2\alpha-2acd(c-d)Sin\alpha Cos\gamma Sin\gamma+(c-d)^2a^2Sin^2\gamma\}}}{c\,Sin\,\gamma}.$$

Noemen wij nu de loodlijn, uit C op AB neêrgelaten, h en het segment AD p, dan is $Sin\,\alpha=\frac{h}{a}$, $Sin\,\gamma=\frac{h}{b}$ en $Cos\,\gamma=\frac{p}{b}$ en substitueeren wij deze waarden in die van x, dan vinden wij:

$$x=\frac{\sqrt{\{c^2d^2-2cd\,(c-d)\,p+(c-d)^2a^2\}}}{c}$$

en dewijl $2cp=c^2+b^2-a^2$ is:

$$x=\frac{\sqrt{\{c^2d^2-d\,(c-d)(b^2+c^2-a^2)+(c-d)^2a^2\}}}{c}$$

of wel:

Digitized by Google

$$x = \frac{\sqrt{\{b^2d^2 + a^2c^2 + c^2d^2 - cd(a^2 + b^2 + c^2 - cd)\}}}{c}.$$

Aanmerkingen. Is de gegevene driehoek gelijkbeenig, zoodat $c = b$ is, dan wordt:

$$x = \frac{\sqrt{\{3c^2d^2 + a^2c^2 - a^2cd - 2c^3d\}}}{c}.$$

Is hij gelijkzijdig, dan is nog $a = c$. In dat geval wordt

$$x = \sqrt{\{c^2 - 3d(c - d)\}}.$$

Is hij regthoekig in B, dan is $b^2 - a^2 = c^2$ en daardoor is dan $x = \frac{\sqrt{\{c^2d^2 - 2c^2d(c - d) + a^2(c - d)^2\}}}{c}$.

Is hij eindelijk regthoekig in C, dan is $c^2 - a^2 = b^2$ en dus

$$x = \frac{\sqrt{\{c^2d^2 - 2b^2d(c - d) + (c^2 - b^2)(c - d)^2\}}}{c}.$$

LXVII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

In een gegeven gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek een gelijkbeenigen driehoek te beschrijven van gegeven inhoud, zoodat de top in een gegeven punt van de hypothenusa van den gegeven driehoek ligt.

Opgelost *door* W. van Haarst *en* A. Psicha.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Zij ABC (zie fig. 24) de gegevene gelijkbeenige regthoekige driehoek met de regthoekzijden $AC = BC = a$ en de hypothenusa $AB = c$, dan is hoek A = hoek B $= 45°$. Laat dan nog $BP = d$ gegeven zijn en stellen wij den hoek $BPQ = \phi$, den tophoek BPQ des gevraagden driehoeks α en de beenen $PQ = PR = x$, terwijl wij aannemen dat zijn inhoud I moet zijn. In den driehoek BPQ is dan $d : x = Sin(B + \phi) : Sin\, B$ en in den driehoek APR $c - d : x = Sin(\alpha + \phi - A) : Sin\, A$. Uit deze beide evenredigheden volgt dan de vergelijking

$$\frac{d}{Sin(B + \phi)} = \frac{c - d}{Sin(\alpha + \phi - A)}$$

en alzoo: $d\, Sin(\alpha + \phi - A) = (c - d)\, Sin(B + \phi)$ of

$$d\, Sin\, \phi\, Cos(\alpha - A) + d\, Cos\, \phi\, Sin(\alpha - A)$$
$$= (c - d)\, Sin\, B\, Cos\, \phi + (c - d)\, Cos\, B\, Sin\, \phi.$$

Men vindt dan gemakkelijk:

$$tg\, \phi = \frac{(c - d)\, Sin\, B - d\, Sin(\alpha - A)}{d\, Cos(\alpha - A) - (c - d)\, Cos\, B}$$

Digitized by Google

$$= \frac{(c-d)\,Sin\,B - d\,Sin\,\alpha\,Cos\,A + d\,Cos\,\alpha\,Sin\,A}{d\,Cos\,\alpha\,Cos\,A + d\,Sin\,\alpha\,Sin\,A - (c-d)\,Cos\,B}.$$

Maar dewijl $Sin\,A = Sin\,B = Cos\,A = Cos\,B$ is, wordt

$$tg\,\phi = \frac{c - d - d\,Sin\,\alpha + d\,Cos\,\alpha}{d\,Cos\,\alpha + d\,Sin\,\alpha - (c-d)}.$$

Nu vonden wij in het vorige voorstel, dat uit

$$Sin\,(B+\phi) = \frac{d\,Sin\,B}{z} \text{ volgt:}$$

$$tg\,\phi = Sin\,B \times \frac{d\,Cos\,B \pm \sqrt{(z^2 - d^2\,Sin^2\,B)}}{d\,Sin^2\,B \mp Cos\,B\,\sqrt{(z^2 - d^2\,Sin^2 B)}}$$

en dus in dit geval, daar $Sin\,B = Cos\,B$ is:

$$tg\,\phi = \frac{d\,Sin\,B \pm \sqrt{(z^2 - d^2\,Sin^2\,B)}}{d\,Sin\,B \mp \sqrt{(z^2 - d^2\,Sin^2\,B)}}.$$

Door gelijkstelling van de beide waarden van $tg\,\phi$ vindt men dan $\frac{d\,Sin\,B \pm \sqrt{(z^2 - d^2\,Sin^2 B)}}{d\,Sin\,B \mp \sqrt{(z^2 - d^2\,Sin^2 B)}} = \frac{c - d - d\,Sin\,\alpha + d\,Cos\,\alpha}{d\,Cos\alpha + d\,Sin\,\alpha - (c-d)}.$

Na herleiding komt er:

$Cos\,\alpha\,\sqrt{(z^2 - d^2\,Sin^2\,B)} = (c-d)\,Sin\,B - d\,Sin\,B\,Sin\,\alpha$,

waaruit: $(z^2 - d^2\,Sin^2\,B)(1 - Sin^2\,\alpha) =$

$= (c-d)^2\,Sin^2\,B - 2d(c-d)\,Sin^2\,B\,Sin\,\alpha + d^2\,Sin^2\,B\,Sin^2\,\alpha$

of $z^2(1 - Sin^2\alpha) = (c-d)^2 Sin^2 B + d^2 Sin^2 B - 2d(c-d) Sin^2 B\,Sin\,\alpha$.

Dewijl nu $z^2\,Sin\,\alpha = 2I$ en alzoo $Sin\,\alpha = \frac{2I}{z^2}$ is, zoo heeft men door substitutie:

$z^4 - 4I^2 = (c^2 - 2cd + 2d^2)\,z^2\,Sin^2\,B - 4d\,(c-d)\,I\,Sin^2\,B$

of $z^4 - (c^2 - 2cd + 2d^2)\,z^2\,Sin^2\,B = 4I^2 - 4d\,(c-d)\,I\,Sin^2 B$

of daar $Sin^2\,B = \frac{1}{2}$ is,

$$z^4 - \tfrac{1}{2}(c^2 - 2cd + 2d^2)\,z^2 = 4I^2 - 2d\,(c-d)\,I,$$

waaruit men op de gewone wijze vindt:

$z = \frac{1}{2}\sqrt{\{(c-d)^2 + d^2 \pm \sqrt{[64I^2 - 32d(c-d)I + [(c-d)^2 + d^2]^2]}\}}$.

Ligt het punt P juist in het midden der hypothenusa, dan is $d = \frac{1}{2}c$ en wij vinden in dit geval:

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{2\tfrac{1}{2}c^2 \pm \sqrt{(64I^2 - 8c^2 I + \tfrac{1}{4}c^4)}\}},$$

dat is $z = \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2 + 4I)}$ en $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(3c^2 - 8I)}$. Noemen wij nu den inhoud des gegeven driehoeks I_1, dan is, zoo als men weet, $I_1 = \frac{1}{4}c^2$ en dus $c^2 = 4I_1$. Voeren wij deze grootheid in, dan wordt $z = \sqrt{2(I + I_1)}$ en $z_1 = \sqrt{(3I_1 - 2I)}$.

Digitized by Google

LXVIII. Voorstel.

Door J. D. R. Moll.

Van eene meetkundige evenredigheid zijn gegeven de som (p) *der termen, de som* (q) *der tweede en de som* (r) *der vierde machten dier termen. Vrage, die evenredigheid in het algemeen te vinden, zonder gebruik te maken van hoogere machtsvergelijkingen. Ter toepassing op een voorbeeld stelle men* $p = 39$, $q = 545$, $r = 171377$.

Opgelost *door* J. D. R. Moll, A. Benthem Gz., D. B. Wisselink *en* P. C. F. Frowein.

Oplossing *van* J. D. R. Moll.

Men stelle de evenredigheid $a : ar = b : br$, dan heeft men:

$$a+ar+b+br=p$$
$$\text{of } (a+b)(r+1)=p\ldots(A)$$
$$\text{of } (a+b)^2(r+1)^2=p^2$$
$$\text{of } (a^2+b^2)(r^2+1)^2+2ab(r^2+1)+2r(a+b)^2=p^2$$
$$\text{afg. } (a^2+b^2)(r^2+1)^2 \qquad =q\ .(B)$$
$$\text{rest } 2ab(r^2+1)+2r(a+b)^2=p^2-q$$
$$\text{of } ab(r^2+1)+r(a+b)^2=\tfrac{1}{2}(p^2-q)\ .(D)$$

$$a^2+a^2r^2+b^2+b^2r^2=q \quad \text{en } a^4+a^4r^4+b^4+b^4r^4=r$$
$$\text{of } (a^2+b^2)(r^2+1)=q\ldots(B) \quad \text{en } (a^4+b^4)(r^4+1)=r\ldots(C)$$
$$\text{of } (a^2+b^2)^2(r^2+1)^2=q^2$$
$$\text{of } (a^4+b^4)(r^4+1)+2a^2b^2(r^4+1)+2r^2(a^2+b^2)^2=q^2$$
$$\text{afg. } (a^4+b^4)(r^4+1) \qquad =r\ldots(C)$$
$$\text{rest } 2a^2b^2(r^4+1)+2r^2(a^2+b^2)^2=q^2-r$$
$$a^2b^2(r^4+1)+r^2(a^2+b^2)^2=\tfrac{1}{2}(q^2-r)\ldots(E)$$

$$\text{of } a^2b^2(r^2+1)^2+2abr(r^2+1)(a+b)^2+r^2(a+b)^4=\tfrac{1}{4}(p^2-q)^2$$
$$\text{of } a^2b^2(r^4+1)+2a^2b^2r^2+2abr(r^2+1)(a+b)^2+r^2(a^2+b^2)^2+4abr^2(a^2+ab+b^2)=\tfrac{1}{4}(p^2-q)^2$$
$$\text{afg. } a^2b^2(r^4+1) \qquad +r^2(a^2+b^2)^2 \qquad =\tfrac{1}{2}(q^2-r)\ldots(D)$$
$$\text{rest } 2a^2b^2r^2+2abr(r^2+1)(a+b)^2+4abr^2(a^2+ab+b^2)=\tfrac{1}{4}(p^2-q)^2-\tfrac{1}{2}(q^2-r)$$

Digitized by Google

of $r^2(4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3) + 2abr(r^2+1)(a^2+b^2) + 4a^2b^2r(r^2+1) = \frac{1}{4}(p^2-q)^2 - \frac{1}{8}(q^2-r)$

bijg. $2a^2b^2r^2 \qquad = 2a^2b^2r^2$

komt $4abr^2(a+b)^2 + 2abr(r^2+1)(a^2+b^2) + 4a^2b^2r(r^2+1) = 2a^2b^2r^2 + \frac{1}{4}(p^2-q)^2 - \frac{1}{8}q^2-r)$

maar $2abr(r^2+1)(a^2+b^2) \qquad = 2abrq \ldots (B)$

dus $4abr^2(a+b)^2 + 2abrq + 4a^2b^2r(r^2+1) = 2a^2b^2r^2 + \frac{1}{4}(p^2-q)^2 - \frac{1}{8}(q^2-r)$

of $4abr[r(a+b)^2 + ab(r^2+1)] + 2abrq = 2a^2b^2r^2 + \frac{1}{4}(p^2-q)^2 - \frac{1}{8}(q^2-r)$

maar $r(a+b)^2 + ab(r^2+1) \qquad = \frac{1}{2}(p^2-q) \ldots (D)$

komt $2abrp^2 = 2a^2b^2r^2 + \frac{1}{4}(p^2-q)^2 - \frac{1}{8}(q^2-r)$

of $a^2b^2r^2 - abrp^2 = \frac{1}{4}(q^2-r) - \frac{1}{8}(p^2-q)^2$

bijvoegende $\left(\frac{p^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}p^4$

heeft men $abr = \frac{p^2}{2} \pm \sqrt{\left\{\frac{p^4}{4} + \frac{q^2-r}{4} - \frac{(p^2-q)^2}{8}\right\}} \ldots (F)$

Noemt men deze waarde van $abr = P$, dan is verder

$a^2b^2(r^4+1) + r^2(a^2+b^2)^2 = \frac{1}{4}(q^2-r) \ldots (E)$

tel bij $2a^2b^2r^2 \qquad = 2P^2$

komt $a^2b^2(r^2+1)^2 + r^2(a^2+b^2)^2 = \frac{1}{4}(q^2-r) + 2P^2$

afgetr. $2abr(r^2+1)(a^2+b^2) = 2qP \ldots\ldots (B)$

rest $[ab(r^2+1) - r(a^2+b^2)]^2 = \frac{1}{8}(q^2-r) + 2P^2 - 2qP$

Digitized by Google

waaruit $ab(r^2+1)-r(a^2+b^2)=\pm\sqrt{[\frac{1}{2}(q^2-r)+2P^2-2qP]}$
maar van $ab(r^2+1)+r(a+b)^2=\frac{1}{2}(p^2-q)\ldots.(D)$ aftrekkende

rest $2r(a^2+ab+b^2)=\frac{1}{2}(p^2-q)\mp\sqrt{[\frac{1}{2}(q^2-r)+2P^2-2qP]}$
of $r(a^2+ab+b^2)=\frac{1}{4}(p^2-q)\mp\frac{1}{2}\sqrt{[\frac{1}{2}(q^2-r)+2P^2-2qP]}$
opg. $abr \quad =P$

komt $r(a+b)^2=P+\frac{1}{4}(p^2-q)\mp\frac{1}{2}\sqrt{[\frac{1}{2}(q^2-r)+2P^2-2qP}\ldots.(G)$.

Na dezen vorm gemakshalve $=Q$ gesteld te hebben, deele men hem in het vierkant van de vergelijking A, waardoor men bekomt:

$$\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{p^2}{Q}$$

$$\text{of}\quad r^2+\left(\frac{2Q-p^2}{Q}\right)r=-1$$

$$\text{waaruit}\quad r=-\frac{2Q-p^2}{2Q}\pm\sqrt{\left[\frac{p^4-4p^2Q}{4Q^2}\right]}.$$

Noemt men alweder gemakshalve deze waarde van $r=R$, en substituëert men haar in G en F, dan bekomt men:

$$(a+b)^2=\frac{Q}{R},$$

$$\text{maar}\quad 4ab=\frac{4P}{R}$$

$$\text{rest}\quad (a-b)^2=\frac{Q-4P}{R}$$

$$\text{dus}\quad a-b=\pm\sqrt{\frac{Q-4P}{R}}$$

$$\text{maar}\quad a+b=\pm\sqrt{\frac{Q}{R}}$$

$$\text{dus}\quad a=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\frac{Q}{R}}\pm\frac{Q-4P}{R}\right]$$

$$\text{en}\quad b=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\frac{Q}{R}}\mp\frac{Q-4P}{R}\right].$$

Substituëert men nu $p=39$, $q=545$ en $r=171377$ in de waarde van P, dan bekomt men:

$$abr=P=60 \text{ of } 1461.$$

Voor $P=60$, bekomt men $Q=338$ of 270, — en voor $P=1461$, bekomt men $Q=$ eene onbestaanbare uitdrukking; die wij hier zullen verwaarloozen. — Voor $Q=338$, verkrijgt

Digitized by Google

men voor $r = R = 2$ of $\frac{1}{2}$, en voor $Q = 270$, verkrijgt men

$$r = R = {}^{10}/_{3} \text{ of } {}^{3}/_{10}.$$

Neemt men nu voor r achtereenvolgens 2, $^1/_2$, $^{10}/_3$ en $^3/_{10}$, dan bekomt men voor

$$a = \pm 10, \quad \pm 20, \quad \pm 6, \quad \pm 20$$
$$\text{en} \quad b = \pm 3, \quad \pm 6, \quad \pm 3, \quad \pm 10.$$

Derhalve, daar de negatieve waarden in geene aanmerking kunnen komen, kan de evenredigheid zijn:

$$10 : 20 = 3 : 6$$
$$20 : 10 = 6 : 3$$
$$6 : 20 = 3 : 10$$
$$20 : 6 = 10 : 3$$

of de evenredigheid, welke met de verschillende rangschikkingen der termen aan de opgave voldoet, is $10 : 20 = 3 : 6$.

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

Zij de evenredigheid $x : y = z : v$, dan is volgens opgave:

$$x + y + z + v = p, \ldots\ldots \quad (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = q. \ldots\ldots \quad (2)$$
$$\text{en} \quad x^4 + y^4 + z^4 + v^4 = r. \ldots\ldots \quad (3)$$

Nemen wij nu nog de hulp-vergelijkingen:

$$xv = yz = a. \ldots\ldots \quad (4)$$
$$\text{en} \quad x - y - z + v = b, \ldots\ldots \quad (5)$$

dan hebben wij zes vergelijkingen met zes onbekende grootheden, waarvan wij vooreerst a en b zullen trachten te bepalen.

Daartoe geeft het produkt van (1) en (5):

$$(x + v)^2 - (y + z)^2 = bp$$

of wijl $xv = yz$ is:

$$x^2 - y^2 - z^2 + v^2 = bp. \ldots\ldots \quad (6)$$

Verder geeft het vierkant van (1):

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + 2xy + 2xz + 2xv + 2yz + 2yv + 2zv = p^2$$

en dus in verband met (2) en (4):

$$2xy + 2xz + 2yv + 2zv = p^2 - q - 4a. \ldots \quad (7)$$

Evenzoo geeft het vierkant van (5):

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 - 2xy - 2xz + 2xv + 2yz - 2yz - 2zv = b^2$$

en derhalve ook:

$$2xy + 2xz + 2yv + 2zv = q + 4a - b^2.$$

Door gelijkstelling met (7) volgt hieruit:

$$p^2 - q - 4a = q + 4a - b^2$$

Digitized by Google

of $$b^2 - 8a = 2q - p^2 \ldots\ldots\ldots (8)$$

Uit (4) volgt echter $x^2v^2 = y^2z^2 = a^2$ en deze vergelijking en (6) zijn ten opzichte van (2) en (3), wat (4) en (5) zijn met betrekking tot (1) en (2), zoodat wij ook moeten hebben:

$$b^2p^2 - 8a^2 = 2r - q^2 \ldots\ldots\ldots (9)$$

Door nu (8) met p^2 te vermenigvuldigen en haar alsdan met (9) te verminderen, vinden wij:

$$a^2 - ap^2 = \tfrac{1}{8}(q^2 + 2p^2q - p^4 - 2r)$$

of na oplossing:

$$a = \tfrac{1}{4}[2p^2 \pm \sqrt{2(q + p^2)^2 - 4r}] \ldots\ldots (10)$$

Door substitutie in (8) volgt hieruit:

$$b = \pm\sqrt{2q - p^2 + 8a} = \text{enz.} \ldots\ldots (11)$$

Verder volgt uit (1) en (5):

$$x + v = \frac{p + b}{2} \quad \text{en} \quad y + z = \frac{p - b}{2},$$

daar nu $xz = yv = a$ is, zijn dus de waarden van x en v de wortels der vergelijking:

$$X^2 - \frac{p + b}{2}X + a = 0,$$

dus $$\left.\begin{matrix} x \\ v \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}[p + b \pm \sqrt{(p + b)^2 - 16a}]$$

en de waarden van y en z die der vergelijking:

$$Y^2 - \frac{p - b}{2}Y + a = 0,$$

derhalve: $$\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}[p - b \pm \sqrt{(p - b)^2 - 16a}].$$

Substituëeren wij nu de gegeven waarden voor p, q en r, dan vinden wij uit (10):

$$a = \tfrac{1}{4}[3042 \pm \sqrt{2(2066)^2 - 685508}] = \tfrac{1}{4}[3042 \pm 2802],$$

dus $$a = 1461 \quad \text{en} \quad a = 60,$$

daar de eerste waarde tot onbestaanbare vormen voert, nemen we alleen $a = 60$. Deze geeft:

$$b = \pm\sqrt{(1090 - 1521 + 480)} = \pm 7;$$

voor $b = +7$ vinden wij verder:

$$\left.\begin{matrix} x \\ v \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}[46 \pm \sqrt{(46^2 - 960)}] = 20 \text{ of } = 3$$

en $$\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}[32 \pm \sqrt{(32^2 - 960)}] = 10 \text{ of } = 6,$$

Digitized by Google

$b = -7$ geeft voor x en v de waarden, die wij hier voor y en z vonden, en omgekeerd. De eenige evenredigheid, die (met al hare verschillende rangschikkingen der termen) aan de opgave voldoet, is dus:

$$3:6 = 10:20.$$

LXIX. Voorstel. (*)

Door J. Versluijs.

Bewijs de formule

$$\int_0^{\phi} \frac{Sin^2\phi}{\Delta}\, d\phi = \frac{F-E}{k^2}, \text{ waarin } \Delta = \sqrt{(1-k^2\, Sin^2\phi)}$$

$$F = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\Delta},\ E = \int_0^{\phi} \Delta\, d\phi.$$

Opgelost *door* J. Versluijs, D. B. Wisselink, M. C. Paraira, A. Benthem Gz. *en* H. Japikse.

Oplossing *van* J. Versluijs.

Wij hebben

$$\int_0^{\phi} \frac{Sin^2\phi}{\Delta} d\phi = \int_0^{\phi} \frac{k^2 Sin^2\phi}{k^2\Delta} d\phi = \int_0^{\phi} \frac{k^2\, Sin^2\phi}{k^2\sqrt{(1-k^2 Sin^2\phi)}} d\phi =$$

$$\int_0^{\phi} \frac{1-(1-k^2\, Sin^2\phi)}{k^2\sqrt{(1-k^2\, Sin^2\phi)}} d\phi = \int_0^{\phi} \frac{1}{k^2\sqrt{(1-k^2\, Sin^2\phi)}} d\phi -$$

$$\int_0^{\phi} \frac{1-k^2\, Sin^2\phi}{k^2\sqrt{(1-k^2\, Sin^2\phi)}} d\phi.$$

Deelt men teller en noemer der laatste breuk door $\sqrt{(1-k^2\, Sin^2\phi)}$ en past men vervolgens de aangegeven verkorte schrijfwijzen toe, dan heeft men:

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{k^2\Delta} - \int_0^{\phi} \frac{\Delta d\phi}{k^2} = \frac{F}{k^2} - \frac{E}{k^2} = \frac{F-E}{k^2}.$$

Aanm. Wanneer men de twee leden der gevonden vergelijking aftrekt van de overeenkomstige leden der identieke vergelijking

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\Delta} = \frac{k^2 F}{k^2},$$

vindt men:

(*) Dit voorstel en de twee volgende zijn zonder bewijs opgegeven door Schlömilch, *Elliptische Integralen*, bl. 295.

Digitized by Google

$$\int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta} - \int_0^\Phi \frac{Sin^2\Phi}{\Delta} d\Phi = \frac{k^2 F}{k^2} - \frac{F - E}{k^2}. \text{ of}$$

$$\int_0^\Phi \frac{Cos^2\Phi}{\Delta} d\Phi = \frac{E - (1 - k^2)F}{k^2},$$

eene formule, door SCHLÖMILCH ook ter aangehaalde plaats gegeven.

LXX. VOORSTEL.

Door J. VERSLUIJS.

Bewijs de formule $\int_0^\Phi \frac{Tang^2\Phi}{\Delta} d\Phi = \frac{\Delta\, Tang\,\Phi - E}{1 - k^2}$,

waarin Δ *en* E *dezelfde beteekenis hebben als in* N°. 69.

OPGELOST *door* J. VERSLUIJS, A. BENTHEM GZ., M. C. PARAIRA, D. B. WISSELINK *en* H. JAPIKSE.

OPLOSSING *van* J. VERSLUIJS.

Door differentiatie, vindt men:

$$d.\Delta\, tg\,\Phi. = \Delta\, Sec^2\Phi.d\Phi - \frac{k^2\, Sin^2\Phi}{\Delta} d\Phi$$

$$= \Delta.d\Phi + \frac{\Delta^2\, tg^2\Phi}{\Delta} d\Phi - \frac{k^2\, Sin^2\Phi}{\Delta} d\Phi$$

$$= dE + \frac{1 - k^2 + k^2 Cos^2\Phi}{\Delta} tg^2\Phi.d\Phi - \frac{k^2 Sin^2\Phi}{\Delta} d\Phi$$

$$= dE + \frac{1 - k^2}{\Delta} tg^2\Phi.d\Phi + \frac{k^2 Sin^2\Phi}{\Delta} d\Phi - \frac{k^2 Sin^2\Phi}{\Delta} d\Phi.$$

De twee laatste differentialen vallen weg tegen elkaar, en door integratie van het eerste en het laatste lid der voorgaande vergelijking vindt men:

$$\Delta\, tg\,\Phi = E + (1 - k^2) \int_0^\Phi \frac{tg^2\Phi.d\Phi}{\Delta}, \text{ waaruit volgt:}$$

$$\int_0^\Phi \frac{tg^2\Phi}{\Delta} d\Phi = \frac{\Delta\, tg\,\Phi - E}{1 - k^2}.$$

LXXI. VOORSTEL.

Door J. VERSLUIJS.

Bewijs de formule $\int_0^\Phi \frac{1}{\Delta^3} d\Phi = \frac{1}{1 - k^2}\left(E - \frac{k^2 Sin\Phi Cos\Phi}{\Delta}\right)$,

waarin Δ *en* E *dezelfde beteekenis hebben als in* N°. 69.

Digitized by Google

OPGELOST *door* J. VERSLUIJS, D. B. WISSELINK, M. C. PARAIRA *en* A. BENTHEM GZ.

OPLOSSING *van* J. VERSLUIJS.

Door differentiatie vindt men:

$$d\frac{k^2 \, Sin\,\phi \, Cos\,\phi}{\sqrt{(1-k^2 Sin^2\phi)}} = \frac{-k^2 \, Sin^2\phi \, d\phi}{\sqrt{(1-k^2 Sin^2\phi)}} + \frac{k^2 \, Cos^2\phi \, d\phi}{\sqrt{(1-k^2 Sin^2\phi)}}$$
$$+\frac{k^4 \, Sin^2\phi \, Cos^2\phi \, d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \, Sin^2\phi)^3}}.$$

Voor den eersten term in het tweede lid dezer vergelijking kan men schrijven:

$$\frac{1-k^2 \, Sin^2\phi}{\sqrt{(1-k^2 \, Sin^2\phi)}} d\phi - \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2 Sin^2\phi)}} \text{ of}$$
$$\Delta d\phi - \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \, Sin^2\phi)}}.$$

Voor den tweeden term van dat lid kan men schrijven:

$$\frac{k^2 \, Cos^2\phi \, d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \, Sin^2\phi)^3}} - \frac{k^4 \, Sin^2\phi \, Cos^2\phi}{\sqrt{(1-k^2 \, Sin^2\phi)^3}} d\phi.$$

Telt men den derden term van hetzelfde lid op bij de twee voorgaande vormen, dan vindt men:

$$d\frac{k^2 Sin\phi Cos\phi}{\sqrt{(1-k^2 Sin^2\phi)}} = \Delta d\phi - \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2 Sin^2\phi)}} + \frac{k^2 Cos^2\phi \, d\phi}{\sqrt{(1-k^2 Sin^2\phi)^3}}.$$

Voor den tweeden term van het tweede lid dezer vergelijking kan men in de plaats stellen

$$-\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \, Sin^2\phi^2}} + \frac{k^2 \, Sin^2\phi \, d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \, Sin^2\phi)^3}}.$$

De voorgaande vergelijking wordt daardoor:

$$d\frac{k^2 \, Sin\,\phi \, Cos\,\phi}{\sqrt{(1-k^2 \, Sin^2\phi)}} = \Delta \, d\phi - (1-k^2)\frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \, Sin^2\phi)^3}}.$$

Door integratie tusschen 0 en ϕ wordt deze vergelijking:

$$\frac{k^2 \, Sin\,\phi \, Cos\,\phi}{\sqrt{(1-k^2 \, Sin^2\phi)}} = E - (1-k^2)\int_0^\phi \frac{d\phi}{\Delta^3},$$

waaruit volgt $\displaystyle\int_0^\phi \frac{d\phi}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2}\left(E - \frac{k^2 \, Sin\,\phi \, Cos\,\phi}{\Delta}\right).$

LXXII. VOORSTEL.

Door R. R. LIT.

Men vraagt te integreren $\dfrac{Cot^2\phi \, d\phi \, (Sec^2\phi - 2)}{Tang^4\phi - 3Tang^2\phi + 3}.$

Digitized by Google

Opgelost *door* R. R. Lit, A. Benthem Gz., H. Japikse, M. C. Paraira *en* D. B. Wisseling.

Oplossing *van* R. R. Lit.

Stellen we in den opgegeven vorm $cot^2\phi = \frac{1}{tang^2\phi}$ en $sec^2\phi = tang^2\phi + 1$, dan gaat ze over in:

$$\frac{d(tang^2\phi - 1)}{tang^2\phi\,(tang^4\phi - 3\,tang^2\phi + 3)}.$$

Stellen we nu $tang^2\phi = x + 1$, en noemen we de integraal y, dan is

$$dy = \frac{dx}{x^3 + 1},$$

dus $y = \int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} Log \frac{1+x}{\sqrt{(1-x+x^2)}} + \frac{1}{\sqrt{3}} B.\, tg \frac{x\sqrt{3}}{2-x} + C,$

of na substitutie:

$$y = \frac{1}{3} Log \frac{tang^2\phi}{\sqrt{(tang^2\phi - 3tang^4\phi + 3)}} + \frac{1}{\sqrt{3}} B.tang \frac{tang^2\phi - 1}{(3 - tang^2\phi)}\sqrt{3}.$$

LXXIII. Voorstel.

Door A. Benthem Gz.

Iemands inkomen bestaat voor een deel uit een tractement van P gulden jaarlijks en voor de rest uit den interest à p % van een kapitaal groot K gulden, bij hetwelk hij elk jaar het bespaarde voegt; zijne uitgaaf bedraagt ieder jaar Q gulden minder dan het $\left(\frac{q+1}{q}\right)^{de}$ *gedeelte van zijn inkomen. Als nu ondersteld wordt dat p kleiner is dan 100q en het oorspronkelijke kapitaal K in n jaren verdubbeld is, vraagt men eene eenvoudige betrekking tusschen de gegeven getalwaarden op te sporen. Tot toepassing bepale men de waarde van n, die overeenkomt met* $P = 1600$, $K = 2975$, $Q = 500$, $p = 4$ *en* $q = 5$.

Opgelost *door* A. Benthem Gz., M. C. Paraira, P. C. F. Frowein *en* D. B. Wisseling.

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

Laat het oorspronkelijke kapitaal K bij het begin van zeker jaar tot A gulden zijn aangegroeid, dan zal zijn inkomen dàt jaar

$$P + \frac{pA}{100},$$

of als wij $\frac{p}{100} = r$ stellen:

Digitized by Google

$$P + rA$$

gulden bedragen. Volgens de opgave zal hij dàt jaar het $\left(\frac{q+1}{q}\right)^{de}$ gedeelte van dit inkomen min Q gulden uitgeven, en dus aan het einde van dàt jaar Q gulden min $\left(\frac{1}{q}\right)^{de}$ van dit inkomen bij het verkregen kapitaal kunnen voegen, dat is:

$$Q - \frac{P + rA}{q} \text{ gulden} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Zal nu dit kapitaal A geene verandering ondergaan, dan moet

$$Q - \frac{P + rA}{q} = 0$$

en dus

$$A = \frac{qQ - P}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

zijn. Stellen wij deze bijzondere waarde van A door N voor, dan kan men gemakkelijk aantoonen, dat wat de waarde van het oorspronkelijke kapitaal K ook zij, zijne vermeerderde waarde steeds tot N zal naderen, wanneer aan de gestelde voorwaarde $r < q$ wordt voldaan.

Zij daartoe vooreerst het kapitaal bij het begin van zeker jaar kleiner dan N en wel gelijk aan $N - V$, dan wordt het dàt jaar volgens (1) vermeerderd met

$$Q - \frac{P + r(N - V)}{q},$$

of wanneer wij hierin de waarde van N uit (2) substitueeren, met

$$Q - \frac{P + r\left(\frac{qQ - P}{r} - V\right)}{q},$$

dat is met

$$\frac{r}{q} V \text{ gulden.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Het kapitaal wordt dus grooter en wijl $r < q$, kunnen wij besluiten, dat het tot N zal naderen, maar nimmer gelijk aan N zal kunnen worden, daar er elk jaar slechts het $\left(\frac{r}{q}\right)^{de}$ gedeelte bijkomt van hetgeen er aan ontbreekt. Het ontbrekende op het einde van eenig jaar zal dus steeds het $\left(\frac{q-r}{q}\right)^{de}$ ge-

Digitized by Google

deelte bedragen van het ontbrekende bij het begin van dat jaar . . . . . (α)

Zij vervolgens bij het begin van zeker jaar het kapitaal grooter dan N, bij voorbeeld $N + V$ gulden, dan wordt er volgens (1) dat jaar

$$Q - \frac{P + r(N+V)}{q}$$

of na herleiding

$$-\frac{r}{q}V \text{ gulden}$$

bijgevoegd, dat is er wordt $\frac{r}{q}V$ gulden afgenomen; het kapitaal wordt dus kleiner en in verband met het straks gezegde kunnen wij besluiten, dat het onophoudelijk tot N nadert, zonder ooit gelijk aan N te worden.

Zal nu het kapitaal K kunnen verdubbeld worden, dan moet het kleiner zijn dan $\frac{1}{2}N$, dus ook kleiner dan N; bovenstaande conclusie (α) is derhalve hier van toepassing: noemen wij dus het verschil van N en K, V, dan is dit verschil aan het einde van het eerste jaar $\frac{q-r}{q}V$, aan het einde van het tweede jaar $\left(\frac{q-r}{q}\right)^2 V$, enz, en in 't algemeen aan het einde van het n^{de} jaar $\left(\frac{q-r}{q}\right)^n V$. Alsdan is echter het kapitaal verdubbeld en dus het verschil $V - K$ of wat hetzelfde is $N - 2K$ geworden. Wij hebben dus:

$$\left(\frac{q-r}{q}\right)^n V = V - K$$

of

$$\left(\frac{q-r}{q}\right)(N - K) = N - 2K,$$

dat is, na substitutie der waarde van N en r:

$$\left(\frac{100q - p}{100q}\right)^n \left(\frac{qQ - P}{p} - \frac{K}{100}\right) = \frac{qQ - P}{p} - \frac{K}{50}, \quad . \quad (4)$$

zijnde de gevraagde betrekking.

Zal aan deze in den eigenlijken zin kunnen voldaan worden, dan moet $\frac{qQ - P}{p} > \frac{K}{50}$, hetgeen ook uit de voorwaarde $K < \frac{1}{2}N$ volgt.

Digitized by Google

Substitueert men nu in de gevonden betrekking (4) de gegeven getalwaarden, dan verkrijgt men na eene lichte herleiding: $(0{,}992)^n = \frac{662}{781}$

of $n = \frac{\log 662 - \log 781}{\log 0{,}992} = \frac{717930}{34883} = 20$ jaren, 7 maanden nagenoeg.

Aanmerking. Was $100q = p$, dan zou het kapitaal aan het einde van het eerste jaar reeds N gulden worden en alsdan standvastig blijven.

Voor $100q < p$ is $\frac{r}{q}V > V$, zoodat alsdan de waarde van het kapitaal om het andere jaar grooter en kleiner dan N zou zijn. Is hierbij $200q < p$, dan nadert het meer en meer tot N; voor $200q > p$ zal het er zich meer en meer van verwijderen en voor $200q = p$ zal het om het andere jaar K en $2N - K$ gulden bedragen.

Is wel $100q > p$, maar $\frac{qQ - P}{p} < \frac{K}{100}$, dan wordt $\left(\frac{100q - p}{100q}\right)^n > 1$ en dus het vraagstuk onmogelijk, tenzij $p < 0$ zij.

Is daarentegen $\frac{K}{100} < \frac{qQ - P}{p} < \frac{K}{50}$, dan wordt $\left(\frac{100q - p}{100q}\right)$ negatief en dus het vraagstuk onbestaanbaar.

Oplossing *van* M. C. Paraira.

Onderstelt men dat het inkomen in eenig jaar I gulden bedraagt, dan wordt in dat jaar $I - I\frac{q+1}{q} + Q = Q - \frac{I}{q}$ bespaard, waardoor het inkomen voor het volgend jaar wordt

$$I + \left(Q - \frac{I}{q}\right)\frac{p}{100} = I\left(1 - \frac{p}{100q}\right) + \frac{Qp}{100},$$

(of stellende $1 - \frac{p}{100q} = a$, zoodat a volgens de onderstelling eene breuk is en positief) $= aI + qQ(1 - a)$.

Nu bedraagt het inkomen

in het eerste jaar $P + \frac{pK}{100}$,

dus in het tweede jaar $\left(P + \frac{pK}{100}\right)a + qQ(1 - a)$,

Digitized by Google

in het derde jaar $\left(P+\frac{pK}{100}\right)a^2+qQ(1-a)\{a+1\}$,

in het vierde » $\left(P+\frac{pK}{100}\right)a^3+qQ(1-a)\{a^2+a+1\}$,

$\vdots$

in het $(n+1)^e$ » $\left(P+\frac{pK}{100}\right)a^n+qQ(1-a)\{a^{n-1}+a^{n-2}\ldots+1\}$.

Nu is echter na n jaren het kapitaal verdubbeld en dus kan het inkomen in het $(n+1)^e$ jaar ook voorgesteld worden door $P+\frac{2pK}{100}$, zoodat

$$P+\frac{2pK}{100}=\left(P+\frac{pK}{100}\right)a^n+qQ(1-a)\left\{\frac{a^n-1}{a-1}\right\}$$
$$=\left(P+\frac{pK}{100}\right)a^n-qQ(a^n-1)$$
$$=\left(P+\frac{pK}{100}-qQ\right)a^n+qQ.$$

$$a_n=\left(1-\frac{p}{100q}\right)^n=\frac{P+2K\frac{p}{100}-qQ}{P+K\frac{p}{100}-qQ}.$$

Brengende hierin de waarden ter toepassing opgegeven, dan verkrijgt men:

$$\left(\frac{496}{500}\right)^n=\left(\frac{124}{125}\right)^n=\frac{662}{781},$$

$$n=\frac{log.\,781-log.\,662}{log.\,125-log.\,124}=20 \text{ jaren, } 7 \text{ maanden nagenoeg.}$$

LXXIV. Voorstel.

Door W. van Haarst.

De punten, waarin de verlengde zijden eens ingeschreven driehoeks de raaklijnen van den cirkel aan de overstaande hoekpunten snijden, liggen in ééne rechte lijn. Vrage een analytisch bewijs.

Opgelost *door* W. van Haarst, P. C. F. Frowein, A. Psicha, D. B. Wisselink, M. C. Paraira *en* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* P. C. F. Frowein.

De raaklijn aan het hoekpunt A en de verlengde zijde BC snijden zich in het punt E (zie fig. 25), de raaklijn aan

Digitized by Google

C en de verlengde zijde AB in het punt F, de raaklijn aan B en de verlengde zijde AC in het punt G. Men stelle nu dat in het middelpunt van den omschreven cirkel de oorsprong en eene lijn, evenwijdig aan eene der zijden van den driehoek b. v. BC, de as der abscissen van een rechthoekig coördinatenstelsel zij en voor de coördinaten van A, x_1, y_1, voor die van B, $-x_2, y_2$, voor die van C x_2, y_2, dan is

de vergelijking van BC $y = y_2$,

» » » AB $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2}(x - x_1)$,

» » » AC $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$,

» » » AE $xx_1 + yy_1 = r^2$,

» » » BG $-xx_2 + yy_2 = r^2$,

» » » CF $xx_2 + yy_2 = r^2$,

zijnde r de straal van den cirkel.

Noeme men nu de coördinaten van E x', y', die van F x'', y'', die van G x''', y''', dan is, daar E op de lijnen BC en AE ligt: $x'x_1 + y'y_1 = r^2$, $y' = y_2$,

derhalve:
$$x' = \frac{r^2 - y_1 y_2}{x_1}.$$

Daar F op de lijnen AB en CF ligt:

$$x''x_2 + y''y_2 = r^2, \quad y'' - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2}(x'' - x_1),$$

waaruit volgt:

$$x'' = \frac{r^2 x_1 + r^2 x_2 - x_1 y_2^2 - x_2 y_1 y_2}{x_2^2 - y_2^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2}; \quad y'' = \frac{r^2 y_1 - r^2 y_2 + x_1 x_2 y_2 + x_2^2 y_1}{x_2^2 - y_2^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2}.$$

Eindelijk, daar G ligt op BG en AC:

$$x'''x_2 + y'''y_2 = r^2, \quad y''' - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x''' - x_1).$$

Opdat nu E, F, G in ééne rechte lijn liggen, moet

$$\frac{y''' - y'}{x''' - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \text{ zijn}$$

en dit bevindt men werkelijk zoo, wanneer men in deze vergelijking de waarden van $x', y', x'', y'', x''', y'''$ substitueert. De punten E, F, G liggen derhalve in ééne rechte lijn.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* D. B. WISSELINK.

Zij ABC de bedoelde driehoek in cirkel OA en laten de verlengde zijden des driehoeks de bedoelde raaklijnen in G, E en F snijden.

Nemen we in 't Cartesiaansche ordinatenstelsel

verg. BC . . . $\alpha = 0$,
verg. AC . . . $\beta = 0$,
verg. AB . . . $\gamma = 0$.

De verg. van den omschreven cirkel is, wanneer a, b, c de zijden van den driehoek voorstellen:

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zij raaklijn BG $\alpha + p\gamma = 0$, ... (2)
want het is eene rechte door 't snijpunt van $\alpha = 0$ en $\gamma = 0$.

Om p te bepalen elimineeren we α tusschen (1) en (2) en vinden dan:

$$a\beta\gamma - bp\gamma^2 - cp\beta\gamma = 0 \text{ of } a\frac{\gamma}{\beta} - bp\frac{\gamma^2}{\beta^2} - cp\frac{\gamma}{\beta} = 0.$$

Zal BG eene raaklijn zijn aan (1), dan moet de laatste verg. ten opzichte van $\frac{\gamma}{\beta}$ gelijke wortels hebben, derhalve $a - cp = 0$, dus $p = \frac{a}{c}$ zijn, derhalve is de verg. der raaklijn BG, $\alpha + \frac{a}{c}\gamma = 0$ of $\frac{\alpha}{a} + \frac{\gamma}{c} = 0$. Evenzoo is nu raakl. AE, $\frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0$ en raakl. CF, $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 0$.

Het punt E wordt nu bepaald uit:

$\alpha = 0$ en $\frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0$, G uit $\beta = 0$ en $\frac{\alpha}{a} + \frac{\gamma}{c} = 0$ en F uit $\gamma = 0$ en $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 0$

en onmiddellijk zien we in, dat deze punten gelegen zijn op de rechte $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0$.

OPLOSSING *van* A. BENTHEM GZ.

Wordt de ingeschreven driehoek tot assendriehoek aangenomen, dan heeft men voor de raaklijnen in de hoekpunten de vergelijkingen (FERRERS, N. M., bl. 30):

$$\frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0, \quad \frac{\gamma}{c} + \frac{\alpha}{a} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 0.$$

Digitized by Google

Voor de bedoelde snijpunten verkrijgt men dus:

$$\alpha = 0, \quad \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0,$$

$$\beta = 0, \quad \frac{\gamma}{c} + \frac{\alpha}{a} = 0$$

$$\text{en } \gamma = 0, \quad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 0.$$

Hierdoor wordt klaarblijkelijk voldaan aan:

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0,$$

zijnde de vergelijking eener rechte lijn.

LXXV. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Hetzelfde als in N°. 74 *meetkundig te bewijzen, en bovendien de verlengden der zijden, benevens de afstanden van de snijpunten onderling, zoowel als die welke zij van het middelpunt des cirkels hebben en de lengte der raaklijnen in de waarden der zijden des ingeschreven driehoeks uit te drukken.*

Opgelost *door* W. van Haarst, P. C. F. Frowein *en* D. B. Wisselink.

Oplossing *van* P. C. F. Frowein *en* D. B. Wisselink.

Zij (zie fig. 26) M het middelpunt van den cirkel om den driehoek ABC omschreven: verleng de zijde BC en de raaklijn aan A totdat zij elkander snijden in D, de zijde AB en de raaklijn aan C totdat zij elkander snijden in E, en de zijde AC en de raaklijn aan B totdat zij elkander snijden in F. Nu moet bewezen worden, dat de punten D, E en F op ééne rechte lijn liggen.

Verleng de getrokken raaklijnen totdat zij elkander snijden; dan ontstaat een driehoek GHK, in welken CG = AG, CK = BK en BH = AH. Derhalve:

$$AG \times CK \times BH = CG \times BK \times AH.$$

Trekken wij nu de lijnen AK, BG, CH, dan snijden deze zich in één punt O binnen den driehoek GHK gelegen. Door deze snijding ontstaan drie volkomen vierhoeken: KCGOHB, GAHOKC, HBKOGA, welke respectivelijk tot derde diagonalen hebben de zijden HG, HK en GK van den driehoek HGK,

Digitized by Google

Nu wordt de diagonaal GH door de lijn KO in A, KH door de lijn GO in B, GK door de lijn HO in C gedeeld en daar het punt A op de lijn HD, het punt B op de lijn KF, het punt C op de lijn KE ligt, zoo wordt GH in A en D, HK in B en F, HG in C en E harmonisch gedeeld, en men heeft de evenredigheden:

$$HD : GD = AH : AG,$$
$$GE : KE = GC : CK,$$
$$FK : FH = BK : BH,$$

derhalve:

$$HD \times GE \times FK : GD \times KE \times FH = AH \times CG \times BK : AG \times CK \times BH$$

of daar $AH \times CG \times BK = AG \times CK \times BH$

$$HD \times GE \times FK = GD \times KE \times FH$$

en liggen dus D, E en F op eene rechte lijn DEF, welke als eene transversaal van den driehoek GHK kan beschouwd worden.

Nu is (zie de figuur) $\angle DAC = \angle B$, $\triangle DAC \backsim \triangle DAB$,

$CD : AD = AC : AB$, ook $CD : AD = AD : BD$,

$CD : AD = b : c \qquad = AD : CD \div a$,

waaruit volgt:

$$AD = \frac{abc}{c^2 - b^2}, \quad CD = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}, \quad BD = \frac{ac^2}{c^2 - b^2}.$$

Op gelijke wijze vindt men:

$$CE = \frac{abc}{a^2 - b^2}, \quad BE = \frac{a^2c}{a^2 - b^2}, \quad AE = \frac{b^2c}{a^2 - b^2},$$

$$FB = \frac{abc}{a^2 - c^2}, \quad CF = \frac{a^2b}{a^2 - c^2}, \quad AF = \frac{bc^2}{a^2 - c^2}.$$

Nu zijn AD, CE en FB de raaklijnen, CD, AF en AE de verlengden der zijden a, b, c van den ingeschreven driehoek, aldus in de waarden der zijden van dien driehoek uitgedrukt. Wij hebben volgens de opgave hetzelfde nog te doen voor de afstanden der snijpunten onderling en voor de afstanden der punten D, E en F tot het middelpunt des omschreven cirkels.

Men heeft

$$\square EF = \square AF + \square AE - 2 \text{ rechth. } (AF, AE) \times Cos \angle FAE$$
$$= \square AF + \square AE - 2AF \times AE \times Cos\, A,$$

Digitized by Google

en na substitutie en herleiding:

$$EF = \frac{abc}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\sqrt{(a^4+b^4+c^4-a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2)},$$

en evenzoo vinden wij:

$$ED = \frac{abc}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}\sqrt{(a^4+b^4+c^4-a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2)},$$

waaruit:

$$DF = \frac{abc}{(a^2-c^2)(c^2-b^2)}\sqrt{(a^4+b^4+c^4-a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2)}.$$

Vereenig nu het middelpunt van den omschreven cirkel met de punten D, E en F; en noemende R den straal des cirkels, heeft men volgens eene bekende stelling:

$$\square\, FB = (FM+R)(FM-R) = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-c^2)^2},$$

waaruit volgt: $\square\, FM = \square\, R + \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-c^2)^2}$.

Noemende I den inhoud des driehoeks ABC, heeft men:

$$\square\, FM = \frac{a^2b^2c^2}{16I^2} + \frac{a^2b^2c^2}{(a^2-c^2)^2},$$

$$FM = abc.\frac{\sqrt{(16I^2+(a^2-c^2)^2)}}{4I(a^2-c^2)}.$$

Maar: $16I^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$,

derhalve: $FM = ab^2c.\frac{\sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)}}{4I(a^2-c^2)}$.

Op gelijke wijze vindt men:

$$EM = abc^2\frac{\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}}{4I(a^2-b^2)}$$

en

$$DM = a^2bc\frac{\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)}}{4I(c^2-b^2)}.$$

LXXVI. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Vrage naar de trilineaire coördinaten van het zwaartepunt Z des driehoeks, wiens hoekpunten zijn de middelpunten O_a, O_b, O_c *der eenen driehoek aangeschreven cirkels.*

OPGELOST *door* C. J. MATTHES *en* M. C. PARAIRA.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Laat L, M, N achtervolgens het midden van O_bO_c,

Digitized by Google

O_cO_a, O_aO_b zijn, welke punten respectivelijk met O_a, O_b, O_c moeten vereenigd worden, als wanneer het gemeenschappelijk snijdingspunt dier lijnen het bewuste zwaartepunt zijn zal.

Nu weten wij dat de den assendriehoek ABC omgeschreven cirkel

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

door de punten L, M, N heengaat. Combineeren wij dus de vergelijkingen $\beta+\gamma=0$, $\gamma+\alpha=0$, $\alpha+\beta=0$ van O_bO_c, O_cO_a, O_aO_b met die vergelijking, zoo vinden wij voor de coördinaten van L: a, $-(b-c)$, $(b-c)$;

van M: $(c-a)$, b, $-(c-a)$;

van N: $-(a-b)$, $(a-b)$, c.

Die van O_a, O_b, O_c zijn $(-1, 1, 1)$; $(1, -1, 1)$; $(1, 1, -1)$; waaruit volgt voor de lijnen

$$\left.\begin{array}{ll} LO_a: & \alpha(b-c)+\beta(s-c)-\gamma(s-b)=0 \\ MO_b: & \alpha(s-c)-\beta(c-a)-\gamma(s-a)=0 \\ NO_c: & \alpha(s-b)-\beta(s-a)+\gamma(a-b)=0 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \quad (2)$$

en voor het doorsnijdingspunt Z:

$$\frac{\alpha}{(a-b)(c-a)+(s-a)^2}=\frac{\beta}{(a-b)(s-c)+(s-a)(s-b)}$$

$$=\frac{\gamma}{(s-c)(s-a)-(c-a)(s-b)},$$

of na eene lichte herleiding:

$$\frac{\alpha}{a(s-a)-(s-b)(s-c)}=\frac{\beta}{b(s-b)-(s-c)(s-a)}$$

$$=\frac{\gamma}{c(s-c)-(s-a)(s-b)}=\frac{2I}{6(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{3r}. \quad (3)$$

LXXVII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

De vergelijking eener parabel zij $y^2+px=0$ en die eens cirkels $y^2+(x-b)^2=r^2$. Men begeert de coördinaten te bepalen van een punt in den omtrek van dien cirkel, zoo gesteld, dat de hoek, dien de beide raaklijnen, uit dat punt aan de parabel getrokken, met elkander maken, een maximum of een minimum zij, en wel uitsluitend door de gewone toepassing der differentiaal-quotiënten.

Digitized by Google

OPGELOST *door* W. VAN HAARST, M. C. PARAIRA *en* D. B. WISSELINK.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Laat de vergelijking der parabel $y^2 = -px$ zijn, dan is die van hare raaklijn in het punt (m, n), $ny = -\frac{1}{2}p(x+m)$ (a) Laten wij deze nu door eenig punt (a, a_1) buiten de parabel gaan, dan moet $a_1 n = -\frac{1}{2}p(a+m)$ wezen en, daar het punt (m, n) op de parabel ligt, is $n^2 = -mp$. Lost men m en n uit deze beide vergelijkingen op, dan vindt men gemakkelijk

$$m = \frac{-(2a_1^2 + ap) \pm 2a_1\sqrt{(a_1^2 + ap)}}{p}$$

$$\text{en } n = \frac{p(a+m)}{2a_1} = a_1 \mp \sqrt{(a_1^2 + ap)}.$$

De vergelijking van de beide raaklijnen, die door het punt (a, a_1) gaan, is dus door (a)

$$\{a_1 \mp \sqrt{(a_1^2+ap)}\}y = -\tfrac{1}{2}px - \tfrac{1}{2}\{-(2a_1^2+ap) \pm 2a_1\sqrt{(a_1^2+ap)}\}.$$

Die van de eene is alzoo

$$y = -\frac{p}{2\{a_1 - \sqrt{(a_1^2 + ap)}\}} - \mathrm{P}$$

en die van de andere

$$y = -\frac{p}{2\{a_1 + \sqrt{(a_1^2 + ap)}\}} - \mathrm{P}_1.$$

Noemen wij den hoek dezer raaklijnen ϕ, dan is, zooals bekend is, $tg\,\phi = -\dfrac{4\sqrt{(a_1^2 + ap)}}{4a - p}$

en dus

$$Cos\,\phi = \frac{1}{\sqrt{(1 + tg^2\,\phi)}} = \frac{4a - p}{\sqrt{\{16a_1^2 + (4a+p)^2\}}}$$

$$\text{en } Sin^2\tfrac{1}{2}\phi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,Cos\,\phi = \tfrac{1}{2} - \frac{4a - p}{2\sqrt{\{16a_1^2 + (4a+p)^2\}}},$$

waarbij alleen het positieve teeken voor de wortelgrootheid geldt, daar het negatieve voor $Cos^2\frac{1}{2}\phi$ gebruikt zou moeten worden. Daar nu de gegeven cirkel met zijn middelpunt in de as der x moet liggen, kunnen wij voor zijne vergelijking nemen $y^2 + (x-b)^2 = r^2$, en dan is, daar (a, a_1) op zijn omtrek liggen moet, $a_1^2 = r^2 - (a-b)^2$. Substitueeren wij deze waarde in $Sin^2\frac{1}{2}\phi$, dan wordt

Digitized by Google

$$Sin^2\tfrac{1}{2}\phi = \tfrac{1}{2} - \frac{4a - p}{2\sqrt{\{16r^2 - 16(a-b)^2 + (4a+p)^2\}}}$$

$$= \tfrac{1}{2} - \frac{4a - p}{2\sqrt{\{8(4b+p)a + p^2 - 16(b^2 - r^2)\}}}$$

en nu zal blijkbaar $Sin^2\tfrac{1}{2}\phi$ een maximum of minimum worden, zoodra dit het geval is met

$$y = \frac{p - 4a}{\sqrt{\{8(4b+p)a + p^2 - 16(b^2 - r^2)\}}}$$

en het is gemakkelijk in te zien, dat dit zal plaats hebben, als a zoo klein mogelijk of zoo groot mogelijk genomen wordt. Nu is de grootste waarde voor a natuurlijk $a = b + r$ en de kleinste $a = b - r$. Derhalve is voor de eerste waarde y en dus ook $Sin^2\tfrac{1}{2}\phi$, alsmede ϕ een minimum en voor de tweede een maximum. — Maar dewijl a slechts tusschen die grenzen genomen kan worden, zouden wij op de gewone wijze door middel van de differentiaalquotiënten geheel verkeerde waarden verkregen hebben. Wil men deze wijze volgen, dan is men genoodzaakt voor a eene variabele grootheid in te voeren, welke aan die grenzen niet is gebonden. Daartoe kan onder anderen de hoek dienen, dien de straal des cirkels met de as der abscissen maakt. Noemen wij hem ψ, dan is $a = b + r\,Cos\,\psi$ en door deze waarde te substitueeren, wordt

$$y = \frac{4b - p + 4r\,Cos\,\psi}{\sqrt{\{16r^2 + (4b+p)^2 + 8r(4b+p)\,Cos\,\psi\}}}.$$

Nu vinden wij, de grootheid in den noemer kortheidshalve $\sqrt{A}$ stellende,

$$\frac{dy}{d\psi} = 4r\,Sin\,\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{(4b+p)(4b-p+4r\,Cos\,\psi)}{A\sqrt{A}}\right\}$$

$$= 8r \times \frac{Sin\,\psi\{8r^2 + (4b+p)(p + 2r\,Cos\,\psi)\}}{A\sqrt{A}}$$

en $$\frac{d^2y}{d\psi^2} = 8r \times \frac{Cos\,\psi\{8r^2 + (4b+p)(p + 2r\,Cos\,\psi)\}}{A\sqrt{A}}$$

$$- \frac{16(4b+p)r^2\,Sin^2\psi}{A\sqrt{A}} - 12r \times \frac{Sin\psi\{8r^2 + (4b+p)(p + 2r\,Cos\psi)\}}{A^2\sqrt{A}} \times \frac{dA}{d\psi}.$$

Door $Sin\,\psi = 0$ en door $Cos\,\psi = -\dfrac{8r^2 + p(4b+p)}{2(4b+p)r}$

Digitized by Google

wordt het eerste quotiënt nul. Voor de eerste waarde hebben wij slechts den toestand van den eersten, voor de tweede dien van den tweeden term van het tweede quotiënt te onderzoeken, naardien de overige termen nul worden. Nu wordt voor $Sin\,\psi = 0$, $Cos\,\psi = 1$ en $Cos\,\psi = -1$. Voor de eerste waarde is

$$\frac{d^2y}{d\psi^2} = 8r \times \frac{8r^2 + (p+2r)(4b+p)}{(4b+p+4r)^3},$$

voor de tweede is

$$\frac{d^2y}{d\psi^2} = -8r \times \frac{8r^2 + (p-2r)(4b+p)}{(4b+p-4r)^3}.$$

In het eerste geval wijst de positieve waarde van het quotiënt een minimum voor φ aan; hetwelk derhalve plaats heeft als $\psi = 0°$ is. In het tweede geval wordt voor $p > 2r$ en $b > r$ het quotiënt *negatief* en voor $p < r$ en $b + \frac{1}{4}p > 2r$ positief, en duidt alzoo naar die waarden voor φ een maximum of een minimum aan.

Voor de tweede waarde, welke het eerste quotiënt nul maakt, wordt $\sqrt{A} = \sqrt{\{(4b-p)^2 - 4p^2 - 16r^2\}}$. Zoowel $Cos\,\psi$ en $\sqrt{A}$ zijn bestaanbaar, als $p < r$ en $4b + p > 8r$ of $b + \frac{1}{4}p > 2r$ genomen wordt, en dan is

$$\frac{d^2y}{d\psi^2} = -\frac{2b-p}{\sqrt{\{16b^2 - 8bp - 3p^2 - 16r^2\}}^3}.$$

Bij bovengenoemde bestaanbaarheid zal dus, daar alsdan $2b > p$ is, er nog een maximum bestaan.

Oplossing *van* M. C. Paraira.

Stelt men voor de coördinaten van een punt in het vlak van de parabel $y^2 + px = 0$, x_1 en y_1, zoo moeten de richtingsconstanten a_1 en a_2 van de raaklijnen, uit dit punt aan de parabel getrokken, voldoen aan de voorwaarden

$$a_1 + a_2 = \frac{y_1}{x_1}, \quad a_1 a_2 = -\frac{p}{4x_1}.$$

Nu is de tangens van den hoek ϕ der raaklijnen, $tg\,\phi = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}$,

dus $$tg\,\varphi = \frac{\sqrt{\left(\frac{y_1^2}{x_1^2} + \frac{p}{x_1}\right)}}{1 - \frac{p}{4x_1}} = \frac{4\sqrt{(y_1^2 + px_1)}}{4x_1 - p},$$

Digitized by Google

en dus, daar het punt op den cirkel $y^2 + (x - b)^2 = r^2$ moet liggen, zoodat $y_1^2 = r^2 - (x_1 - b)^2$ moet zijn,

$$tg\,\phi = \frac{4\sqrt{\{r^2 - (x_1 - b)^2 + px_1\}}}{4x_1 - p} \quad \text{of}$$

$$\frac{1}{4}tg\,\phi = y = \frac{\sqrt{\{r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2\}}}{4x_1 - p},$$

van welke functie het maximum of minimum moet gezocht worden. Men heeft $\frac{dy}{dx_1}$

$$= \frac{(4x_1 - p)d\sqrt{\{r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2\}} - \sqrt{\{r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2\}}d(4x_1 - p)}{(4x_1 - p)^2}$$

$$= \frac{(4x_1 - p)\frac{2b + p - 2x_1}{2\sqrt{\{r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2\}}} - 4\sqrt{\{r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2\}}}{(4x_1 - p)^2}$$

$$= \frac{(4x_1 - p)(2b + p - 2x_1) - 8\{r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2\}}{2(4x_1 - p)^2\sqrt{\{r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2\}}}$$

$$= -\frac{(8b + 2p)x_1 - (8b^2 - 8r^2 - 2bp - p^2)}{2(4x_1 - p)^2\sqrt{\{r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2\}}}, \text{ hetgeen}$$

$= 0$ wordt voor $x_1 = \frac{8b^2 - 8r^2 - 2bp - p^2}{8b + 2p}$,

waarmede overeenkomt:

$$y_1 = \frac{\sqrt{\{r^2(2p + 8b)^2 - (8r^2 + 4bp + p^2)^2\}}}{8b + 2p}.$$

Verder is nu

$$\frac{d^2y}{dx_1^2} = -\frac{8b + 2p}{2(4x_1 - p)^2\sqrt{(r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2)}}$$

$$+ \frac{\{(8b + 2p)x_1 - (8b^2 - 8r^2 - 2bp - p^2)\}\,2d[(4x_1 - p)^2\sqrt{(r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2)}]}{4(4x_1 - p)^4(r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2)},$$

hetgeen door substitutie van de bovengevonden waarde van x geeft:

$$\frac{d^2y}{dx_1^2} = -\frac{4b + p}{(4x_1 - p)^2\sqrt{\{r^2 - b^2 + (2b + p)x_1 - x_1^2\}}},$$

waaruit blijkt dat het van de waarden van b en p afhangt, of $tg\,\phi$ en dus ϕ een maximum of minimum is. —

Digitized by Google

LXXVIII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

De vergelijking eener parabel $y^2 - px = 0$ *en eener rechte lijn* $y = mx + n$ *zijn gegeven. Men vraagt in die lijn een punt te vinden, zoo gesteld, dat de hoek, dien de raaklijnen, uit dat punt aan de parabel getrokken, met elkander maken, een maximum of een minimum zij.*

OPGELOST *door* W. VAN HAARST, M. C. PARAIRA *en* D. B. WISSELINK.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Zij de vergelijking der parabel $y^2 = px$, en noemen wij den hoek, dien de beide raaklijnen, welke uit eenig punt (a, a_1) aan de parabel getrokken kunnen worden, met elkander maken ϕ, dan hebben wij uit de oplossing van Voorstel LXXVII, door p in $-p$ te veranderen, $Sin^2\frac{1}{2}\phi = \frac{1}{2} - \frac{4a+p}{2\sqrt{\{16a_1^2 + (4a-p)^2\}}}$. Als nu de vergelijking der gegevene lijn $y = mx + n$ is, dan moet het punt (a, a_1) in deze lijn liggen en dus $a_1 = am + n$ zijn, waardoor dan

$$Sin^2\tfrac{1}{2}\phi = \tfrac{1}{2} - \frac{4a+p}{2\sqrt{\{16(am+n)^2 + (4a-p)^2\}}}$$

wordt. Blijkbaar zal dan $Sin\frac{1}{2}\phi$ of ϕ een maximum worden, als $y = \frac{4a+p}{\sqrt{\{16(am+n)^2 + (4a-p)^2\}}}$ een minimum wordt en omgekeerd. Stellen wij kortheidshalve den noemer $\sqrt{A}$, dan vinden wij door tweemaal te differentiëren ten opzigte van a

$$\frac{dy}{da} = 4\left\{\frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{4m(am+n)(4a+p) + 16a^2 - p^2}{A\sqrt{A}}\right\}$$

$$= 8 \times \frac{2(4mn - m^2p - 2p)a + p^2 - 2mnp + 8n^2}{A\sqrt{A}}$$

en

$$\frac{d^2y}{da^2} = 8\left\{\frac{2(4mn - m^2p - 2p)}{A\sqrt{A}}\right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \times \frac{2(4mn - m^2p - 2p)a + p^2 - 2mnp + 8n^2}{A^2\sqrt{A}} \times \frac{dA}{da}\right\}.$$

Door het eerste quotiënt gelijk nul te stellen, wordt

$$a = -\frac{p^2 - 2mnp + 8n^2}{2(4mn - m^2p - 2p)},$$

terwijl de toestand van het tweede quotiënt afhangt van dien

Digitized by Google

van den eersten term, naardien de tweede nul wordt. Nu wordt voor de gevondene waarde van a hier

$$A = \frac{(4n + mp)^2 \{4p^2 + (4n - mp)^2\}}{(4mn - m^2p - 2p)^2}$$

en dus $\frac{d^2y}{da^2} = \frac{16(4mn - m^2p - 2p)^4}{(4n + mp)^3 \sqrt{\{4p^2 + (4n - mp)^2\}}^3}$.

Het blijkt derhalve, dat genoemde waarde van a een minimum voor y en alzoo een maximum voor φ daarstelt. De coördinaten van het gevraagde punt zijn dan $a = -\frac{p^2 - 2mnp + 8n^2}{2(4mn - m^2p - 2p}$

en $a_1 = -\frac{p(4n + mp)}{2(4mn - m^2p - 2p)}$

en in dit geval is $Cos\,\phi = -\frac{\sqrt{\{4p^2 + (4n - mp)^2\}}}{4n + mp}$.

En dewijl $Cos\,\phi < 1$ zijn moet, wordt tot de bestaanbaarheid gevorderd, dat $mn > \frac{1}{4}p$ is. Voor $mn = \frac{1}{4}p$ wordt $Cos\,\phi = -1$, $a = \frac{n}{m}$ en $a_1 = 2n$. In dit geval is de gegevene lijn raaklijn aan de parabel. Immers zij de raaklijn, in eenig punt (q, q_1) der parabel, $q_1 y = \frac{1}{2}p(x+q)$ of $y = \frac{p}{2q_1}x + \frac{pq}{2q_1}$, dan is, als zij door de lijn $y = mx + n$ voorgesteld wordt, $m = \frac{p}{2q_1}$ en $n = \frac{pq}{2q_1}$; dus $4mn = \frac{p^2q}{q_1^2}$, maar dewijl (q, q_1) een punt der parabel is, moet $q_1^2 = pq$ zijn, derhalve wordt dan $4mn = p$ of $mn = \frac{1}{4}p$. Heeft dit nu plaats, dan ligt het gevraagde punt in het raakpunt en is dan $\phi = 180°$. Voor $mn < \frac{1}{4}p$ wordt de gegevene lijn eene snijlijn en bestaat er geen maximum, evenmin als voor m of n negatief of nul. Voor m en n beide negatief is er weder een maximum. De eenige stand, dien de gegevene lijn buiten de opgenoemde nog hebben kan, heeft plaats, als zij evenwijdig met de as der y loopt en welke in de verkregene uitkomst niet begrepen is. In dit geval is de vergelijking der lijn $x = a$, waardoor derhalve a standvastig en slechts a_1 variabel is. Het is dan klaar, dat $Sin^2\,\frac{1}{2}\phi$ een maximum wordt, als $a_1 = 0$ is, want dan is $Cos\,\varphi = \frac{4a + p}{4a - p}$, hetwelk onbestaanbaar is, zoo niet a nega-

Digitized by Google

tief wordt genomen en alzoo $Cos\,\phi = -\frac{p-4a}{p+4a}$ is.

OPLOSSING *van* M. C. PARAIRA.

Even als in de oplossing van N°. LXXVII vinden wij, indien x_1, y_1 de coördinaten van het punt en ϕ de hoek der raaklijnen is: $tg\,\phi = \frac{4\sqrt{(y_1^2 - px_1)}}{4x_1 + p}$.

Daar verder hier $y_1 = mx_1 + n$ moet zijn, geeft dit

$$tg\phi = \frac{4\sqrt{\left(y_1^2 - \frac{p(y_1-n)}{m}\right)}}{\frac{4(y_1-n)}{m} + p}; \frac{tg\phi}{4\sqrt{m}} = t = \frac{\sqrt{(my_1^2 - py_1 + pn)}}{4y_1 - 4n + pm}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dt}{dy_1} = \frac{(4y_1 - 4n + pm)(2my_1 - p) - 8(my_1^2 - py_1 + pn)}{2(4y_1 - 4n + pm)\sqrt{(my_1^2 - py_1 + pn)}}$$

$$= \frac{(2pm^2 + 4p - 8mn)y_1 - (4pn + p^2m)}{2(4y_1 - 4n + pm)\sqrt{(my_1^2 - py_1 + pn)}},$$

hetgeen $= 0$ wordt voor

$$y_1 = \frac{p^2m + 4pn}{2pm^2 + 4p - 8mn},$$

waarmede overeenkomt:

$$x_1 = \frac{p^2 - 2pmn + 8n^2}{2pm^2 + 4p - 8mn}.$$

Verder vindt men met weglating van het tweede deel, dat door de substitutie der waarde van y_1 nul wordt:

$$\frac{d^2t}{dy_1^2} = \frac{pm^2 + 2p - 4mn}{(4y_1 - 4n + pm)\sqrt{(my_1^2 - py_1 + pn)}},$$

waaruit blijkt, dat het ook hier van de waarden der constanten afhangt, of ϕ maximum of minimum wordt.

LXXIX. VOORSTEL. (*)

Door C. J. MATTHES.

Indien θ den hoek aanduidt tusschen de asymptoten der kegelsnede, voorgesteld door de algemeene vergelijking van den tweeden graad, te bewijzen: dat

(*) Dit en het volgend voorstel zijn ontleend aan FERRERS *Nieuwere Meetkunde*, voorbeelden 35 en 36.

Digitized by Google

$$4\begin{Bmatrix} 0, Sin\,A, Sin\,B, Sin\,C \\ Sin\,A, u, \quad w', \quad v' \\ Sin\,B, w', \quad v, \quad u' \\ Sin\,C, v', \quad u', \quad w \end{Bmatrix} - (u+v+w-2u'\,Cos\,A-2v'\,Cos\,B \\ -2w'\,Cos\,C)^2 . Tang^2\,\theta = 0.$$

Opgelost *door* C. J. Matthes *en* M. C. Paraira.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Laat (l, m, n), (l', m', n') de vergelijkingen der asymptoten zijn; als men dan door A bijv. lijnen daaraan evenwijdig trekt, zoo zijn derzelver vergelijkingen, zie Ferrers bl. 13, § 15,

$$(ma - lb)\beta + (na - lc)\gamma = 0,$$
$$(m'a - l'b)\beta + (n'a - l'c)\gamma = 0.$$

Als men voorts δ en δ' de hoeken noemt, welke deze respectivelijk met de halveeringslijn van hoek A maken, dan is

$$Tang\,\delta = \frac{(ma - lb) - (lc - na)}{(ma - lb) + (lc - na)}\,Tang\,\tfrac{1}{2}A,$$

$$Tang\,\delta' = \frac{(m'a - l'b) - (l'c - n'a)}{(m'a - l'b) + (l'c - n'a)}\,Tang\,\tfrac{1}{2}A;$$

bijgevolg $Tang^2\,\theta = Tang^2\,(\delta' - \delta) = \left\{\dfrac{Tang\,\delta' - Tang\,\delta}{1 + Tang\,\delta' . Tang\,\delta}\right\}^2$

$$= \frac{Sin^2\,A\left\{(mn' - m'n)\,a + (nl' - n'l)\,b + (lm' - l'm)\,c\right\}^2}{a^2\left\{ll' + mm' + nn' - (mn' + m'n)\,Cos\,A - (nl' + n'l)\,Cos\,B - (lm' + l'm)\,Cos\,C\right\}^2}.$$

In overeenstemming nu met Ferrers, § 82, is

$$\frac{ll'}{Du - Ka^2} = \frac{mm'}{Dv - Kb^2} = \frac{nn'}{Dw - Kc^2} = \frac{\frac{1}{2}(mn' + m'n)}{Du - Kbc} = \frac{\frac{1}{2}(nl' + n'l)}{Dv' - Kca} = \frac{\frac{1}{2}(lm' + l'm)}{Dw' - Kab},$$

zijnde $D = Ua^2 + Vb^2 + Wc^2 + 2U'bc + 2V'ca + 2W'ab$

en $K = uvw + 2u'v'w' - uu'^2 - vv'^2 - ww'^2.$

Hieruit laat zich afleiden:

$$\frac{\frac{1}{2}(mn' - m'n)^2}{mm'\,nn'} = \frac{\frac{1}{2}(mn' + m'n)^2}{mm'\,nn'} - 1$$

$$= \frac{(Du' - Kbc)^2}{(Dv - Kb^2)(Dw - Kc^2)} - 1 = \frac{-D\,(Ua + W'b + V'c)^2}{(Dv - Kb^2)(Dw - Kc^2)};$$

derhalve:

$$\frac{\frac{1}{2}(mn' - m'n)}{(Ua + W'b + V'c)\sqrt{-D}} = \frac{\frac{1}{2}(nl' - n'l)}{(Vb + U'c + W'a)\sqrt{-D}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}(lm' - l'm)}{(Wc + V'a + U'b)\sqrt{-D}} = \frac{mm'}{Dv - Kb^2} = \text{enz.},$$

zoodat wij voor $Tang^2\,\theta$, na behoorlijke substitutie, verkrijgen:

Digitized by Google

$$Tang^2\,\theta = -4D.\frac{Sin^2 A}{a^2} : (u + v + w - 2u'\,Cos\,A - 2v'\,Cos\,B - 2w'\,Cos\,C)^2$$

$$= -4 \times \frac{U Sin^2 A + V Sin^2 B + W Sin^2 C + 2U' Sin B.Sin C + 2V' Sin C.Sin A + 2W' Sin A.Sin B}{(u + v + w - 2u'\,Cos\,A - 2v'\,Cos\,B - 2w'\,Cos\,C)^2},$$

waaruit het gestelde volgt, wanneer men voor U, V, W, U', V', W' de bekende waarden substitueert.

OPLOSSING *van* M. C. PARAIRA.

In elke kegelsnede is, wanneer θ den hoek der asymptoten voorstelt en r_1 en r_2 de assen zijn,

$$tg\tfrac{1}{2}\,\theta = \frac{r_1}{r_2}\sqrt{-1}, \text{ dus daar } tg^2\theta = \frac{4\,tg^2\,\tfrac{1}{2}\theta}{(1 - tg^2\,\theta)^2} \text{ is,}$$

$$tg^2\,\theta = -\frac{4r_1^2 : r_2^2}{\left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)^2} = -\frac{4.\frac{1}{r_1^2}.\frac{1}{r_2^2}}{\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)^2};$$

$$4.\frac{1}{r_1^2}.\frac{1}{r_2^2} + \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)\,tg^2\,\theta = 0.$$

Nu is bij FERRERS bl. 85 opgegeven, dat de waarden van $\frac{1}{r_1^2}$ en $\frac{1}{r_2^2}$ de wortels zijn van de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{as\,Cos\,A}{r^2} - u\right), & -w', & -v', & a \\ -w', & \left(\frac{bs\,Cos\,B}{r^2} - v\right), & -u', & b \\ -v', & -u', & \left(\frac{cs\,Cos\,C}{r^2} - w\right), & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welke vergelijking bij behoorlijke ontwikkeling de vorm:

$$\frac{4I^2s^2}{r^4} - \frac{abcs}{r^2}(u + v + w - 2u'Cos\,A - 2v'Cos\,B - 2w'Cos\,C)$$

$$- \begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

aanneemt; waaruit volgt dat

$$4\frac{1}{r_1^2}.\frac{1}{r_2^2} = -\begin{vmatrix} u, & w', & v', & a \\ w', & v, & u', & b \\ v', & u', & w, & c \\ a, & b, & c, & 0 \end{vmatrix} : I^2s^2 = -\begin{vmatrix} 0, & a, & b, & c \\ a, & u, & w', & v' \\ b, & w', & v, & u' \\ c, & v', & u', & w \end{vmatrix} : I^2s^2,$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{abc}{4I^2s}(u+v+w-2u'Cos\mathrm{A}-2v'Cos\mathrm{B}-2w'Cos\mathrm{C})$$

is en dus ook:

$$-\frac{\begin{vmatrix} 0, & a, & b, & c \\ a, & u, & w', & v' \\ b, & w', & v, & u' \\ c, & v', & u', & w \end{vmatrix}}{I^2s^2}$$

$$+\frac{a^2b^2c^2(u+v+w-2u'Cos\mathrm{A}-2v'Cos\mathrm{B}-2w'Cos\mathrm{C})^2}{16I^4s^2}tg^2\theta=0 \text{ of}$$

$$\frac{16I^2}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} 0, & a, & b, & c \\ a, & u, & w', & v' \\ b, & w', & v, & u' \\ c, & v', & u', & w \end{vmatrix}$$

$$-(u+v+w-2u'Cos\,\mathrm{A}-2v'Cos\mathrm{B}-2w'Cos\mathrm{C})^2\,tg^2\,\theta=0.$$

Daar echter

$$\begin{vmatrix} 0, & a, & b, & c \\ a, & u, & w', & v' \\ b, & w', & v, & u' \\ c, & v', & u', & w \end{vmatrix}=\frac{a^2}{Sin^2\,\mathrm{A}}\begin{vmatrix} 0, & Sin\,\mathrm{A}, & Sin\,\mathrm{B}, & Sin\,\mathrm{C} \\ Sin\,\mathrm{A}, & u, & w', & v' \\ Sin\,\mathrm{B}, & w', & v, & u' \\ Sin\,\mathrm{C}, & v', & u', & w \end{vmatrix}$$

en dus

$$\frac{16I^2}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} 0, & a, & b, & c \\ a, & u, & w', & v' \\ b, & w', & v, & u' \\ c, & v', & u', & w \end{vmatrix}=\frac{16I^2}{b^2c^2\,Sin^2\mathrm{A}}\begin{vmatrix} 0, & Sin\,\mathrm{A}, & Sin\,\mathrm{B}, & Sin\,\mathrm{C} \\ Sin\,\mathrm{A}, & u, & w', & v' \\ Sin\,\mathrm{B}, & w', & v, & u' \\ Sin\,\mathrm{C}, & v', & u', & w \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} 0, & Sin\,\mathrm{A}, & Sin\,\mathrm{B}, & Sin\,\mathrm{C} \\ Sin\,\mathrm{A}, & u, & w', & v' \\ Sin\,\mathrm{B}, & w', & v, & u' \\ Sin\,\mathrm{C}, & v', & u', & w \end{vmatrix}$$ is, vindt men ten slotte

$$4\begin{vmatrix} 0, & Sin\,\mathrm{A}, & Sin\,\mathrm{B}, & Sin\,\mathrm{C} \\ Sin\,\mathrm{A}, & u, & w', & v' \\ Sin\,\mathrm{B}, & w', & v, & u' \\ Sin\,\mathrm{C}, & v', & u', & w \end{vmatrix}$$

$$-(u+v+w-2u'\,Cos\,\mathrm{A}-2v'\,Cos\,\mathrm{B}-2w'\,Cos\,\mathrm{C})^2\,tg^2\,\theta=0.$$

LXXX. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

De twee punten, waarin elke cirkel de lijn op oneindigen afstand snijdt, kunnen voorgesteld worden door de vergelijkingen

Digitized by Google

$$-\alpha = \beta e^{-C\sqrt{-1}} = \gamma e^{B\sqrt{-1}}$$
$$-\alpha = \beta e^{C\sqrt{-1}} = \gamma e^{-B\sqrt{-1}}.$$

OPGELOST *door* C. J. MATTHES *en* M. C. PARAIRA.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Wij kunnen volstaan met de coördinaten te bepalen der doorsnijdingspunten van den omschreven cirkel bij voorbeeld met de lijn op oneindigen afstand. Het komt er dan op aan α, β, γ op te lossen uit de vergelijkingen

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$
$$\text{en } a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0.$$

De eliminatie van γ geeft

$$(a\beta + b\alpha)(a\alpha + b\beta) = c^2\alpha\beta,$$

derhalve $$\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 0,$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \pm \frac{2I\sqrt{-1}}{ab},$$
$$= -\operatorname{Cos} C \pm \operatorname{Sin} C\sqrt{-1}$$
$$= \frac{-\varepsilon^{C\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-C\sqrt{-1}}}{2} \pm \frac{\varepsilon^{C\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-C\sqrt{-1}}}{2}$$
$$= -\varepsilon^{-C\sqrt{-1}} \text{ of } = -\varepsilon^{C\sqrt{-1}}.$$

Evenzoo $$\frac{\gamma}{\alpha} = -\varepsilon^{-B\sqrt{-1}} \text{ of } = -\varepsilon^{B\sqrt{-1}};$$

dus $$\frac{\alpha}{\gamma} = -\varepsilon^{B\sqrt{-1}} \text{ of } = -\varepsilon^{-B\sqrt{-1}}.$$

Bijgevolg $$-\alpha = \beta\varepsilon^{-C\sqrt{-1}} = \gamma\varepsilon^{B\sqrt{-1}},$$
$$-\alpha = \beta\varepsilon^{C\sqrt{-1}} = \gamma\varepsilon^{-B\sqrt{-1}}.$$

LXXXI. VOORSTEL.

Door J. ACQUOY.

Uit de hoekpunten van een gegeven driehoek ABC *worden naar de overstaande onverlengde zijden lijnen* AD, BE *en* CF *getrokken, door wier onderlinge snijding een driehoek* PQR *ontstaat. Men vraagt de zijden en den inhoud van driehoek* PQR *te bepalen, wanneer gegeven is*

$$BD = \frac{1}{p}a,\ CE = \frac{1}{q}b \text{ en } AF = \frac{1}{r}c.$$

OPGELOST *door* J. ACQUOY *en* T. VAN TIJN.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

[AANM. Eene figuur bij de oplossingen van dit en de vol-

Digitized by Google

gende twee voorstellen te geven is onnoodig geacht; men teekene slechts, of stelle zich voor, eene figuur waarin AD door de lijnen CF en BC respectivelijk in de punten P en Q gesneden wordt, de lijnen BE en CF elkander in het punt R snijden.]

Volgens de opgaaf is in de figuur

$$BD = \frac{1}{p}a,\ CE = \frac{1}{q}b \text{ en } AF = \frac{1}{r}c;\ \text{dus}$$

$$CD = \frac{p-1}{p}a,\ AE = \frac{q-1}{q}b \text{ en } BF = \frac{r-1}{r}c.$$

Tot bepaling der zijden van $\triangle$ PQR hebben wij volgens de figuur:

$$\left.\begin{aligned} PQ = AQ - AP &= \left(\frac{AQ}{AD} - \frac{AP}{AD}\right) \times AD \\ QR = BR - BQ &= \left(\frac{BR}{BE} - \frac{BQ}{BE}\right) \times BE \\ \text{en } RP = CP - CR &= \left(\frac{CP}{CF} - \frac{CR}{CF}\right) \times CF \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (I)$$

Beschouwen wij nu BE als transversaal van $\triangle$ CAD, CF als transversaal van $\triangle$ ABE en AD als transversaal van $\triangle$ BCF, dan is:

$$DB \times CE \times AQ = CB \times AE \times DQ \text{ of } \frac{1}{p}a \times \frac{1}{q}b \times AQ = a \times \frac{q-1}{q}b \times DQ,$$

$$EC \times AF \times BR = AC \times BF \times ER \text{ of } \frac{1}{q}b \times \frac{1}{r}c \times BR = b \times \frac{r-1}{r}c \times ER$$

$$\text{en } FA \times BD \times CP = BA \times CD \times FP \text{ of } \frac{1}{r}c \times \frac{1}{p}a \times CP = c \times \frac{p-1}{p}a \times FP,$$

waaruit volgt:

$$AQ = p(q-1)\,DQ,\ \text{dus } AD = AQ + DQ = (pq - p + 1)\,DQ,$$
$$BR = q(r-1)\,ER,\ \text{dus } BE = BR + ER = (qr - q + 1)\,ER$$
$$\text{en } CP = r(p-1)\,FP,\ \text{dus } CF = CP + FP = (rp - r + 1)\,FP.$$

Alzoo is:

$$\frac{AQ}{AD} = \frac{p(q-1)}{pq - p + 1},\ \frac{BR}{BE} = \frac{q(r-1)}{qr - q + 1} \text{ en } \frac{CP}{CF} = \frac{r(p-1)}{rp - r + 1} \quad (II)$$

Beschouwen wij voorts CF als transversaal van $\triangle$ ABD, AD als transversaal van $\triangle$ BCE en BE als transversaal van $\triangle$ CAF, dan is:

Digitized by Google

$$AF \times BC \times DP = BF \times DC \times AP \text{ of}$$

$$\frac{1}{r} c \times a \times DP = \frac{r-1}{r} c \times \frac{p-1}{p} a \times AP,$$

$$BD \times CA \times EQ = CD \times EA \times BQ \text{ of}$$

$$\frac{1}{p} a \times b \times EQ = \frac{p-1}{p} a \times \frac{q-1}{q} b \times BQ$$

$$\text{en } CE \times AB \times FR = AE \times FB \times CR \text{ of}$$

$$\frac{1}{q} a \times c \times FR = \frac{q-1}{q} b \times \frac{r-1}{r} c \times CR,$$

waaruit volgt:

$$DP = \frac{(r-1)(p-1)}{p} \times AP, \text{ dus } AD = DP + AP = \frac{rp-r+1}{p} \times AP,$$

$$EQ = \frac{(p-1)(q-1)}{q} \times BQ, \text{ dus } BE = EQ + BQ = \frac{pq-p+1}{r} \times BQ$$

$$\text{en } FR = \frac{(q-1)(r-1)}{r} \times CR, \text{ dus } CF = FR + CR = \frac{qr-q+1}{r} \times CR.$$

Alzoo is:

$$\frac{AP}{AD} = \frac{p}{rp-r+1}, \quad \frac{BQ}{BE} = \frac{q}{pq-p+1} \text{ en } \frac{CR}{CF} = \frac{r}{qr-q+1}. \quad \text{(III)}$$

Door de waarden in (II) en (III) gevonden over te brengen in (I), verkrijgen wij voor de zijden van $\triangle PQR$:

$$\left.\begin{aligned} PQ &= \left(\frac{q-1}{pq-p+1} - \frac{1}{rp-r+1}\right) \times pAD \\ QR &= \left(\frac{r-1}{qr-q+1} - \frac{1}{pq-p+1}\right) \times qBE \\ \text{en } RP &= \left(\frac{p-1}{rp-r+1} - \frac{1}{qr-q+1}\right) \times rCF \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; \text{(IV)}$$

waarin volgens een bekende stelling (zie o. a. DE GELDER, *Meetk.*, 3e druk, pag. 87):

$$pAD = \sqrt{\{p(p-1)c^2 + pb^2 - (p-1)a^2\}},$$

$$qBE = \sqrt{\{q(q-1)a^2 + qc^2 - (q-1)b^2\}}$$

$$\text{en } rCF = \sqrt{\{r(r-1)b^2 + ra^2 - (r-1)c^2\}}.$$

Om den inhoud van $\triangle PQR$ te bepalen, hebben wij (den inhoud van driehoek $ABC = I$ stellende) volgens de figuur:

$$\triangle PQR = I - \triangle ABQ - \triangle BCR - \triangle CAP$$

$$\text{of, omdat } \triangle ABQ = \frac{AQ}{AD} \times \triangle ABD = \frac{AQ}{AD} \times \frac{I}{p}$$

Digitized by Google

$$\triangle BCR = \frac{BR}{BE} \times \triangle BCE = \frac{BR}{BE} \times \frac{I}{q}$$

en $\triangle CAP = \frac{CP}{CF} \times \triangle CAF = \frac{CP}{CF} \times \frac{I}{r}$ is,

$$\triangle PQR = \left(1 - \frac{AQ}{AD} \times \frac{1}{p} - \frac{BR}{BE} \times \frac{1}{q} - \frac{CP}{CF} \times \frac{1}{r}\right) I$$

en hierin de waarden voor $\frac{AQ}{AD}$, $\frac{BR}{BE}$ en $\frac{CP}{CF}$ uit (II) overbrengende, wordt

$$\triangle PQR = \left(1 - \frac{q-1}{pq-p+1} - \frac{r-1}{qr-q+1} - \frac{p-1}{rp-r+1}\right) I$$

of $\triangle PQR = \frac{(pqr - pq - qr - rp + p + q + r - 2)^2}{(pq-p+1)(qr-q+1)(rp-r+1)} I$

of $\triangle PQR = \frac{\{(p-1)(q-1)(r-1)-1\}^2}{(pq-p+1)(qr-q+1)(rp-r+1)} I$. . (V)

Door in deze formule teller en noemer der breuk met $\frac{a^2b^2c^2}{p^2q^2r^2}$ te vermenigvuldigen, verkrijgen wij:

$$\triangle PQR = \frac{\left(\frac{p-1}{p} a \times \frac{q-1}{q} b \times \frac{r-1}{r} c - \frac{1}{p} a \times \frac{1}{q} b \times \frac{1}{r} c\right)^2}{\left(ab - \frac{p-1}{p} a \times \frac{1}{q} b\right)\left(bc - \frac{q-1}{q} b \times \frac{1}{r} c\right)\left(ca - \frac{r-1}{r} c \times \frac{1}{p} a\right)} I,$$

dat is $\triangle PQR = \frac{(CD \times AE \times BF - BD \times CE \times AF)^2}{(ab - CD \times CE)(bc - AE \times AF)(ca - BF \times BE)} I$, (VI)

door welke merkwaardige formule de inhoud van $\triangle PQR$ in de segmenten der zijden van den gegeven driehoek is uitgedrukt.

Aanmerkingen. 1. Stellen wij $p = q = r$, dan veranderen de formules (IV) voor de zijden in:

$$PQ = \frac{p-2}{p^2-p+1} \times pAD, \quad QR = \frac{p-2}{p^2-p+1} \times pBE \text{ en}$$

$$RP = \frac{p-2}{p^2-p+1} \times pCF,$$

waarin $pAD = \sqrt{(p(p-1)c^2 + pb^2 - (p-1)a^2)}$,

$pBE = \sqrt{(p(p-1)a^2 + pc^2 - (p-1)b^2)}$

en $pCF = \sqrt{(p(p-1)b^2 + pa^2 - (p-1)c^2)}$.

De zijden van $\triangle PQR$ zijn dus bij deze onderstelling evenredig met de transversalen, waarvan zij deelen zijn.

Digitized by Google

Voor den inhoud vinden wij nu volgens (V):

$$\Delta\,PQR = \frac{((p-1)^3-1)^2}{(p^2-p+1)^2}\,I = \frac{(p^3-3p^2+3p-2)^2}{(p^2-p+1)^2}\times$$

$$\times\frac{1}{p^2-p+1}\,I = \frac{(p-2)^2}{p^2-p+1}\,I.$$

2. Nemen wij $p=q=r=2$, dan wordt, volgens de vorige aanmerking, $PQ=QR=RP=0$ en $\Delta\,PQR=0$. De drie punten P, Q en R gaan dus over in een enkel punt P. Voorts wordt volgens (II) AQ, dat is nu $AP=\frac{2}{3}AD$, BR, dat is nu $BP=\frac{2}{3}BE$ en $CP=\frac{2}{3}CF$. Wij vinden dus ook door deze oplossing de bekende waarheid bewezen, dat de lijnen, die uit de hoekpunten eens driehoeks naar het midden der overstaande zijden getrokken worden, elkander in één punt snijden, en dat de afstand van dit snijpunt tot elk der hoekpunten gelijk is aan $\frac{2}{3}$ van de deellijn uit dit hoekpunt getrokken.

LXXXII. Voorstel.

Door J. Acquoy.

Men vraagt hetzelfde als in N°. 81, *wanneer gegeven is hoek* ABD $=\alpha$, *hoek* BEC $=\beta$ *en hoek* CFA $=\gamma$.

Opgelost *door* J. Acquoy.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Vooraf zullen wij de hoeken, zijden en inhoud van driehoek PQR trachten uit te drukken in de hoeken, die de transversalen AD, BE en CF met elk der zijden van den gegeven driehoek maken, waaruit dan de beantwoording van dit en het volgende vraagstuk gemakkelijk zal af te leiden zijn.

Stellen wij daartoe, zie de figuur, $\angle BAD = A'$, $\angle CAD = A''$, $\angle ADB = D'$, $\angle CBE = B'$, $\angle ABE = B''$, $\angle BEC = E'$, $\angle ACF = C'$, $\angle BCF = C''$ en $\angle CFA = F'$, dan hebben wij voor de hoeken van Δ PQR:

$$\angle P = A'' + C',\quad \angle Q = B'' + A' \text{ en } \angle R = C'' + B'. \quad (A)$$

Voorts is in Δ ABQ: $AQ = \frac{c\,Sin\,B''}{Sin\,Q}$ en $BQ = \frac{c\,Sin\,A'}{Sin\,Q}$,

Digitized by Google

$$\text{in } \triangle \text{ BCR}: \ \text{BR} = \frac{a \, Sin \, C''}{Sin \, R} \ \text{ en } \ \text{CR} = \frac{a \, Sin \, B'}{Sin \, R},$$

$$\text{in } \triangle \text{ CAP}; \ \text{CP} = \frac{b \, Sin \, A''}{Sin \, P} \ \text{ en } \ \text{AP} = \frac{b \, Sin \, C'}{Sin \, P}.$$

Hierdoor vinden wij voor de zijden van $\triangle$ PQR:

$$\left.\begin{aligned} \text{PQ} = \text{AQ} - \text{AP} &= \frac{c \, Sin \, B''}{Sin \, Q} - \frac{b \, Sin \, C'}{Sin \, P} \\ \text{QR} = \text{BR} - \text{BQ} &= \frac{a \, Sin \, C''}{Sin \, R} - \frac{c \, Sin \, A'}{Sin \, Q} \\ \text{en } \ \text{RP} = \text{CP} - \text{CR} &= \frac{b \, Sin \, A''}{Sin \, P} - \frac{a \, Sin \, B'}{Sin \, R} \end{aligned}\right\} \ldots \text{(B)}$$

$$\text{Nog is in } \triangle \text{ BAD } \ \text{BD} = \frac{c \, Sin \, A'}{Sin \, D'}, \ \text{in } \triangle \text{ CAD}: \text{CD} = \frac{b \, Sin \, A''}{Sin \, D'},$$

$$\text{in } \triangle \text{ CBE}: \text{CE} = \frac{a \, Sin \, B'}{Sin \, E'}, \ \text{in } \triangle \text{ ABE}: \text{AE} = \frac{c \, Sin \, B''}{Sin \, E'},$$

$$\text{in } \triangle \text{ ACF } \ \text{AF} = \frac{b \, Sin \, C'}{Sin \, F'}; \ \text{in } \triangle \text{ BCF}: \text{BF} = \frac{a \, Sin \, C''}{Sin \, F'}.$$

Door deze waarden te substitueeren in formule (VI) van de vorige Oplossing, voor den inhoud van $\triangle$ PQR gevonden, vinden wij:

Digitized by Google

$$\triangle PQR = \frac{\left(\frac{b\,Sin\,A'' \times c\,Sin\,B'' \times a\,Sin\,C'' - c\,Sin\,A' \times a\,Sin\,B' \times b\,Sin\,C'}{Sin\,D'\,Sin\,E'\,Sin\,F'}\right)^2}{\left(ab - \frac{ab\,Sin\,A''\,Sin\,B'}{Sin\,D'\,Sin\,E'}\right)\left(bc - \frac{bc\,Sin\,B''\,Sin\,C}{Sin\,E'\,Sin\,F'}\right)\left(ca - \frac{ca\,Sin\,C''\,Sin\,A'}{Sin\,F'\,Sin\,D'}\right)} \text{ I}$$

$$\text{of } \triangle PQR = \frac{(Sin\,A''\,Sin\,B''\,Sin\,C'' - Sin\,A'\,Sin\,B'\,Sin\,C')^2}{(Sin\,D'\,Sin\,E' - Sin\,A''\,Sin\,B')(Sin\,E'\,Sin\,F' - Sin\,B''\,Sin\,C')(Sin\,F'\,Sin\,D' - Sin\,C''\,Sin\,A')} \text{ I} \ldots \text{(C)}$$

Stellen wij nu ter beantwoording van het vraagstuk, volgens de opgaaf, $D' = \alpha$, $E' = \beta$ en $F' = \gamma$, dan is $A'' = \alpha - C$, $B'' = \beta - A$, $C'' = \gamma - \beta$, $A' = A + C - \alpha = 180 - (\alpha + B)$, $B' = B + A - \beta = 180 - (\beta + C)$ en $C' = C + B - \gamma = 180 - (\gamma + A)$.

Door deze waarden over te brengen in de boven gevonden formules, vinden wij uit (A) voor de hoeken van $\triangle$ PQR:

$$\angle P = B + \alpha - \gamma, \quad \angle Q = C + \beta - \alpha \quad \text{en} \quad \angle R = A + \gamma - B \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Uit (B) hebben wij voor de zijden:

$$\left.\begin{aligned}
PQ &= \frac{c\,Sin\,(\beta - A)}{Sin\,Q} - \frac{b\,Sin\,(\gamma + A)}{Sin\,P} = \frac{a}{Sin\,A}\left(\frac{Sin\,C\,Sin\,(\beta - A)}{Sin\,Q} - \frac{Sin\,B\,Sin\,(\gamma + A)}{Sin\,P}\right)\\
QR &= \frac{a\,Sin\,(\gamma - B)}{Sin\,R} - \frac{c\,Sin\,(\alpha + B)}{Sin\,Q} = \frac{b}{Sin\,B}\left(\frac{Sin\,A\,Sin\,(\gamma - B)}{Sin\,R} - \frac{Sin\,C\,Sin\,(\alpha + B)}{Sin\,Q}\right)\\
\text{en } RP &= \frac{b\,Sin\,(\alpha - C)}{Sin\,P} - \frac{a\,Sin\,(\beta + C)}{Sin\,R} = \frac{c}{Sin\,C}\left(\frac{Sin\,B\,Sin\,(\alpha - C)}{Sin\,P} - \frac{Sin\,A\,Sin\,(\beta + C)}{Sin\,R}\right)
\end{aligned}\right\} \ldots \text{(II)}$$

Uit (C) volgt voor den inhoud:

Digitized by Google

$$\triangle PQR = \frac{\{Sin(\alpha-C)Sin(\beta-A)Sin(\gamma-B)-Sin(\alpha+B)Sin(\beta+C)Sin(\gamma+A)\}^2}{(Sin\alpha Sin\beta-Sin(\alpha-C)Sin(\beta+C))(Sin\beta Sin\gamma-Sin(\beta-A)Sin(\gamma+A)(Sin\gamma Sin\alpha-Sin(\gamma-B)Sin(\alpha+B))} I. \text{(III)}$$

Aanmerkingen:

1. Stellen wij $\alpha = \beta = \gamma$, dan volgt voor de hoeken uit (I):

$$\angle P = B, \ \angle Q = C \text{ en } \angle R = A.$$

De driehoek PQR is dus bij deze onderstelling gelijkvormig met $\triangle ABC$.

Voor de zijden volgt uit (II):

$$PQ = \frac{a}{Sin\,A}(Sin(\alpha - A) - Sin(\alpha + A)) = -2a\,Cos\,\alpha),$$

$$QR = \frac{b}{Sin\,B}(Sin(\alpha - B) - Sin(\alpha + B)) = -2b\,Cos\,\alpha)$$

$$\text{en } RP = \frac{c}{Sin\,C}(Sin(\alpha - C) - Sin(\alpha + C)) = -2c\,Cos\,\alpha).$$

Den inhoud zouden wij kunnen vinden door in (III) $\alpha = \beta = \gamma$ te nemen. Daar hierbij echter een vrij omslachtige herleiding noodig wordt, bepalen wij dien liever uit de gebleken gelijkvormigheid der driehoeken PQR en ABC. Daaruit toch volgt dadelijk:

$$\triangle PQR : \triangle ABC = PQ^2 : a^2 \text{ of } \triangle PQR : I = 4a^2\,Cos^2\,\alpha : a^2,$$

$$\text{waaruit } \triangle PQR = 4\,Cos^2\,\alpha \times I.$$

2. Stellen wij $\alpha = \beta = \gamma = 120°$, dan wordt, omdat $Cos\,120° = -\frac{1}{2}$ is:

$$PQ = a, \ QR = b \text{ en } RP = c \text{ en } \triangle PQR = I.$$

De driehoek PQR wordt dus nu gelijk en gelijkvormig met den gegeven $\triangle ABC$.

Digitized by Google

3. Stellen wij $\alpha = \beta = \gamma = 90°$, dan wordt, omdat $Cos\, 90° = 0$ is:

$$PQ = QR = RP = 0 \text{ en } \triangle PQR = 0,$$

terwijl $\angle P = B$, $\angle Q = C$ en $\angle R = A$ blijft.

De punten P, Q en R gaan nu over in een enkel punt P, $\angle P = B$ wordt $\angle CPD$, $\angle Q = C$ wordt $\angle APE$ en $\angle R = A$ wordt $\angle BPF$ of $\angle CPE$. Hieruit volgt dat de loodlijnen uit de hoekpunten eens driehoeks op de overstaande zijden neêrgelaten elkander in één punt snijden, en dat de hoeken, die zij om dat punt met elkander maken, gelijk zijn aan de hoeken van den driehoek.

LXXXIII. Voorstel.

Door J. Acquoy.

Men vraagt hetzelfde als in N°. 81, *wanneer gegeven is hoek* $BAD = \alpha$, *hoek* $CBE = \beta$ *en hoek* $ACF = \gamma$.

Opgelost *door* J. Acquoy.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Stellen wij in de formules (A), (B) en (C) van de vorige oplossing, volgens de opgaaf, $A' = \alpha$, $B' = \beta$ en $C' = \gamma$, dan is, zie figuur...., $A'' = A - \alpha$, $B'' = B - \beta$, $C'' = C - \gamma$, $D' = 180° - (B + \alpha)$, $E' = 180° - (C + \beta)$ en $F' = 180° - (A + \gamma)$.

Wij hebben dan uit (A) voor de hoeken van $\triangle PQR$:

$$\angle P = A - \alpha + \gamma,\ \angle Q = B - \beta + \alpha \text{ en } \angle R = C - \gamma + \beta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Uit (B) vinden wij voor de zijden:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
PQ &= \frac{c\,Sin\,(B-\beta)}{Sin\,Q} - \frac{b\,Sin\,\gamma}{Sin\,P} = c\left(\frac{Sin\,(B-\beta)}{Sin\,Q} - \frac{Sin\,B\,Sin\,\gamma}{Sin\,C\,Sin\,P}\right)\\
QR &= \frac{a\,Sin\,(C-\gamma)}{Sin\,R} - \frac{c\,Sin\,\alpha}{Sin\,Q} = a\left(\frac{Sin\,(C-\gamma)}{Sin\,R} - \frac{Sin\,C\,Sin\,\alpha}{Sin\,A\,Sin\,Q}\right)\\
\text{en } RP &= \frac{b\,Sin\,(A-\alpha)}{Sin\,P} - \frac{a\,Sin\,\beta}{Sin\,R} = b\left(\frac{Sin\,(A-\alpha)}{Sin\,P} - \frac{Sin\,A\,Sin\,\beta}{Sin\,B\,Sin\,R}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Uit (C) volgt voor den inhoud:

$$\triangle PQR = \frac{(Sin(A-\alpha)Sin(B-\beta)Sin(C-\gamma) - Sin\alpha Sin\beta Sin\gamma)^2}{(Sin(B+\alpha)Sin(C+\beta)-Sin(A-\alpha)Sin\beta)(Sin(C+\beta)Sin(A+\gamma)-Sin(B-\beta)Sin\gamma)(Sin(A+\gamma)Sin(B+\alpha)-Sin(C-\gamma)Sin\alpha)} \text{I. (III)}$$

Aanmerkingen:

1. Stellen wij $\alpha = \beta = \gamma$, dan volgt uit (I) voor de hoeken:

$$\angle P = A, \quad \angle Q = B \quad \text{en} \quad \angle R = C.$$

$\triangle$ PQR is dus bij deze onderstelling gelijkvormig met $\triangle$ ABC.

Uit (II) volgt voor de zijden:

$$PQ = c\left(\frac{Sin\,(B-\alpha)}{Sin\,B} - \frac{Sin\,B\,Sin\,\alpha}{Sin\,C\,Sin\,A}\right)$$

$$\text{of } PQ = c\left(\frac{Sin\,B\,Cos\,\alpha - Cos\,B\,Sin\,\alpha}{Sin\,B} - \frac{(Sin\,C\,Cos\,A + Cos\,C\,Sin\,A)\,Sin\,\alpha}{Sin\,C\,Sin\,A}\right)$$

$$\text{of } PQ = c\,Sin\,\alpha\,(Cot\,\alpha - Cot\,B - Cot\,A - Cot\,C)$$

en op dezelfde wijze:

Digitized by Google

$$QR = a \, Sin \, \alpha \, (Cot \, \alpha - Cot \, C - Cot \, B - Cot \, A)$$
$$\text{en } RP = b \, Sin \, \alpha \, (Cot \, \alpha - Cot \, A - Cot \, C - Cot \, B).$$

Uit (III) zou men, na een vrij lastige herleiding, den inhoud kunnen bepalen. Uit de bewezen gelijkvormigheid van $\triangle PQR$ met $\triangle ABC$ volgt echter dadelijk:

$$\triangle PQR : I = PQ^2 : c^2 = c^2 \, Sin^2 \, \alpha \, (Cot \, \alpha - Cot \, B - Cot \, A - Cot \, C)^2 : c^2,$$

waaruit:

$$\triangle PQR = Sin^2 \, \alpha \, (Cot \, \alpha - Cot \, A - Cot \, B - Cot \, C)^2 \times I.$$

2. Stellen wij $\alpha = \frac{1}{2}A$, $\beta = \frac{1}{2}B$ en $\gamma = \frac{1}{2}C$, dan vindt men uit (I):

$$\angle P = \tfrac{1}{2}(A + C) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}B, \quad \angle Q = \tfrac{1}{2}(B + A) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C \quad \text{en} \quad \angle R = \tfrac{1}{2}(C + B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}A.$$

Uit (II) volgt $PQ = QR = RP = 0$, en uit (III) $I = 0$.

De punten P, Q en R gaan dus over in een enkel punt P. $\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2}B$ wordt $\angle CPD$, $\angle Q = 90^\circ - \frac{1}{2}C$ wordt $\angle APE$ en $\angle R = 90^\circ - \frac{1}{2}A$ wordt $\angle BPF = \angle CPE$. Wij zien hieruit, dat de lijnen, die de hoeken eens driehoeks halveeren, elkander in één punt snijden, en dat de hoeken, die zij om dat punt met elkander maken, gelijk zijn aan de complementen van de halve hoeken des driehoeks.

LXXXIV. Voorstel. (*)

Door M. C. Paraira.

In een vlak zijn vier lijnen A, B, C, D *gegeven, die, drie aan drie genomen, vier drie-zijden vormen. De omschreven cirkels dier drie-zijden snijden elkander in één punt* P. *De lijn* A *behoort bij drie der drie-zijden; verbindt men in elke van deze het middelpunt des omschreven cirkels met het niet op* A *gelegen hoekpunt, dan snijden deze lijnen elkander in één punt* I_1, *gelegen op den cirkel omschreven om de vierde drie-zijde. Men verkrijgt aldus vier analoge punten* I_1, I_2, I_3, I_4, *welke met* P *en de middelpunten der vier cirkels om de vier*

(*) Ontleend aan Briot et Bouquet, *Geometrie Analytique.*

Digitized by Google

drie-zijden omschreven, op één cirkel-omtrek gelegen zijn. Vrage naar het bewijs.

Opgelost *door* M. C. Paraira.

Oplossing *van* M. C. Paraira.

Laten (zie fig. 27) O_4, O_3, O_2, O_1 de middelpunten zijn der omschreven cirkels van de drie-zijden EFH, EGK, GFL, HLK, aan wier vorming respectievelijk de lijnen D, C, B, A geen deel hebben.

Men denke zich het punt P als doorsnijdingspunt van twee der cirkels, b. v. van O_1 en O_2, en trekke de lijnen PF, PG, PH, PK en PL, dan is $\angle$ PFE $=$ 180° $-$ GLP $=$ PLK $=$ PHK $=$ 180° $-$ EHP, en $\angle$ PGE $=$ 180° $-$ FGP $=$ 180° $-$ FLP $=$ PLH $=$ 180° $-$ EKP; waaruit blijkt dat ook de cirkels O_3 en O_4 door P gaan.

Trekt men nu de lijnen HO_4, LO_2 en KO_3, en verlengt ze zoo noodig tot zij de overstaande zijden der drie-zijde HLK in h, l en k ontmoeten, zoo heeft men: Hk : KH $=$ *Sin* HkK : *Sin* KkH, kL : LK $=$ *Sin* kKL : *Sin* LkK, dus HK : kL $=$ KH *Sin* HkK : LK *Sin* kKL. Maar HkK is $=$ 90° $-$ $\frac{1}{2}$EO_3K $=$ 90° $-$ EGK en kKL $=$ 90° $-$ $\frac{1}{2}$GO_3K $=$ 90° $-$ GEK, dus Hk : kL $=$ KH *Cos* EGK : LK *Cos* GEK.

Evenzoo is Lh : HL $=$ *Sin* LHh : *Sin* HhL en hK : KH $=$ *Sin* hHK : *Sin* KhH, waaruit volgt: Lh : hK $=$ HL *Sin* LHh : KH *Sin* hHK. Maar LHh $=$ 180° $-$ O_4HF $=$ 180° $-$ (90° $-$ $\frac{1}{2}$HO_3F) $=$ 90° $+$ GEK en hHK $=$ EHO_4 $=$ 90° $-$ $\frac{1}{2}$EO_4H $=$ 90° $-$ EFH, dus

Lh : hK $=$ HL *Cos* GEK : KH *Cos* EFH.

Eindelijk is Kl : LK $=$ *Sin* KLl : *Sin* LlK en lH : HL $=$ *Sin* lLH : *Sin* HlL, waaruit volgt: Kl : lH $=$ LK *Sin* KLl : Hl *Sin* lLH. Maar KLl $=$ O_2LG $=$ 90° $-$ $\frac{1}{2}$LO_2G $=$ 90° $-$ EFH en lLH $=$ O_2LF $=$ 90° $-$ $\frac{1}{2}$LO_2F $=$ 90° $-$ EGK, dus Kl : lH $=$ LK *Cos* EFH : HL *Cos* EGK.

Derhalve is:

$$\frac{Hk}{kL} \cdot \frac{Lh}{hK} \cdot \frac{Kl}{lH} = \frac{KH\ Cos\ EGK}{LK\ Cos\ GEK} \cdot \frac{HL\ Cos\ GEK}{KH\ Cos\ EFH} \cdot \frac{LK\ Cos\ EFH}{HL\ Cos\ EGK} = 1,$$

hetgeen bewijst dat HO_4, LO_2 en KO_3 door één punt I_1 gaan.

Nu is echter LI_1K $=$ 180° $-$ $I_1$$k$L $-$ kLI_1 $=$ 180° $-$ KkH $-$ FLO_2 $=$ 180° $-$ KkH $-$ (90° $-$ KGE) $=$ 180° $-$ KkH $-$ kKH $=$ LHK, hetgeen aantoont dat I_1 op den cirkel O_1 ligt.

Trekt men eindelijk PO_4, PO_2 en PO_3, zoo is $\angle$ P$O_2$$I_1$ $=$ $\angle$ PO_2L $=$ 2 $\angle$ PFL $=$ 2 $\angle$ PFH $=$ 2 $\angle$ PEH $=$ $\angle$ PO_4H $=$

Digitized by Google

$\angle PO_4I_1 = 2\angle PEK = \angle PO_3K = \angle PO_3I_1$, waaruit blijkt dat P, I_1, O_2, O_3 en O_4 op één cirkel liggen. Geheel op dezelfde wijze zal nu alles voor I_2, I_3 en I_4 bewezen worden. Men vindt dan dat I_2 op den cirkel O_2, I_3 op O_3 en I_4 op O_4 ligt, alsmede dat P_1, I_2, O_3, O_4 en O_1, P, I_3, O_4, O_1 en O_2, P, I_4, O_1, O_2 en O_3 op één cirkel liggen. Deze drie cirkels echter hebben achtereenvolgens drie punten gemeen en de eerste heeft drie punten gemeen met den cirkel die door P, I_1, O_2, O_3 en O_4 gaat, zoodat hieruit volgt dat P, I_1, I_2, I_3, I_4, O_1, O_2, O_3 en O_4 alle op denzelfden cirkel liggen.

[Aanm. Het zal den aandachtigen lezer niet ontgaan zijn, dat in het oorspronkelijk voorstel van Briot et Bouquet niet vermeld wordt het punt P, waarin de cirkels om de vier driezijden omschreven elkander snijden. In de oplossing wordt aangenomen dat twee dier cirkels door het punt P gaan en aangetoond dat alsdan dit ook plaats vindt voor de twee andere cirkels. Zoo ontstaat hier een *negenpunts-cirkel.* Red.]

LXXXV. Voorstel.

Door A. Benthem Gz.

De ongelijke waarden te bepalen van x en y, welke voldoen aan de vergelijkingen:

$$(2x+3)\sqrt{(y^4-3y-2)}-(2y+3)\sqrt{(x^4-3x-2)}$$
$$=(x-y)(3x+2xy+3y-1)$$

en
$$\frac{1-3y}{3+2y}+\sqrt{[y(1-3x)]}=\sqrt{\frac{1+y}{4-x}},$$

zonder daarbij gebruik te maken van de oplossing van [tweede of] hoogere machtsvergelijkingen.

Opgelost *door* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

Door ontwikkeling vindt men voor het tweede lid der eerste vergelijking:

$$(x-y)(3x+2xy+3y-1)=3x^2+2x^2y-3y^2-2xy^2-x+y$$
$$=2x^2(y+1\tfrac{1}{2})-2y^2(x+1\tfrac{1}{2})+(y+1\tfrac{1}{2})-(x+1\tfrac{1}{2})$$
$$=\tfrac{1}{2}[(2x^2+1)(2y+3)-(2y^2+1)(2x+3)], \quad . \; . \; (1)$$

bijgevolg kan men voor de eerste vergelijking schrijven:

$$(2x+3)[2y^2+1+2\sqrt{y^4-3y-2}]-(2y+3)[2x^2+1+2\sqrt{x^4-3x-2}]=0$$

derhalve ook:

$$\frac{2x^2+1+2\sqrt{x^4-3x-2}}{2x+3}=\frac{2y^2+1+2\sqrt{y^4-3y-2}}{2y+3} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Digitized by Google

Stelt men nu $2x^2+1=p+q$ en $2x+3=p-q$, dan vindt men $p=x^2+x+2$ en $q=x^2-x-1$, alsmede $pq=x^4-3x-2$, zoodat het eerste lid van (2) overgaat in:

$$\frac{p+q+2\sqrt{pq}}{p-q}=\frac{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}{p-q}=\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}.$$

De analoge stelling $2y^2+1=p_1+q_1$ en $2y+3=p_1-q_1$ geeft voor het tweede lid:

$$\frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{q_1}}{\sqrt{p_1}-\sqrt{q_1}},$$

zoodat de geheele vergelijking (2) overgaat in:

$$\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}=\frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{q_1}}{\sqrt{p_1}-\sqrt{q_1}},$$

waaruit volgt: $p:q=p_1:q_1$,

derhalve ook: $(p+q):(p-q)=(p_1+q_1):(p_1-q_1)$

of $(p+q)(p_1-q_1)-(p_1+q_1)(p-q)=0$,

derhalve na invoeging der gestelde waarden:

$$(2x^2+1)(2y+3)-(2y^2+1)(2x+3)=0.$$

Ingevolge het gevondene in (1) geeft dit na ontwikkeling:

$$(x-y)(3x+2xy+3y-1)=0,$$

waaraan voldaan wordt door $x=y$ [welke waarde door de opgave wordt uitgesloten] en door

$$3x+2xy+3y-1=0,$$

derhalve door: $$y=\frac{1-3x}{3+2x}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

De substitutie dezer laatste waarde in de tweede vergelijking van de opgave geeft:

$$x+\frac{1-3x}{\sqrt{3+2x}}=\sqrt{\frac{1}{3+2x}},$$

waaruit volgt: $$x=\frac{3x}{\sqrt{3+2x}}.$$

Hieraan wordt voldaan door $x=0$, waarmede blijkens (3) overeenkomt $y=\frac{1}{3}$ en door $\sqrt{3+2x}=3$ of $x=3$, waarmede $y=-\frac{8}{9}$ overeenstemt; beide waarden voldoen aan de opgave.

LXXXVI. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Van een kwadraat, wiens hoekpunten op een bol liggen, zijn de projectiën van ééne zijde benevens die van den bol zelven

Digitized by Google

gegeven. Men vraagt de beide andere zijden te projecteren, de projectie-vlakken rechthoekig aannemende.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Het is klaar, dat het er slechts op aankomt, om nog één hoekpunt van het vierkant te bepalen, want daar de projectiën van evenwijdige lijnen ook evenwijdig zijn, zal men, de projectiën van twee zijden bekend zijnde, door het trekken van evenwijdige lijnen, die van de beide andere terstond vinden. Nu is de afstand van een der onbekende hoekpunten tot een der gegevene de zijde, en tot het andere de diagonaal van het vierkant. Zoekt men dus door middel van de beide projectiën de werkelijke lengte van de zijde, waardoor men ook gemakkelijk die van de diagonaal bepaalt, dan heeft men slechts om de gegevene hoekpunten als middelpunten bollen te beschrijven, den eenen met de lengte der zijde, den anderen met die der diagonaal als straal. Want het bedoelde punt genoemde afstanden van de gegevene hoekpunten moetende hebben, zal zich alzoo op beide bollen moeten bevinden en daarenboven op den gegeven bol. Door derhalve de onderlinge doorsnede dezer drie bollen te construeren, zal men het verlangde punt bekomen. Blijkbaar zijn er twee punten, welke aan de gestelde voorwaarde voldoen.

ANDERS. Laat men door het eene hoekpunt een vlak gaan, loodrecht op de gegevene zijde, dan zullen alle lijnen, die loodrecht op het uiteinde dier zijde staan, en gevolgelijk ook de tweede zijde in dit vlak liggen. Construeert men dan de doorsnede van dit vlak met den bol, en slaat men haar om den horizontalen doorgang van het vlak op het overeenkomstige projectievlak neer te gelijk met het hoekpunt, dat in dit vlak ligt, dan behoeft men slechts uit dit punt op den omtrek des cirkels, welke de neergeslagen doorsnede is, de werkelijke lengte der zijde uit te zetten, om daardoor de neergeslagene derde hoekpunten te vinden. Na het vlak in zijn' vorigen stand teruggebragt te hebben, verkrijgt men op de gewone wijze de projectiën dier punten. Deze wijze is hier gevolgd.

Zij (zie fig. 28) M_1M_2 het middelpunt des bols, a_1b_1, a_2b_2 de gegevene zijde. Het vlak, dat loodrecht door het hoekpunt b_1b_2 gebragt wordt, is B_1BB_2. Laten wij nu uit M en M_1

Digitized by Google

loodlijnen op de overeenkomstige doorgangen van het vlak neer, dan zijn deze de projectiën van de loodlijn, die men uit het middelpunt des bols op het vlak kan neerlaten en welke alzoo door het middelpunt der doorsnede gaan moet. Het punt d_1d_2, waar deze loodlijn door het vlak B_1BB_2 gaat, is dus dat middelpunt. Maar nu ligt behalve dit punt d_1d_2, ook het punt b_1b_2 in dat vlak en dit laatste in den omtrek des cirkels; zoekt men dus slechts, waar deze beide punten bij het neerslaan van het vlak komen te vallen, hetwelk hier in d en b is, dan moet bd de straal des cirkels wezen en kan hij terstond beschreven worden. Nemen wij vervolgens $b_1c = a_2e$, dan is a_1c de werkelijke lengte van de zijde van het vierkant, en, door dus $bm = bp = a_1c$ te nemen, zijn m en p de beide neergeslagen derde hoekpunten. Bij het terugbrengen van het vlak in zijn' vorigen stand, worden m_1 en p_1 de horizontale en voorts m_2 en p_2 de verticale projectiën van dat punt. Trekken wij eindelijk uit m_1 en p_1 lijnen evenwijdig met a_1b_1, uit m_2 en p_2 met a_2b_2, vervolgens uit a_1 lijnen evenwijdig, eene met b_1m_1 en eene met b_1p_1, en dan nog uit a_2 met b_2m_2 en b_2p_2, dan zullen de snijpunten n_1n_2 en q_1q_2 de vierde hoekpunten zijn. Alzoo is $a_1b_1m_1n_1$ $a_2b_2m_2n_2$ het eene, $a_1b_1p_1q_1$ $a_2b_2p_2q_2$ het andere kwadraat.

Aanmerking. Waren de gegevene projectiën zoodanig, dat de werkelijke lengte van de zijde des kwadraats gelijk werd aan $r\sqrt{2}$, waarbij r de straal des bols voorstelt, dan zou er slechts één vierkant bestaan.

LXXXVII. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Van drie punten A, B *en* C *kent men de perspectieven op een vertikaal vlak, alsmede de orthographische projectiën op het horizontale vlak dat door het oog des waarnemers gaat. Vrage aan te wijzen, hoe men in elk voorkomend geval door constructie de assen der kegelsnede kan bepalen, welke de perspectief voorstelt van den cirkel, die door de punten* A, B *en* C *is getrokken.*

Opgelost *door* H. van Blanken.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Men stelle zich voor, dat a, b, c de perspectieven en A′, B′, C′ de horizontale projectiën der gegeven punten zijn, en neme

Digitized by Google

verder aan, dat het vertikale vlak het horizontale volgens eene lijn XY doorsnijdt en om deze doorsnede is neêrgeslagen.

Trekt men uit de punten *a*, *b*, *c* de lijnen *aa'*, *bb'* en *cc'* loodregt op XY, en vervolgens de lijnen A'*a'*, B'*b'*, C'*c'*, dan zijn deze de projectiën der zichtstralen, welke naar de punten A, B, C zijn getrokken. Het doorsnijdingspunt O dezer lijnen is bijgevolg het oogpunt van den waarnemer.

Men trekke nu uit O door *a* eene lijn, welke de uit A' loodrecht op XY getrokken lijn in A doorsnijdt, dan is AA' de hoogte van het punt A boven het horizontale vlak. Op gelijke wijze kan men de hoogten der punten B en C verkrijgen. Als de horizontale projectiën en de hoogten der punten A, B, C bekend zijn, kan men gemakkelijk de punten R en S bepalen, waarin de lijnen AC en BC het horizontale vlak doorsnijden, en verder de doorsnede RS van het vlak des driehoeks ABC met het horizontale vlak, alsmede den standhoek van dat vlak.

Laat nu het vlak des driehoeks ABC om de doorsnede RS op het horizontale vlak worden neêrgeslagen, en om den driehoek een cirkel beschreven worden.

Men trekke door O evenwijdig aan XY eene lijn OO', welke RS in eenig punt P ontmoet, en brenge door deze lijn een vertikaal vlak. De lijn PQ, volgens welke dit vlak het vlak des driehoeks ABC doorsnijdt, kan gemakkelijk op het neêrgeslagen vlak aangewezen worden. De perspectief van deze doorsnede PQ ligt op eenen oneindigen afstand en heeft bijgevolg het middelpunt *m* der kegelsnede tot pool. Dit middelpunt *m* is de perspectief van een punt M, dat in betrekking tot den cirkel de pool is van den lijn PQ.

Men heeft nu drie gevallen te onderscheiden.

Eerste geval. De lijn PQ ligt geheel buiten den cirkel. In dit geval is de perspectief des cirkels eene ellips.

Men trekke uit P de lijnen PD en PE, welke den cirkel in de punten D en E aanraken, en bepale de horizontale projectiën en de hoogten van deze raakpunten als het vlak des driehoeks in den oorspronkelijken stand is gebragt, en vervolgens hare perspectieven *d* en *e*. Hierdoor verkrijgt men de punten *d* en *e* der ellips, alwaar de raaklijnen evenwijdig zijn aan XY. De lijn *de* is derhalve eene middellijn, en het mid-

Digitized by Google

den ∞ van deze middellijn het middelpunt der ellips. Men bepale nu in het vlak des driehoeks ABC het punt M, dat ∞ tot perspectief heeft, en trekke de lijn PM, welke den cirkel snijdt in de punten F en G, en construere de perspectieven *f* en *g* van deze snijpunten. De lijn *fg* is nu evenwijdig aan XY, en dus ook aan de raaklijnen in de punten *d* en *e*. Hieruit volgt, dat de lijnen *de* en *fg* gekoppelde middellijnen van de ellips zijn. Twee gekoppelde middellijnen bekend zijnde, kunnen de assen door eene eenvoudige constructie verkregen worden.

Tweede geval. De lijn PQ snijdt den cirkel in de punten K en L. In dit geval is de perspectief eene hyperbel. De perspectief van het gedeelte des cirkels, dat voor de lijn PQ is gelegen, ontstaat door rechtstreeksche zichtstralen en levert den eersten tak der hyperbel, terwijl de tweede tak verkregen wordt door de zichtstralen, welke naar het andere gedeelte des cirkels getrokken worden, rugwaarts te verlengen.

Men trekke in de snijpunten K en L de raaklijnen KM en LM, en construere hare perspectieven. Deze zijn de asymptoten der hyperbel. Voorts bepale men nog de perspectief van eenig ander punt des cirkels. Men heeft dan bekend de asymptoten en een punt der hyperbel en kan daarom de assen door eene eenvoudige constructie verkrijgen.

Wanneer in dit geval de lijn OO′ door het middelpunt P des cirkels gaat en loodrecht staat op het vlak van den driehoek, terwijl verder OP gelijk is aan den straal des cirkels, dan wordt de perspectief eene gelijkzijdige hyperbel, welker halve as gelijk is aan de loodlijn, welke uit O op XY wordt getrokken. Het voetpunt dezer loodlijn is nu het middelpunt der hyperbel.

Derde geval. De lijn PQ wordt door den cirkel aangeraakt. In dit geval is de perspectief eene parabel.

Men trekke uit P de raaklijn PD, en bepale de perspectief *d* van het raakpunt D. Hierdoor verkrijgt men een punt *d* der parabel, alwaar de raaklijn evenwijdig is aan XY, terwijl de middellijn evenwijdig loopt aan PQ. Bepaalt men nu nog de perspectief van eenig punt des cirkels, dan kan men het brandpunt en den top der parabel door eene eenvoudige constructie verkrijgen.

Vierde geval. Het vlak van den driehoek ABC is even-

Digitized by Google

wijdig aan het horizontale vlak. In dit bijzonder geval is de cirkel om den driehoek ABC gelijk en evenwijdig aan den cirkel om den driehoek A'B'C', en het middelpunt M' van den laatsten is de projectie van het middelpunt M des eersten.

De perspectief zal nu eene ellips, hyperbel of parabel zijn, naar dat de cirkel om den driehoek A'B'C' geheel buiten de lijn OO' valt, welke uit O evenwijdig aan XY is getrokken, of door deze lijn gesneden, of aangeraakt wordt.

Men trekke door het middelpunt M' eene loodlijn op OO', welke den cirkel doorsnijdt in de punten D' en E', de projectiën van twee overeenkomstige punten D en E in den cirkel om den driehoek ABC. De perspectieven *d* en *e* van de laatste punten zijn blijkbaar punten der kegelsnede, alwaar de raaklijnen evenwijdig loopen met XY. Bijgevolg is *de* eene middellijn. De verdere bewerkingen komen genoegzaam overeen met die der vorige gevallen.

Wanneer in dit geval de projectie M' van het middelpunt M des cirkels in het oogpunt O valt en de hoogte van het punt M gelijk is aan de straal, dan is de perspectief eene gelijkzijdige hyperbel, welker halve as gelijk is aan de loodlijn OT, welke uit O op XY is getrokken.

Wordt de cirkel zoodanig langs het evenwijdige vlak verplaatst, dat de projectie D'E' eener middellijn DE steeds langs de loodlijn OT valt, dan zal de perspectief een cirkel worden zoodra de hoek, dien de zichtlijn OD met het horizontale vlak maakt, gelijk is aan den hoek, dien de zichtlijn OE maakt met den vertikaal. De hoogte van het vlak des driehoeks is alsdan middenevenredig tusschen OD' en OE', en de straal des cirkels staat tot den straal van den cirkel, die zijn perspectief voorstelt, als de hoogte van het vlak des driehoeks tot den afstand OT van het oogpunt O tot aan de lijn XY.

LXXXVIII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

De middelpuntsvergelijking eener ellips is gegeven, benevens de vergelijking van een cirkel, die met zijn middelpunt in de as der x ligt. Men verlangt op den omtrek der ellips zulke punten te bepalen, dat als men daaruit raaklijnen aan den cirkel trekt, de hoek dier raaklijnen een maximum of minimum zij.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST *en* J. H. HEYBROCK.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Dewijl het middelpunt des cirkels in de as der abscissen liggen moet, kunnen wij zijne vergelijking stellen

$$y^2 + (x - m)^2 = r^2.$$

Noemen wij dan den hoek, dien de raaklijnen maken, welke uit eenig punt (p, p_1) aan den cirkel getrokken kunnen worden ϕ, dan vonden wij reeds in voorstel XLIII:

$$tg\,\phi = \frac{2r\sqrt{\{(p-m)^2 + p_1^2 - r^2\}}}{(p-m)^2 + p_1^2 - 2r^2}$$

en daaruit bekomt men gemakkelijk:

$$Sin\,\tfrac{1}{2}\phi = \sqrt{\frac{1 - Cos\,\phi}{2}} = \frac{r}{\sqrt{\{(p-m)^2 + p_1^2\}}};$$

en het is nu klaar, dat, dewijl nooit $\phi > 180^\circ$ is, ϕ een maximum of minimum zijn zal, als $Sin\,\tfrac{1}{2}\phi$ het is. Zij dan de vergelijking der ellips $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, dan is, daar (p, p_1) op haren omtrek ligt, $p_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - p^2)$. Substitueren wij echter deze waarde in die van $Sin\,\tfrac{1}{2}\phi$, dan vervallen wij op de zwarigheid, dat wij een maximum of minimum voor ϕ zouden moeten vinden tusschen de grenzen $p = +a$ en $p = -a$. Om dit te ontwijken, voeren wij den hoek ψ in, welken eene middellijn der ellips, die door (p, p_1) gaat, met de groote as of de as der x maakt. Wij hebben dan blijkbaar $p_1 = p\,tg\,\psi$ en dus $p^2\,tg^2\,\psi = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - p^2)$, waaruit

$$p = \frac{ab}{\sqrt{(a^2\,tg^2\,\psi + b^2)}} \text{ en } p_1 = \frac{ab\,tg\,\psi}{\sqrt{(a^2\,tg^2\,\psi + b^2)}} \text{ en dan wordt}$$

$$Sin\,\tfrac{1}{2}\phi = r \times \sqrt{\frac{a^2\,tg^2\,\psi + b^2}{\{ab - m\sqrt{(a^2\,tg^2\,\psi + b^2)}\}^2 + a^2b^2tg^2\psi}}. \quad (a)$$

Stellen wij kortheidshalve den noemer gelijk A en differentiëren wij tweemaal, zoo bekomen wij:

$$\frac{d\,Sin\,\tfrac{1}{2}\phi}{d\psi} = \frac{a^2br\,tg\,\psi\,\{b(a^2 - b^2) - am\sqrt{(a^2\,tg^2\,\psi + b^2)}}{Cos^2\,\psi A\sqrt{(a^2\,tg^2\,\psi + b^2)}\,A}$$

en

$$\frac{d^2\,\tfrac{1}{2}\,Sin\,\phi}{d\psi^2}$$

$$= a^2br \times \left\{\frac{-a^3mtg^2\psi + \{b(a^2 - b^2) - am\sqrt{(a^2tg^2\psi + b^2)}\} \times \sqrt{(a^2tg^2\psi + b^2)}}{A\,Cos^4\,\psi\,(a^2\,tg^2\,\psi + b^2)\sqrt{A}}\right.$$

Digitized by Google

$$-tg\,\psi\left\{b(a^2-b^2)-am\sqrt{(a^2\,tg^2\,\psi+b^2)}\right\}\times\frac{dN}{d\psi}\Bigg\},$$

waarbij N den noemer van het eerste quotiënt voorstelt. Door nu in het eerste quotiënt $tg\,\psi=0$ te stellen, wordt het gelijk nul en de eerste term van het tweede quotiënt zal den toestand er van aangeven, daar blijkbaar de tweede term nul is. Nu is voor $tg\,\psi=0$, $Cos\,\psi=\pm 1$, en voor beide waarden wordt $A\,Cos^4\psi\,(a^2\,tg^2\,\psi+b^2)\sqrt{A}=b^5(a-m)^3$ en alzoo $\frac{d^2\,\frac{1}{2}\,Sin\,\phi}{d\psi}=\pm\frac{a^2r(a^2-am-b^2)}{b^2(a-m)^3}=\pm\frac{a^2r}{(a-m)^2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{1}{m-a}\right)$

Is derhalve $m>a$, zooals dit altijd plaats heeft, wanneer de cirkel buiten de ellips ligt, dan vinden wij, dat er voor $tg\,\psi=0$ zoowel een maximum als een minimum voor ϕ bestaat en wij zullen alzoo nog moeten bepalen, in welk geval het een en het ander plaats heeft. Schrijven wij daartoe de vergelijking (a) onder den vorm

$$Sin\,\tfrac{1}{2}\phi=\frac{r}{\sqrt{\left\{\left[\frac{ab\,Cos\,\psi}{\sqrt{(a^2\,Sin^2\psi+b^2\,Cos^2\psi)}}-m\right]^2+\frac{a^2b^2tg^2\psi}{a^2tg^2\psi+b^2}\right\}}},$$

dan is voor $Sin\,\psi=0$ en $Cos\,\psi=+1$, $Sin\,\frac{1}{2}\phi=\frac{r}{m-a}$, en voor $Sin\,\psi=0$ en $Cos\,\psi=-1$, $Sin\,\frac{1}{2}\phi=\frac{r}{m+a}$. Voor $\psi=0^\circ$ is derhalve ϕ een maximum en voor $\psi=180^\circ$ een minimum of voor het eerste $p=a$ en voor het laatste $p=-a$. Voor de tweede waarde, welke het eerste quotiënt nul maakt, wordt $tg\,\psi=\frac{b}{a^2m}\sqrt{\{(a^2-b^2)^2-a^2m^2\}}$. Daar echter $m>a$ is, wordt $am>a^2$ en derhalve $tg\,\psi$ onbestaanbaar.

LXXXIX. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Als men door een gegeven punt lijnen trekt, kan men op elk dier lijnen een punt vinden zoodanig, dat, als men daaruit raaklijnen aan eene parabel trekt, de hoek, dien zij met elkander maken, een maximum is. Men vraagt de vergelijking van de meetkundige plaats dier punten te bepalen.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Als de vergelijking der rechte lijn $y=mx+n$ is, dan wor-

Digitized by Google

den de coördinaten van het maximumpunt (blijkens voorstel

LXXVIII) $-\dfrac{p^2-2mnp+8n^2}{2(4mn-m^2p-2p)}, -\dfrac{p(4n+mp)}{2(4mn-m^2p-2p}.$

Stellen wij nu, dat de coördinaten van het gegeven punt (b, b_1) zijn, dan is $b_1 = mb + n$ en dus $n = b_1 - mb$. Substitueeren wij nu deze waarde in bovengenoemde coördinaten en drukken wij de loopende coördinaten der gevraagde kromme door x en y uit, dan zullen wij hebben

$$x = -\frac{p^2-2mp(b_1-mb)+8(b_1-mb)^2}{2\{4m(b_1-mb)-m^2p-2p\}} \quad . \; . \; (a)$$

$$\text{en } y = -\frac{p\{4(b_1-mb)+mp\}}{2\{4m(b_1-mb)-m^2p-2p\}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

en er blijft nog over, tusschen deze beide vergelijkingen m te elimineeren. Daartoe hebben wij uit (a)

$2(x-b)(4b+p)m^2+2b_1(p+8b-4x)m+4px-p^2-8b_1^2=0$

en uit (b) $2y(4b+p)m^2+\{(4b-p)p-8b_1y\}m+4p(y-b_1)=0.$

Door de eerste met y en de tweede met $(x-b)$ te vermenigvuldigen, zal haar verschil geven:

$$\{p(x-b)(4b-p)-2b_1(4b+p)y\}m-4b_1p(x-b)$$
$$+(p^2-4bp+8b_1^2)y=0$$

en derhalve: $m = \dfrac{4b_1p(x-b)-(p^2-4bp+8b_1^2)y}{p(x-b)(4b-p)-2b_1(4b+p)y}.$

Substitueert men eindelijk deze waarde in (b), dan vindt men na behoorlijke herleiding:

$2(4b+p)y^2-8b_1xy+4px^2-2b_1py-p(4b+p)x+bp^2=0.$

Op deze vergelijking de theorie van de vergelijkingen van de lijnen van den tweeden graad toepassende, blijkt het, dat zij, b en b_1 zoowel als p positief zijnde, een hyperbel, eene parabel of eene ellips voorstelt naar gelang

$$2b_1^2 \gtrless, = \text{ of } < p(4b+p) \text{ is.}$$

Lossen wij deze vergelijking op ten opzigte van y, dan komt er:

$$y = \frac{2b_1}{4b+p}x + \frac{b_1p}{2(4b+p)}$$
$$\pm\frac{\sqrt{\{8\{2b_1^2-p(4b+p)\}x^2+2p\{4b_1^2+(4b+p)^2\}x+p^2\{b_1^2-2b(4b+p)\}}}}{2(4b+p)}.$$

Stellen wij derhalve:

$$y = y_1 + \frac{2b_1}{4b+p}x + \frac{b_1p}{2(4b+p)}.$$

Digitized by Google

dan wordt:

$$4(4b+p)^2 y_1^2 = 8\{2b_1^2 - p(4b+p)\}x^2$$
$$+ 2p\{4b_1^2 + (4b+p)^2\}x + p^2\{b_1^2 - 2b(4b+p)\} \quad \text{(c)}$$

Voor de gevallen, waarin $2b_1^2 - p(4b+p)$ niet gelijk nul is, lossen wij uit deze vergelijking x op; wij vinden:

$$x = -p \times \frac{4b_1^2 + (4b+p)^2}{8\{2b_1^2 - p(4b+p)\}}$$
$$\pm \frac{(4b+p)\sqrt{\{32\{2b_1^2 - p(4b+p)\}\{y_1^2 + p^2\{16b_1^2 + (4b-p)^2\}\}}}}{8\{2b_1^2 - p(4b+p)\}},$$

zoodat door

$$x = x_1 - p \times \frac{4b_1^2 + (4b+p)^2}{8\{2b_1^2 - p(4b+p)\}}$$

te stellen, de laatste vergelijking overgaat in:

$$x_1^2 = \frac{(4b+p)^2\{32\{2b_1^2 - p(4b+p)\}y_1^2 + p^2\{16b_1^2 + (4b-p)^2\}\}}{64\{2b_1^2 - p(4b+p)\}^2}$$

of $y_1^2 = \dfrac{2\{2b_1^2 - p(4b+p)\}}{(4b+p)^2}x_1^2 - \dfrac{p^2\{16b_1^2 + (4b-p)^2\}}{32\{2b_1^2 - p(4b+p)\}}$,

of wel $$y_1^2 = \frac{2\{2b_1^2 - p(4b+p)\}}{(4b+p)^2}$$
$$\times\left\{x_1^2 - \frac{p^2(4b+p)^2\{16b_1^2 + (4b-p)^2\}}{64\{2b_1^2 - p(4b+p)\}^2}\right\}.$$

Voor het geval dat $2b_1^2 = p(4b+p)$ is, wordt de vergelijking (c):

$$4(4b+p)^2 y_1^2 = 2p(4b+p)(4b+3p)x - \tfrac{1}{2}p^3(4b-p)(4b+p),$$

dat is: $$y_1^2 = \frac{\tfrac{1}{2}p\{(4b+3p)x - \tfrac{1}{2}p(4b-p)\}}{4b+p}.$$

Stelt men hierin $(4b+3p)x - \tfrac{1}{2}p(4b-p) = x_1$,

dan wordt: $$y_1^2 = \frac{p}{2(4b+p)}x_1.$$

Voor het geval dat $2b_1^2 = p(4b+p)$ is, wordt de vergelijking (c), na door $4b+p$ gedeeld te zijn:

$$4(4b+p)y_1^2 = 2p(4b+3p)x - \tfrac{1}{2}p^2(4b-p)$$

en dus: $$y_1^2 = p \times \frac{4(4b+3p)x - p(4b-p)}{8(4b+p)}.$$

Stellende alzoo

$$\frac{4b+3p}{2(4b+p)}x - \frac{p(4b-p)}{8(4b+p)} = x_1,$$

dan wordt $y_1^2 = px_1$.

Digitized by Google

Ligt het gegevene punt in de as der y, dan is $b=0$ en in dit geval gaan de gevondene vergelijkingen over in

$$y_1^2=\frac{2(2b_1^2-p^2)}{p^2}\left\{x_1^2-\frac{p^4(16b_1^2+p^2)}{64(2b_1^2-p^2)^2}\right\}$$

en $y_1^2=px_1$, waarbij men echter dient in het oog te houden, dat de verplaatsing der assen nu afhangt, voor de beide vergelijkingen, van $y=y_1+\frac{2b_1}{p}x+\frac{1}{2}b_1$, en voor de eerste van

$$x=x_1-p\times\frac{4b_1^2+p^2}{8(2b_1^2-p^2)}$$

en voor de laatste van $1\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}p=x_1$. Nu zal de eerste eene hyperbel of eene ellips zijn, naar gelang $b_1\sqrt{2}>$ of $<p$ is, terwijl bij de laatste $b_1\sqrt{2}=p$ is.

Ligt daarentegen het gegevene punt in de as der x, zoodat $b_1=0$ is, dan hebben wij de vergelijkingen:

$$y^2=\frac{2p}{4b+p}\times\left\{\frac{(4b-p)^2}{64}-x_1^2\right\}.$$

Hierbij is de oude as der x gebleven, terwijl die der y afhangt van de vergelijking:

$$x=x_1+\frac{4b+p}{8p}.$$

Indien b en p beide positief zijn, zal de meetkundige plaats steeds eene ellips zijn. Is echter, p positief zijnde, b negatief, dan kunnen wij de laatste vergelijking schrijven:

$$y^2=\frac{2p}{4b-p}\left\{x_1^2-\frac{(4b+p)^2}{64}\right\},$$

welke nu weder eene hyperbel of eene ellips voorstelt, al naar dat $b>$ of $<\frac{1}{4}p$ is. De parabel gaat nu blijkens vergelijking (c) over in twee met de as der y evenwijdige lijnen, want dan is $x=\pm\frac{1}{4}p$. Voor het verplaatsen der y-as heeft men bij de eerste $x=x_1+\frac{p-4b}{8p}$ en bij de laatste gelden de oude.

Voor $b_1=0$ en $b=0$ wordt

$$y^2=2\left(\frac{1}{64}p^2-x^2\right)=\frac{\frac{1}{32}p^2}{\frac{1}{64}p^2}\left\{\frac{1}{64}p^2-x^2\right\}.$$

In dit geval is de kromme eene ellips.

Digitized by Google

XC. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Zonder behulp van den supplements-driehoek de vlakke hoeken eens drie-vlakkigen hoeks te bepalen, als de drie standhoeken gegeven zijn.

Opgelost *door* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Drukken wij (zie fig. 29) de standhoeken des drievlakkigen hoeks door A, B en C en de zijvlakken door a, b en c uit, dan is, zoo als bekend is, $Cos\, a = \frac{Cos\, A + Cos\, B\, Cos\, C}{Sin\, B\, Sin\, C}$. Maar nu is volgens eene bekende formule:

$$Cos\, B\, Cos\, C = \tfrac{1}{2}\, Cos\, (B - C) + \tfrac{1}{2}\, Cos\, (B + C)$$

en $$Sin\, B\, Sin\, C = \tfrac{1}{2}\, Cos\, (B - C) - \tfrac{1}{2}\, Cos\, (B + C),$$

wij kunnen alzoo schrijven:

$$Cos\, a = \frac{2\, Cos\, A + Cos\, (B - C) + Cos\, (B + C)}{Cos\, (B - C) - Cos\, (B + C)}$$

en daaruit volgt: $1 + Cos\, a = \frac{2\{Cos\, A + Cos\, (B - C)\}}{Cos\, (B - C) - Cos\, (B + C)}$.

Nu beschrijven wij met $MN = 1$ als straal een halven cirkel en nemen $BN = B - C$, $CN = B + C$ en $AO = A$. Laten wij dan uit B, A en C loodlijnen neer, dan is $DM = Cos\, (B - C)$, $MG = -\, Cos\, (B + C)$ en $MF = Cos\, A$, derhalve:
$DG = Cos\, (B - C) - Cos\, (B + C)$ en $DF = Cos\, A + Cos\, (B - C)$.

Na $Dm = MN = 1$ genomen te hebben, beschrijven wij om m als middelpunt met die eenheid als straal wederom een halven cirkel, welke het verlengde van de middellijn NO in P snijdt, dan is $DP = 2$. Trekken wij nu uit D eene willekeurige rechte lijn en brengen wij DF daarop over, zoodat $DF_1 = DF$ is, dan zal de lijn HP uit P evenwijdig met F_1G getrokken het punt H doen vinden en dan is $DH = 1 + Cos\, a$, want dan wordt $DG : DP = DF_1 : DH$, dat is:

$$Cos\, (B - C) - Cos\, (B + C) : 2 = Cos\, A + Cos\, (B - C) : DH$$

en dus: $$DH = \frac{2\{Cos\, A + Cos\, (B - C)\}}{Cos\, (B - C) - Cos\, (B + C)}.$$

Maakt men alzoo $DH_1 = DH$, dan is $mH_1 = Cos\, a$ en dus de loodlijn H_1L oprigtende, is hoek $LmH_1 = a$.

NB. Bij het aannemen der standhoeken moet natuurlijk $A + B + C > 2R$ zijn.

Digitized by Google

XCI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Van een bolvormigen driehoek zijn gegeven de hoek C *en de bogen* a *en* b: *men verlangt de beide andere hoeken te construeeren.*

Opgelost *door* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Wij nemen (zie fig. 30) op den omtrek van den met de eenheid als straal beschreven cirkel $AD = b$ en $CD = a$. Trekken wij dan AC en DG daarmede evenwijdig, dan zal, indien wij den straal MF loodrecht op deze lijnen trekken, $AF = \frac{1}{2}(b+a)$ en $FG = \frac{1}{2}(b-a)$ zijn en dus $CL = AL = Sin\,\frac{1}{2}(b+a)$ en $DN = GN = Sin\,\frac{1}{2}(b-a)$. Richten wij vervolgens den straal ME loodrecht op de middellijn AB op en nemen wij $EH = \frac{1}{2}C$, dan zal blijkbaar AI, welke in A loodrecht op AB staat en het verlengde van MH in I snijdt, de cotangens van $\frac{1}{2}C$ zijn, zoodat wij hebben $AI = Cot\,\frac{1}{2}C$. Vereenigen wij nu de punten I en L door eene rechte lijn en trekken wij uit G en N lijnen, evenwijdig met AI en LI, welke elkander in O snijden, dan zijn natuurlijk de driehoeken ALI en GNO gelijkvormig en daaruit volgt $AL : GN = AI : GO$, dat is:

$$Sin\,\tfrac{1}{2}(b-a) : Sin\,\tfrac{1}{2}(b-a) = Cot\,\tfrac{1}{2}C : GO,$$

waaruit:
$$GO = \frac{Sin\,\frac{1}{2}(b-a)}{Sin\,\frac{1}{2}(b+a)}\,Cot\,\tfrac{1}{2}C.$$

Trekken wij dus de raaklijn van het punt G en maken wij daarop $GP = GO$, dan is hoek $GMS = \frac{1}{2}(B-A)$, want dan is *tang* hoek GMS of $tg\,\frac{1}{2}(B-A) = GO$. Richten wij vervolgens in het snijpunt Q van de lijnen AC en MG eene loodlijn op deze laatste lijn op en nemen wij daarop $QI_1 = AI = Cot\,\frac{1}{2}C$, dan zal hoek $I_1MG = \frac{1}{2}(B+A) = RMG$ zijn. Immers is $ML = Cos\,\frac{1}{2}(b+a)$ en $MN = Cos\,\frac{1}{2}(b-a)$. Voorts

$$MQ : MG = ML : MN = Cos\,\tfrac{1}{2}(b+a) : Cos\,\tfrac{1}{2}(b-a)$$

en daar blijkbaar $MQ : MG = QI_1$: *tang* hoek RMG is, zoo volgt daaruit *tang* hoek $RMG = \dfrac{Cos\,\frac{1}{2}(b-a)}{Cos\,\frac{1}{2}(b+a)}\,Cot\,\frac{1}{2}C = tg\,\frac{1}{2}(B+A)$.

Wij hebben dus $RMG = \frac{1}{2}(B+A)$, hoek $GMS = \frac{1}{2}(B-A)$, derhalve hoek $RMS = RMG - GMS = A$ en $GZ = GS$ nemende, is hoek $RMZ =$ hoek $RMG +$ hoek $GMS = B$.

Digitized by Google

XCII. Voorstel. (*)

Door J. J. Teding van Berkhout.

De middellijn AB *eens cirkels is in de punten* A′ *en* B′ *harmonisch gedeeld: wordt nu eene loodlijn op* AB *opgericht in* A′ (*of in* B′) *en men trekt door eenig punt* D *in die loodlijn eene lijn door* B′ (*of* A′) *welke den cirkel snijdt in de punten* E *en* F, *dan is de koorde* EF *des cirkels in de punten* B′ (*of* A′) *en* D *harmonisch gedeeld. Vrage naar het bewijs.*

Opgelost *door* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* J. J. Teding van Berkhout.

Zij de loodlijn op AB in het punt B′ opgericht en C het middelpunt van den cirkel. Men heeft volgens de onderstelling

$$\underline{\underline{AA'}} : A'B = \underline{\underline{AB'}} : BB' \text{ en derhalve}$$

$$AB - A'B : A'B = AB + BB' : BB'$$

$$AB - 2A'B : AB - A'B = AB : AB + BB'$$

$$BC - A'B : \underline{\underline{AA'}} = BC : AB'$$

$$BC : BC - A'B = AB' : AA'$$

$$A'B : BC - A'B = A'B' : AA'$$

$$A'B : \underline{\underline{A'C}} = A'B' : AA'.$$

[Men vindt hetgeen in deze evenredigheid wordt aangetoond doorgaans aldus voorgesteld:

$$AA' \times A'B = A'C \times A'B',$$

d. i. de rechthoek onder de afstanden van één der deelpunten tot de beide eindpunten der harmonisch gedeelde lijn is gelijk aan den rechthoek onder den afstand van datzelfde deelpunt tot het middelpunt der harmonisch gedeelde lijn en den onderlingen afstand der beide deelpunten, en dan anders bewezen.]

Men late nu uit het middelpunt C eene loodlijn vallen op de koorde EF, welke door die loodlijn, in het voetpunt G in twee gelijke deelen wordt gedeeld. Men heeft dan $\triangle A'CG \backsim \triangle A'B'D$ en

$$A'C : A'G = A'D : A'B'$$

Maar $A'C : A'B = A'A : A'B'$, derhalve

$$A'B : A'G = A'D : A'A$$

Maar $A'B : A'E = A'F : A'A$, derhalve

(*) Dit en het volgende voorstel zijn zonder bewijs opgegeven in *A collection of Theorems and Problems* achter *A Dissertation on the geometrical analysis of the antients.* Canterbury 1774.

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
A'E &: A'G = A'D : A'F \\
GE - A'G &: A'G = DF - A'F : A'F \\
GE &: A'G = DF : A'F \\
GE &: GE - A'E = DF : A'F \\
FE &: FE - 2A'E = DF : FE - A'E \\
FE - A'E &: FE - 2A'E = DF : FE = FE + DE : FE \\
A'E &: FE - A'E = DE : FE + DE \\
A'E &: A'F = DE : DF
\end{aligned}$$

en de lijn EF is in de punten A′ en D harmonisch gedeeld.

XCIII. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

De middellijn AB *eens cirkels is in de punten* A′ *en* B′ *harmonisch gedeeld. Trekt men nu door* A′ (*of* B′) *eene lijn welke den cirkel snijdt in* E *en* F *en vereenigt men de punten* E *en* F *met* B′ (*of* A′) *dan is* A′E : A′F = B′E : B′F. *Vrage naar het bewijs.*

Opgelost *door* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* J. J. Teding van Berkhout.

Men richte (zie fig. 31) in A′ eene loodlijn op AB op, dan zal deze door B′EF gesneden worden in een punt D, en heeft men volgens hetgeen bewezen is in het voorgaande voorstel, EF harmonisch gedeeld in B′ en D en

$$B'E : B'F = DE : DF.$$

A′D snijdt den hoek EA′F en A′B′ snijdt den supplementshoek E middendoor: derhalve ∠EA′D = ∠DA′F. Trekt men nu uit F met een straal gelijk aan A′F een cirkel, dan zal deze de loodlijn A′D ergens in een punt G snijden; trekt men FG, dan is de driehoek A′FG gelijkbeenig. De driehoeken A′DE en FDG zijn gelijkvormig: derhalve

$$DE : A'E = DF : FG = DF : A'F,$$
$$A'E : A'F = DE : DF = B'E : B'F,$$

dat te bewijzen was.

Aanm. Daar de lijn EF harmonisch gedeeld is, zoo zijn A′B′, A′E, A′D, A′F vier harmonische stralen, waarvan A′B′ en A′D loodrecht op elkander staan, waaruit afgeleid wordt, volgens eene bekende eigenschap, dat ∠EA′B′ = ∠DA′F.

Digitized by Google

XCIV. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Een gedeeltelijk met water gevuld vat, dat de gedaante heeft van een rechten cirkelvormigen kegel, wordt in een schuinschen stand geplaatst, zoodat de oppervlakte van het water eene ellips vormt. Vrage aan te toonen, dat de kleine as van deze ellips eene standvastige *waarde heeft.*

Opgelost *door* H. van Blanken, L. van Zanten Jz. *en* J. M. Heijbrock.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Laat in fig. 32 AB $= 2a$ de groote as der ellips voorstellen, dan is het punt M op het midden van AB het middelpunt der ellips. Men trekke door de punten A, B en M de lijnen AC, BD en EF loodrecht door de as SO des kegels, en stelle de halve kleine as der ellips $= b$, dan is blijkbaar

$$b^2 = ME \times MF = \tfrac{1}{2}AC \times \tfrac{1}{2}BD.$$

Men stelle verder den tophoek des kegels $= 2\alpha$, de loodlijn SP $= z$ en den hoek OSP $= \phi$, dan is:

$$AS = \frac{z}{Cos(\phi+\alpha)},\ BS = \frac{z}{Cos(\phi-\alpha)},\ AP = z\,tg(\phi+\alpha),\ BP = z\,tg(\phi-\alpha),$$

$$\tfrac{1}{2}AC = \frac{z\,Sin\,\alpha}{Cos\,(\phi+\alpha)},\ \tfrac{1}{2}BD = \frac{z\,Sin\,\alpha}{Cos\,(\phi-\alpha)},$$

$$2a = z\,tg\,(\phi+\alpha) - z\,tg\,(\phi-\alpha) = \frac{2z\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha}{Cos^2\phi\,Cos^2\alpha - Sin^2\phi\,Sin^2\alpha}$$

$$b^2 = \frac{z^2\,Sin^2\,\alpha}{Cos^2\,\phi\,Cos^2\,\alpha - Sin^2\,\phi\,Sin^2\,\alpha}.$$

De ruimte, welke door het water wordt ingenomen is:

$$= \tfrac{1}{3}\,zab\pi = \tfrac{1}{3}\,z^3\pi \times \frac{Sin^2\,\alpha\,Cos\,\alpha}{(Cos^2\,\phi\,Cos^2\,\alpha - Sin^2\,\phi\,Sin^2\,\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Laat, als $\phi = 0$ is, $z = h$ zijn, dan heeft men, daar het water steeds dezelfde ruimte inneemt,

$$\tfrac{1}{3}\,z^3\pi \times \frac{Sin^2\,\alpha\,Cos\,\alpha}{(Cos^2\,\phi\,Cos^2\,\alpha - Sin^2\,\phi\,Sin^2\,\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{3}\,h^3\pi \times \frac{Sin^2\,\alpha}{Cos^2\,\alpha}$$

$$z = h \times \frac{(Cos^2\,\phi\,Cos^2\,\alpha - Sin^2\,\phi\,Sin^2\,\alpha)^{\frac{1}{2}}}{Cos\,\alpha}.$$

Door substitutie van deze waarde verkrijgt men $b = h\,tg\,\alpha$.

De grootte der kleine as van de ellips is bijgevolg onafhankelijk van ϕ.

Digitized by Google

Aanmerkingen. Daar $\frac{1}{3}sab\pi$ en b constant zijn, zoo moet ook sa, dat is, de inhoud van den driehoek ABS eene constante waarde hebben. Hieruit volgt, dat de meetkundige plaats van het punt M eene omwenteling-hyperboloïde is, welke steeds door de ellips wordt aangeraakt. Neemt men $\alpha = 45^\circ$, dan wordt $z^2 = h^2 \, Cos^2 \, \Phi$. De meetkundige plaats van het voetpunt P der loodlijn SP is bijgevolg in dit geval eene omwenteling-lemniscate.

XCV. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Vrage naar de assen der kegelsnede, welke in trilineaire coördinaten tot vergelijking heeft $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$.

Opgelost *door* H. van Blanken.

Oplossing *van* H. van Blanken.

De kegelsnede is blijkbaar eene ellips. Elke zijde van den assendriehoek is dus evenwijdig aan twee raaklijnen. De raaklijnen, welke evenwijdig aan de zijde BC zijn, behooren tot die punten der ellips, alwaar α eene grootste of kleinste waarde heeft. Om dus de coördinaten van de raakpunten te verkrijgen, differentiëre men de vergelijkingen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$ en $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2I$, en stelle $\frac{d\alpha}{d\beta} = 0$, dan verkrijgt men, na eliminatie van $\frac{d\gamma}{d\beta}$, de vergelijking $c\beta - b\gamma = 0$. Deze vergelijking behoort tot de middellijn, welke door de twee raakpunten gaat.

Verder vindt men voor de twee raaklijnen:

$$\alpha = \frac{2aI \pm \sqrt{(b^2 + c^2)\{(a^2 + b^2 + c^2)k^2 - 4I^2\}}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Daar de uitdrukking $(a^2 + b^2 + c^2)k^2 - 4I^2$ eene positieve waarde moet hebben, kan men haar, ter bekorting, $= p^2$ stellen; voorts stelle men $a^2 + b^2 + c^2 = s$. Door gebruik te maken van de vergelijkingen $c\beta = b\gamma$ en $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2I$ vindt men dan voor de coördinaten der raakpunten:

$$\alpha = \frac{2aI}{s} \pm \frac{p}{s}\sqrt{(b^2 + c^2)}, \quad \beta = \frac{2bI}{s} \mp \frac{pc}{\sqrt{(b^2 + c^2)}},$$

$$\gamma = \frac{2cI}{s} \mp \frac{pb}{\sqrt{(b^2 + c^2)}}.$$

Digitized by Google

Noemt men $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ de coördinaten van het middelpunt der ellips, dan heeft men blijkbaar:

$$\frac{\bar{\alpha}}{a}=\frac{\bar{\beta}}{b}=\frac{\bar{\gamma}}{c}=\frac{2I}{s}.$$

Daar deze coördinaten onafhankelijk van k zijn, moeten alle ellipsen, welke men verkrijgt door aan k verschillende waarden te geven, een gemeenschappelijk middelpunt hebben.

Laat $2r_1$ de middellijn zijn, welke door de raakpunten gaat, dan vindt men gemakkelijk, door den afstand van het middelpunt tot een der raakpunten te bepalen:

$$r_1^2=\frac{a^2b^2c^2p^2}{4I^2s^2}\times\frac{2b^2+2c^2-a^2}{b^2+c^2}.$$

De vergelijking der middellijn, welke evenwijdig aan de zijde BC loopt, is blijkbaar $\alpha=\frac{2aI}{a^2+b^2+c^2}$.

Brengt men deze waarde van α in de vergelijkingen $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=k^2$ en $a\alpha+b\beta+c\gamma=2I$, dan vindt men gemakkelijk voor de coördinaten der uiteinden van de aan BC evenwijdige middellijn:

$$\alpha'=\frac{2aI}{s},\quad \beta'=\frac{2bI}{s}\pm\frac{pc}{\sqrt{s(b^2+c^2)}},$$

$$\gamma'=\frac{2cI}{s}\mp\frac{pb}{\sqrt{s(b^2+c^2)}}.$$

Stelt men deze middellijn $=2r_2$, dan vindt men door den afstand der punten $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ en $(\alpha', \beta', \gamma')$ te bepalen:

$$r_2^2=\frac{a^2b^2c^2p^2}{4I^2s(b^2+c^2)}.$$

Men heeft dus:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{s}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Deze verhouding is onafhankelijk van k. Alle ellipsen, welke men verkrijgt door aan k verschillende waarden te geven, zijn dus gelijkvormig en hebben, ten opzichte van den assendriehoek, denzelfden stand.

Om den hoek ϕ te vinden, dien de middellijnen met elkander maken, merke men op, dat hij gelijk is aan den hoek, onder welken de lijn $c\beta-b\gamma=0$ de zijde BC doorsnijdt.

Digitized by Google

De coördinaten van het snijpunt D zijn:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{2bI}{b^2 + c^2}, \quad \gamma = \frac{2cI}{b^2 + c^2}$$

en de coördinaten van het hoekpunt A, $\alpha = \frac{2I}{a}$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Men vindt hieruit gemakkelijk $AD^2 = \frac{b^2c^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)^2}$.

Voorts heeft men $BC^2 \times AD^2 \times Sin^2 \phi = 4I^2$ en bijgevolg

$$Sin^2 \phi = \frac{4I^2}{BC^2 \times AD^2} = \frac{4I^2(b^2 + c^2)^2}{a^2b^2c^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}.$$

Stelt men de halve assen der ellips $= R_1$ en R_2, dan heeft men, omdat $2r_1$ en $2r_2$ gekoppelde middellijnen zijn,

$$R_1^2 + R_2^2 = r_1^2 + r_2^2 = \frac{3a^2b^2c^2p^2}{4I^2s^2}$$

$$\text{en} \quad R_1^2R_2^2 = r_1^2r_2^2 \, Sin^2 \phi = \frac{a^2b^2c^2p^4}{4I^2s^3}.$$

Hieruit volgt:

$$R_1^2 = \frac{abcp^2}{8I^2s^2} \times \left\{3abc + \sqrt{(9a^2b^2c^2 - 16I^2s)}\right\}$$

$$R_2^2 = \frac{abcp^2}{8I^2s^2} \times \left\{3abc - \sqrt{(9a^2b^2c^2 - 16I^2s)}\right\}:$$

Men kan de assen ook verkrijgen op de wijze, welke in Ferrers *Nieuwere Meetk.*, § 91 wordt aangeduid.

Men stelle namelijk $\alpha - \bar{\alpha} = x$, $\beta - \bar{\beta} = y$, $\gamma - \bar{\gamma} = z$, en de halve middellijn, welke uit het middelpunt naar het punt (α, β, γ) is getrokken $= r$, dan heeft men

$$r^2 = \frac{abc}{4I^2}(a \, Cos \, A . x^2 + b \, Cos \, B . y^2 + c \, Cos \, C . z^2) \quad . \quad . \quad (1)$$

Voorts heeft men $\frac{2I}{s} = n$ stellende, $\bar{\alpha} = an$, $\bar{\beta} = bn$, $\bar{\gamma} = cn$; bijgevolg $\alpha = x + an$, $\beta = y + bn$; $\gamma = z + cn$.

Brengt men deze waarden in de vergelijking $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$, dan verkrijgt men:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2n(ax + by + cz) + (a^2 + b^2 + c^2)n^2 = k^2.$$

Men heeft blijkbaar $ax + by + cz = 0$. . . . . (2)

en bijgevolg

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2 - (a^2 + b^2 + c^2)n^2 = k^2 - \frac{4I^2}{s} = \frac{p^2}{s}. \quad (3)$$

Nu zijn de assen de grootste en de kleinste halve middel-

Digitized by Google

lijnen. Men heeft dus:

$$\frac{4I^2}{abc}r^2 = a\,Cos\,A.x^2 + b\,Cos\,B.y^2 + c\,Cos\,C.z^2 \;.\;.\;(4)$$

tot een maximum of minimum te maken, met inachtneming, dat x, y, z onderling verbonden zijn door de betrekkingen (2) en (3). Door (2) met den onbepaalden factor 2μ en (4) met λ te vermenigvuldigen, ze vervolgens bij (3) op te tellen, daarna te differentiëren en de coëfficienten van elke differentiaal gelijk nul te stellen, verkrijgt men:

$$\left.\begin{array}{l} x + \lambda\,a\,Cos\,A.x + \mu a = 0, \\ y + \lambda\,b\,Cos\,B.y + \mu b = 0, \\ z + \lambda\,c\,Cos\,C.z + \mu c = 0. \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

Deze vergelijkingen naar volgorde met x, y, z vermenigvuldigende en optellende, vindt men:

$$\frac{p^2}{s} + \lambda.\frac{4I^2}{abc}r^2 = 0,$$

$$\lambda = -\frac{abcp^2}{4I^2s} \times \frac{1}{r^2}.$$

Uit (5) heeft men:

$$\mu = -\frac{1+\lambda\,a\,Cos\,A}{a}x = -\frac{1+\lambda\,b\,Cos\,B}{b}y = -\frac{1+\lambda\,c\,Cos\,C}{c}z.$$

Hieruit volgt: $y = \frac{1+\lambda\,a\,Cos\,A}{1+\lambda\,b\,Cos\,B}.\frac{bx}{a}$, $z = \frac{1+\lambda\,a\,Cos\,A}{1+\lambda\,c\,Cos\,C}.\frac{cx}{a}$.

Brengt men deze waarden in vergel. (2), dan verkrijgt men

$$(a^2bc\,Cos\,B\,Cos\,C + b^2ac\,Cos\,A\,Cos\,C + c^2ab\,Cos\,A\,Cos\,B)\lambda^2$$
$$+ (a^2b\,Cos\,B + a^2c\,Cos\,C + b^2a\,Cos\,A + b^2c\,Cos\,C + c^2a\,Cos\,A + c^2b\,Cos\,B)\lambda$$
$$+ a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

De coëfficient van λ^2 is

$$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2} \times \frac{a^2-b^2+c^2}{2} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2} \times \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$$
$$+ \frac{a^2-b^2+c^2}{2} \times \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$$
$$= \frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{4} = 4I^2$$

en de coëfficient van λ is $= 3abc$. Men heeft dus

$$4I^2\lambda^2 + 3abc\lambda + a^2 + b^2 + c^2 = 0,$$

of, voor λ de boven gevonden waarden stellende.

$$r^4 - \frac{3a^2b^2c^2p^2}{4I^2s^2}r^2 + \frac{a^2b^2c^2p^4}{4I^2s^2} = 0.$$

Digitized by Google

Deze vergelijking levert voor R_1^2 en R_2^2 dezelfde waarden, welke boven zijn verkregen.

Als $b = c$ is, staat AD loodrecht op BC; bijgevolg zijn r_1 en r_2 alsdan de halve assen en moeten dus met R_1 en R_2 overeenkomen.

In aanmerking nemende, dat in dit geval $16I^2 = a^2(4b^2 - a^2)$ is, kan men de verkregen waarden aldus schrijven:

$$r_1^2 = \frac{a^2b^2p^2}{8I^2s^2} \times (4b^2 - a^2), \quad r_2^2 = \frac{a^2b^2p^2}{8I^2s^2} \times (2b^2 + a^2),$$

$$R_1^2 = \frac{a^2b^2p^2}{8I^2s^2} \times \{3b^2 + (b^2 - a^2)\},$$

$$R_2^2 = \frac{a^2b^2p^2}{8I^2s^2} \times \{3b^2 - (b^2 - a^2)\}.$$

De overeenkomst valt nu terstond in het oog. Ook is uit de waarden van r_1 en r_2 blijkbaar, dat in dit geval de eerste of de tweede as loodrecht op BC zal staan naar dat b grooter of kleiner is dan a.

Wanneer $b = a$ en de assendriehoek bijgevolg gelijkzijdig wordt, dan gaat de ellips over in een cirkel.

Stelt men nu de hoogte $= h$, dan is:

$$4I^2 = a^2h^2 \text{ en } R = \frac{p^2}{6h^2} = \frac{6k^2 - 2h^2}{9}.$$

In het bijzonder geval van $k = h$ wordt $R = \frac{2}{3}h$. Hieruit blijkt, dat de som der vierkanten van de loodlijnen, welke uit eenig punt des omschreven cirkels op de zijden van eenen gelijkzijdigen driehoek getrokken worden, gelijk is aan het vierkant op de hoogte des driehoeks.

Men kan dit ook op de volgende eenvoudige wijze aantoonen: Uit de vergelijking $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2I = ah$ volgt, als $a = b = c$ is, $\alpha + \beta + \gamma = h$. Voorts heeft men in dit geval voor elk punt van den omschreven cirkel $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0$. Wanneer men de tweede macht van de eerste vergelijking vermindert met het tweevoud der tweede, dan verkrijgt men terstond $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = h^2$.

XCVI. Voorstel. (*)

Door C. J. Matthes.

Van eene kegelsnede zijn gegeven een brandpunt S *en twee punten* P *en* Q *aan den omtrek; te bewijzen, dat de meet-*

(*) Dit en de volgende vier voorstellen zijn ontleend aan Ferrers *Nieuwere Meetkunde*, voorbeelden 37, 38, 39, 40 en 41.

Digitized by Google

kundige plaats van de snijpunten der raaklijnen in die punten een stelsel is van twee rechte lijnen, die een rechten hoek met elkander maken en door het brandpunt gaan.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Nemen wij het brandpunt S tot middelpunt van weêrkeerigheid aan, dan zullen de weêrkeerigen van alle kegelsneden die dat brandpunt gemeen hebben, ten opzichte daarvan, cirkels zijn (zie FERRERS §§ 118 en 124). Nu hebben de punten P en Q tot poollijnen lijnen ⊥ PS en QS; die poollijnen zijn raaklijnen tot elken der weêrkeerige cirkels, wier middelpunten dus op de lijn, welke den hoek dier poollijnen of deszelfs supplement halveert, gelegen moeten zijn. Op zulk eene lijn staat de poollijn van het doorsnijdingspunt der twee raaklijnen van eenige kegelsnede altijd loodrecht, deze poollijnen zijn derhalve evenwijdig, dat is, snijden elkander in een punt op oneindigen afstand, waarvan de poollijn is eene middellijn van S in twee bepaalde onderling loodrechte richtingen.

XCVII. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Te bewijzen, dat men door drie gegevene punten vier kegelsneden kan beschrijven met een gegeven brandpunt, en dat de parameter van eene van haar gelijk is aan de som der parameters van de overige drie.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Het gegeven brandpunt wederom tot middelpunt van weêrkeerigheid aannemende, heeft men, dat de weêrkeerigen van alle mogelijke kegelsneden met dat brandpunt en welke door de drie gegeven punten gaan, cirkels zijn die de poollijnen dier drie punten aanraken. Nu kunnen drie rechte lijnen slechts door vier cirkels worden aangeraakt, van wier stralen r, α, β, γ bekend is dat $\frac{1}{r}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$; waaruit volgt, daar in 't algemeen voor eene der bewuste kegelsneden de parameter $=2l=\frac{2k^2}{\varrho}$, zijnde k de constante van weêrkeerigheid of straal van den halfcirkel en ϱ de straal van den weêrkeerigen cirkel (zie FERRERS § 124), dat de parameter van eene van de vier gelijk is aan de som der parameters van de overige drie.

Digitized by Google

XCVIII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Op eene bepaalde raaklijn aan eene kegelsnede zijn genomen een vastpunt A *en twee bewegelijke punten* P *en* Q, *zoodat* AP *en* AQ *gelijke hoeken onderspannen in een onveranderlijk punt* O. *Uit* P *en* Q *zijn twee andere raaklijnen aan de kegelsnede getrokken. Te bewijzen, dat het doorsnijdingspunt van deze eene rechte lijn tot meetkundige plaats heeft.*

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Als men uit een punt aan den omtrek eener kegelsnede een aantal paren koorden trekt, wier hoek door één op zich zelve staande koorde gehalveerd wordt, dan zullen de lijnen, die de andere uiteinden van dergelijke paren koorden verbinden, naar één punt convergeren.

Immers de weêrkeerige dier kegelsnede ten opzichte van het eerstgenoemde punt aan den omtrek is (zie Ferrers § 104) eene parabel. Neemt men van die parabel zelve de weêrkeerige ten opzigte van haar brandpunt S, zoo verkrijgt men een cirkel, aan welks omtrek dit brandpunt gelegen is. Lijnen daaruit in den cirkel getrokken, die twee aan twee met eene afzonderlijke koorde uit datzelfde punt gelijke hoeken maken, hebben hare andere uiteinden in evenwijdige lijnen gelegen, dat is, in lijnen, die naar een punt op oneindigen afstand convergeren. Hieruit volgt (zie Ferrers § 116) dat de meetkundige plaats der doorsnijdingspunten van elk paar raaklijnen aan de parabel, dat met eene vaste raaklijn gelijke hoeken maakt, eene rechte lijn is, en wel de loodlijn uit S op bovengenoemde evenwijdige lijnen neêrgelaten, waarmeê dan tevens het oorspronkelijk beweerde voor elke kegelsnede betoogd is.

Uit die algemeene eigenschap kan men nu het bewijs onzer stelling afleiden. Zij het willekeurige punt O middelpunt van weêrkeerigheid; de weêrkeerige kromme is steeds eene kegelsnede. De punten P, Q onderspannen in O een hoek die door OA gehalveerd wordt. Van die punten A, P, Q zijn in de weêrkeerige kegelsnede lijnen a', p', q', allen gaande door het poolpunt der raaklijn PAQ, de poollijnen, wier tweede snijpunten met den omtrek wederom de polen zijn der

Digitized by Google

tweede raaklijnen uit A, P, Q aan de gegeven kegelsnede getrokken. Daar nu p'_0 en q'_0, p'_1 en q'_1, p'_2 en q'_2 enz. met a' gelijke hoeken moeten maken, gaan de verbindingslijnen der andere uiteinden door één punt, zijnde de pool eener rechte lijn, waarop zich al de bedoelde doorsnijdingspunten moeten bevinden.

XCIX. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Twee veranderlijke raaklijnen snijden van eene vaste raaklijn eener kegelsnede een stuk af, hetwelk in een bepaald punt een rechten hoek onderspant. Te bewijzen, dat de meetkundige plaats van het doorsnijdingspunt der veranderlijke raaklijnen eene rechte lijn is.

In het bijzondere geval, dat het bepaalde punt een brandpunt is, zal de meetkundige plaats de bijbehoorende richtlijn zijn.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Als men in eene kegelsnede een aantal koorden trekt, die in een willekeurig punt aan den omtrek rechte hoeken onderspannen, dan gaan die koorden allen door hetzelfde punt. Ten opzichte toch van het punt aan den omtrek als middelpunt van weêrkeerigheid is de weêrkeerige der kegelsnede steeds eene parabel, op welker richtlijn de polen der bewuste koorden gelegen zijn.

Zij nu PQ het stuk der vaste raaklijn dat in het bepaalde punt O een rechten hoek onderspant, zoo neme men dat punt als middelpunt van weêrkeerigheid aan, als wanneer de poollijnen van P en Q koorden van de weêrkeerige kegelsnede zijn, die in het punt aan haren omtrek, dat de pool is der vaste raaklijn, een rechten hoek met elkander maken. De verbindingslijnen der andere uiteinden van dergelijke paren koorden convergeren dus naar één punt, de pool eener rechte lijn, welke bijgevolg de meetkundige plaats is van het doorsnijdingspunt der beide raaklijnen, die het stuk op de vaste raaklijn begrenzen.

Is het punt O een brandpunt der kegelsnede, dan is de weêrkeerige een cirkel, en zijn middelpunt het convergentiepunt der verbindingslijnen, waarvan de bijbehoorende richtlijn der kegelsnede de poollijn is.

Digitized by Google

C. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

In eene kegelsnede zijn koorden getrokken, die in een bepaald punt een' rechten hoek onderspannen. Te bewijzen, dat zij allen eene kegelsnede aanraken, waarvan dat punt een brandpunt is.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

De koorden zijn de poollijnen van de doorsnijdingspunten van raaklijnen aan de weêrkeerige kegelsnede met opzicht tot het vaste punt, die elkander loodrecht snijden, zoodat de meetkundige plaats dier doorsnijdingspunten, in de onderstelling dat het vaste punt niet aan den omtrek der gegeven kegelsnede ligt en dus de weêrkeerige geen parabel is, een cirkel is. Men verkrijgt derhalve voor de enveloppe der koorden eene kegelsnede met het bewuste punt tot brandpunt.

CI. Voorstel.

Door wijlen H. van Blanken.

Een klein lichaam ligt op eene lijn AB *in een horizontaal vlak. Het vlak begint met eene gelijkmatige, doch in grootte niet bekende, snelheid om de lijn* AB *als as te draaien, ten gevolge waarvan het lichaam zonder wrijving naar beneden glijdt en eindelijk het vlak verlaat. Vrage naar den stand van het vlak, wanneer het door het lichaam verlaten wordt.*

Opgelost *door* H. van Blanken, G. Schouten *en* L. van Zanten Jzn.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Laat het lichaam, langs het vlak glijdende, na den tijd t in het punt P zijn gekomen, en uit P de lijn PO loodrecht op AB getrokken worden. Het is klaar, dat het lichaam voortdurend zal bewegen in het vertikale vlak, dat door de lijn PO gaat. Men neme daarom, ter bepaling van het punt P, het punt O tot oorsprong van rechthoekige coördinaten, de x-as in de richting der zwaarte en de y-as horizontaal.

In het punt P werken op het bewegende lichaam twee krachten: de zwaartekracht en de reactie R der normale drukking op het vlak. Stelt men de hoeksnelheid van het vlak om de lijn AB $= \omega$, dan is hoek YOP $= \omega t$; bijgevolg zijn

Digitized by Google

de versnellingen in de richtingen der assen $\frac{d^2x}{dt^2} = g - R\,Cos\,\omega t$, $\frac{d^2y}{dt^2} = R\,Sin\,\omega t$. Wanneer men de eerste dezer vergelijkingen met $Sin\,\omega t$ en de tweede met $Cos\,\omega t$ vermenigvuldigt, verkrijgt men na optelling:

$$\frac{d^2x}{dt^2}.Sin\,\omega t + \frac{d^2y}{dt^2}.Cos\,\omega t = g\,Sin\,\omega t.$$

Stelt men $OP = r$, dan heeft men $x = r\,Sin\,\omega t$, $y = r\,Cos\,\omega t$. Hieruit volgt verder

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}.Sin\,\omega t + 2\omega\frac{dr}{dt}.Cos\,\omega t - \omega^2 r\,Sin\,\omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}.Cos\,\omega t - 2\omega\frac{dr}{dt}.Sin\,\omega t - \omega^2 r\,Cos\,\omega t.$$

Brengt men deze waarden in bovenstaande vergelijking, dan verkrijgt men $\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = g\,Sin\,\omega t$.

Deze differentiaal-vergelijking komt voor in *Wisk. Opgaven* van 1866—1870, Voorstel 163, en aldaar is verkregen:

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega^2}Sin\,\omega t.$$

Daar aanvankelijk $r = 0$ en $\frac{dr}{dt} = 0$ is, heeft men ter bepaling van de constanten $A + B = 0$, $A - B = \frac{g}{2\omega^2}$; derhalve $A = \frac{g}{4\omega^2}$ en $B = -\frac{g}{4\omega^2}$; bijgevolg

$$r = \frac{g}{4\omega^2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t} - 2\,Sin\,\omega t).$$

Het lichaam zal blijkbaar het vlak verlaten zoodra de drukking nul wordt.

Men heeft in het algemeen

$$R\,Sin\,\omega t = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}.Cos\,\omega t - 2\omega\frac{dr}{dt}.Sin\,\omega t - \omega^2 r\,Cos\,\omega t.$$

Hieruit volgt, als men voor r, $\frac{dr}{dt}$ en $\frac{d^2r}{dt^2}$ hare waarden stelt,

$$R = -\frac{g}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) + 2g\,Cos\,\omega t.$$

Digitized by Google

De drukking wordt dus nul zoodra men heeft

$e^{\omega t} + e^{-\omega t} = 4\ Cos\ \omega t$, of zoo men hoek YOP $= \varphi$ stelt,

$$e^{\varphi} + e^{-\varphi} = 4\ Cos\ \varphi.$$

Daar de waarde van ϕ in deelen van den straal kleiner dan 1 is kan men bij de benadering aanvankelijk de vierde en hoogere machten verwaarloozen. Men vindt dan spoedig dat $\alpha = 0{,}8203$ (in boog $= 47°$) reeds vrij nabij aan de vergelijking voldoet. Stelt men nu $\phi = \alpha + s$, dan moet men hebben

$$e^{\alpha}.e^{s} + e^{-\alpha}.e^{-s} = 4\ Cos\ \alpha\ Cos\ s - 4\ Sin\ \alpha\ Sin\ s,$$

of, zoo men de tweede en hoogere machten van s verwaarloost,

$$e^{\alpha}(1 + s) + e^{-\alpha}(1 - s) = 4\ Cos\ \alpha - 4\ s\ Sin\ \alpha$$

$$s = \frac{4\ Cos\ \alpha - e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{4\ Sin\ \alpha + e^{\alpha} - e^{-\alpha}} = \frac{0{,}01668}{4{,}756} = 0{,}0035.$$

Men heeft dus nagenoeg

$$\phi = \alpha + s = 0{,}8238, \text{ of in boog} = 47°12'.$$

CII. VOORSTEL.

Door wijlen H. VAN BLANKEN.

Twee lichamen bewegen met eenparige snelheden p en q langs twee rechte lijnen, welke niet in hetzelfde vlak zijn gelegen en bevinden zich aanvankelijk in gegeven punten A *en* B. *Vrage, wanneer zullen deze lichamen het meest tot elkander genaderd zijn en hoever zijn zij dan van elkander verwijderd?*

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN, G. SCHOUTEN, L. VAN ZANTEN JZN., A. EEGEN *en* H. JAPIKSE.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Laat MN (Fig. 33) de gemeenschappelijke loodlijn der gegeven rechte lijnen zijn. Stel AM $= m$, BN $= n$ en MN $= k$. Men trekke door N de lijn NO evenwijdig aan AM en stelle hoek ONB $= \alpha$.

Wanneer na den tijd t de lichamen, in de richtingen AM en BN bewegende, in de punten A′ en B′ zijn gekomen, dan is A′M $= m - pt$ en B′N $= n - qt$.

Trekt men de lijnen A′P en B′Q loodrecht op NO, dan staat de eerste lijn loodrecht op het vlak BNO en bijgevolg ook loodrecht op de lijn B′P. Stelt men dus den afstand A′B′ $= x$, dan heeft men

$$x^2 = A'P^2 + B'P^2 = A'P^2 + B'Q^2 + PQ^2$$

$$= k^2 + (n - qt)^2\ Sin^2\alpha + (m - pt - (n - qt)\ Cos\ \alpha)^2,$$

Digitized by Google

of, zoo men ontwikkelt en in aanmerking neemt, dat $Sin^2 \alpha + Cos^2 \alpha = 1$ is,

$$s^2 = k^2 + m^2 + n^2 - 2mn Cos\alpha - 2(mp + nq - np Cos\alpha - mq Cos\alpha)t$$
$$+ (p^2 + q^2 - 2pq\ Cos\ \alpha)\, t^2.$$

Op het oogenblik als de lichamen het meest tot elkander zijn genaderd, heeft men $\frac{d(x^2)}{dt} = 0$.

Noemt men dus den gevraagden tijd t', dan heeft men

$$t' = \frac{(m - n\ Cos\ \alpha)p + (n - m\ Cos\ \alpha)q}{p^2 + q^2 - 2pq\ Cos\ \alpha}.$$

Voorts vindt men als s' de overeenkomstige waarde van s voorstelt: $s'^2 = k^2 + \frac{(mq - np)^2\ Sin^2\ \alpha}{p^2 + q^2 - 2pq\ Cos\ \alpha}$.

Om de gevonden waarden van t' en s' in andere, veeltijds meer bruikbare, gegevens uit te drukken, neme men NR $= q$ in de richting der beweging van het tweede lichaam, vervolgens RS $= p$ in eene richting tegenovergesteld aan die der beweging van het eerste lichaam, dan wordt de betrekkelijke snelheid voorgesteld door NS. Noemt men deze betrekkelijke snelheid r, dan is $r^2 = p^2 + q^2 - 2pq\ Cos\ \alpha$.

Stelt men den aanvankelijken afstand AB $= a$, dan is $a^2 = k^2 + m^2 + n^2 - 2mn\ Cos\ \alpha$.

Trekt men uit B de lijnen BC en BC′ loodrecht op MA en NO, dan is MC $=$ NC′ $= n\ Cos\ \alpha$ en de lijn AC is alsdan de projectie van AB op de lijn MA. Stelt men dus hoek MAB $=$ A, dan is AC $=$ AM $-$ MC $= m - n\ Cos\ \alpha = a\ Cos$ A.

Op gelijke wijze vindt men, als men hoek NBA $=$ B stelt, $n - m\ Cos\ \alpha = a\ Cos$ B.

Door substitutie van deze waarden verkrijgt men:

$$s^2 = a^2 - 2a(p\ Cos\ \mathrm{A} + q\ Cos\ \mathrm{B})\, t + r^2 t^2$$

$$s'^2 = a^2 - \frac{(ap\ Cos\ \mathrm{A} + aq\ Cos\ \mathrm{B})^2}{r^2}$$

$$t' = \frac{ap\ Cos\ \mathrm{A} + aq\ Cos\ \mathrm{B}}{r^2}.$$

In het bijzonder geval van $mq = np$ vindt men, zooals te voorzien was, $s' = k$ en $t' = \frac{m}{p} = \frac{n}{q}$.

Digitized by Google

CIII. Voorstel. (*)

Door J. Versluijs.

Bewijs de formule

$$\int_0^{\phi} \frac{Sin^2\phi}{\Delta^3}\,d\phi = \frac{1}{1-k^2}\left(\frac{E-(1-k^2)F}{k^2} - \frac{Sin\,\phi\,Cos\,\phi}{\Delta}\right)$$

waarin Δ, E, F *de waarden hebben in* N°. 69 *aangegeven.*

Opgelost *door* J. Versluijs, A. Rutgers, L. van Zanten Jzn., A. Eecen *en* H. Japiese.

Oplossing *van* J. Versluijs.

Merken wij vooreerst op, dat men heeft:

$$\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\Delta} = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\Delta^3} - k^2 \int_0^{\phi} \frac{Sin^2\phi\,d\phi}{\Delta^3}.$$ Hieruit volgt:

$$\int_0^{\phi} \frac{Sin^2\phi\,d\phi}{\Delta^3} = \frac{1}{k^2}\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\Delta^3} - \frac{1}{k^2}F.$$

Stellen wij in deze vergelijking voor $\int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\Delta^3}$ haar vroeger gevonden waarde, dan vindt men:

$$\int_0^{\phi} \frac{Sin^2\phi\,d\phi}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2}\left(\frac{E}{k^2} - \frac{Sin\,\phi\,Cos\,\phi}{\Delta}\right) - \frac{1}{k^2}F, \text{ of}$$

$$\int_0^{\phi} \frac{Sin^2\phi\,d\phi}{\Delta^3} = \frac{1}{1-k^2}\left(\frac{E-(1-k^2)F}{k^2} - \frac{Sin\,\phi\,Cos\,\phi}{\Delta}\right).$$

Aanmerking *van* A. Rutgers.

Het verdient opmerking dat de formulen van N°. 71 en N°. 69 voldoende zijn om alle integralen begrepen in de vormen

$$\int_0^{\phi} \frac{Sin^{2k}\phi}{\Delta^3}\,d\phi,\ \int_0^{\phi} \frac{Cos^{2k}\phi}{\Delta^3}\,d\phi \text{ en } \int_0^{\phi} \frac{Sin^{2k}\phi\,Cos^{2k}\phi}{\Delta^3}\,d\phi$$

in functiën van de onvolkomen elliptische integralen van de eerste en van de tweede soort, d. i. in functiën van E en F uit te drukken.

CIV. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Wordt gevraagd de differentiaal-vergelijking

(*) Ontleend aan het werk vermeld bij N°. 69.

Digitized by Google

$$(1-x^2)\frac{dz}{dx} - xz = az^3x$$

te integreren.

OPGELOST *door* A. RUTGERS, J. J. TEDING VAN BERKHOUT, J. M. HEIJBROCK, L. VAN ZANTEN JZN., A. EECEN *en* H. JAPIKSE.

OPLOSSING *van* A. RUTGERS.

EERSTE WIJZE.

Schrijft men de differentiaal-vergelijking aldus:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{x}{1-x^2}z - \frac{ax}{1-x^2}z^3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dan komt zij in vorm overeen met de bekende differentiaal-vergelijking van BERNOUILLI.

Deelt men beide leden van (1) door z^3 en bedenkt men, dat $z^{-3}dz = -d(z^{-1})$ is, zoo kan men (1) schrijven in dezen vorm:

$$\frac{d(z^{-1})}{dx} + \frac{x}{1-x^2}(z^{-1}) + \frac{ax}{1-x^2} = 0,$$

welke blijkbaar eene lineaire differentiaal-vergelijking van de eerste orde is, met betrekking tot z^{-1} en $\frac{d(z^{-1})}{dx}$.

Door toepassing der bekende formule voor de integraal der lineaire differentiaal-vergelijking van de eerste orde heeft men nu: $z^{-1} = \frac{1}{z} = e^{\int\frac{-x}{1-x^2}dx}\left\{C - \int\frac{ax}{1-x^2}e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}dx\right\}$.

Omdat $\int\frac{-x}{1-x^2}dx = l.\sqrt{(1-x^2)}$, dus

$$e^{\int\frac{-x}{1-x^2}dx} = \sqrt{1-x^2}, \quad e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ is,}$$

zoo wordt $\frac{1}{z} = \sqrt{1-x^2}\left\{C - a\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}^3}\right\}$,

of, daar $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ is,

$$\frac{1}{z} = -a + C\sqrt{1-x^2}.$$

TWEEDE WIJZE.

Deelt men beide leden der differentiaal-vergelijking door z^3 en brengt men den term, in het tweede lid voorkomende, naar het eerste over, dan verkrijgt men:

Digitized by Google

$$\frac{1-x^2}{z^2}\,\frac{dz}{dx}-\frac{z}{z}-ax=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(1)$$

Nu is:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{z^2}\right)=-\frac{2x}{z^2},$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{z}{z}-ax\right)=\frac{x}{z^2},$$

dus $\frac{d}{dx}\left(-\frac{z}{z}-ax\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{z^2}\right)=\frac{x}{z^2}+\frac{2x}{z^2}=\frac{3x}{z^2},$

en $$\frac{\frac{d}{dx}\left(-\frac{z}{z}-ax\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{z^2}\right)}{\frac{1-x^2}{z^2}}=\frac{3x}{1-x^2};$$

waaruit blijkt, dat de vergelijking een integrerenden factor heeft, die onafhankelijk van z is. Noemen we dien factor R,

dan is: $$\frac{dR}{R}=\frac{3x}{1-x^2}dx,$$

waaruit door integratie: $lR=l(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

en $$R=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2)$$

Vermenigvuldigt men nu het eerste lid van (1) met het tweede lid van (2), dan komt er:

$$\frac{1}{z^2\sqrt{1-x^2}}\,\frac{dz}{dx}-\frac{x}{z\sqrt{1-x^2}^3}-\frac{ax}{\sqrt{1-x^2}^3}=0,\,.\,(3)$$

of $$\frac{dz}{z^2\sqrt{1-x^2}}-\frac{xdx}{z\sqrt{1-x^2}^3}-\frac{axdx}{\sqrt{1-x^2}^3}=0,\,.\,(4)$$

waarvoor men kan schrijven:

$$-d\left(\frac{1}{z\sqrt{1-x^2}}\right)-d\left(\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0.\,.\,.\,.\,(5)$$

Integreert men deze vergelijking, zoo is:

$$-\frac{1}{z\sqrt{1-x^2}}-\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}=-C$$

of $$\frac{1}{z}=-a+C\sqrt{1-x^2}.$$

Derde Wijze.

Na deeling van beide leden der differentiaal-vergelijking door z^2, verkrijgt men:

Digitized by Google

$$\frac{1-x^2}{z^2}\,\frac{dz}{dx}-\frac{z}{z}=ax. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Past men op (1) de methode van de variatie der constanten toe, dan is de gereduceerde vergelijking:

$$\frac{1-x^2}{z^2}\,\frac{dz}{dx}-\frac{z}{z}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

of, na scheiding der veranderlijken:

$$\frac{dz}{z}=\frac{z}{1-x^2}\,dx,$$

waaruit door integratie:

$$lz=l\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Zij nu de algemeene integraal van (1) $z=uz_1$, waarin z_1 de bijzondere integraal (3) van (2) en u eene nog onbekende functie van x, dan is:

$$\frac{dz}{dx}=u\frac{dz_1}{dx}+z_1\frac{du}{dx},$$

en door substitutie dezer waarden van z en $\frac{dz}{dx}$ in (1), komt er:

$$\frac{1-x^2}{uz_1^2}\left(u\frac{dz_1}{dx}+z_1\frac{du}{dx}\right)-\frac{z}{uz_1}=ax,$$

of

$$\frac{1}{u}\left(\frac{1-x^2}{z_1^2}\,\frac{dz_1}{dx}-\frac{z}{z_1}\right)+\frac{1-x^2}{u^2z_1}\,\frac{du}{dx}=ax. \quad . \quad . \quad (4)$$

Volgens (2) is de vorm tusschen de haken $=0$, derhalve:

$$\frac{1-x^2}{u^2z_1}\,\frac{du}{dx}=ax,$$

of na substitutie der waarde van z_1 uit (3) en na scheiding der veranderlijken: $-\frac{du}{u^2}=-\frac{ax}{\sqrt{(1-x^2)}^3}\,dx$,

waaruit door integratie:

$$\frac{1}{u}=-\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

en dus: $\frac{1}{z}=\frac{1}{uz_1}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{u}=-a+C\sqrt{1-x^2}.$

CV. VOORSTEL.

Door A. BENTHEM GZ.

Iemand koopt waren voor N gulden à contant en verkoopt ze terstond voor A gulden, te betalen in n termijnen en wel

Digitized by Google

respectievelijk over $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ *maanden* $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ *gulden. Wanneer hij nu* p *gulden per gulden in de maand wint, vraagt men eene betrekking aan te geven tusschen de gegeven getal-waarden.*

Opgelost *door* A. Benthem Gz.

Oplossing *van* A. Benthem Gz.

De inkoop bedraagt N gulden. Men kan dit aanzien als een kapitaal, dat gedurende a_1 maand is uitgezet en dus gelijk staat met $a_1 N$ gulden gedurende 1 maand. Na verloop dier a_1 maand wordt er A_1 gulden op betaald, de overige $N - A_1$ gulden staat $a_2 - a_1$ maand uit en geeft dus dezelfde winst als $(N - A_1)(a_2 - a_1)$ gulden in 1 maand. Hierna, dus a_2 maand na den verkoop, wordt er A_2 gulden op betaald, terwijl de resteerende $N - A_1 - A_2$ gulden $a_3 - a_2$ maand uitstaat en dus gelijk staat met $(N - A_1 - A_2)(a_3 - a_2)$ gulden in 1 maand.

Aldus voortredeneerende, vindt men dat het achtereenvolgens nog te betalen geld evenveel winst moet opleveren als:

$$Na_1, \quad (N - A_1)(a_2 - a_1), \quad (N - A_1 - A_2)(a_3 - a_2),$$
$$(N - A_1 - A_2 - A_3)(a_4 - a_3), \ldots (N - A_1 - \ldots - A_k)$$
$$(a_{k+1} - a_k) \ldots \text{ tot } (N - A_1 - A_2 - \ldots - A_{n-1})(a_n - a_{n-1})$$

gulden in 1 maand. De geheele winst kan dus gesteld worden de opbrengst te zijn van

$$Na_1 + (N - A_1)(a_2 - a_1) + (N - A_1 - A_2)(a_3 - a_2)$$
$$+ \ldots + (N - A_1 - A_2 - \ldots - A_{n-1})(a_n - a_{n-1})$$

gulden over 1 maand, of wat hetzelfde is, van

$$Na_n - [A_1(a_n - a_1) + A_2(a_n - a_2) + \ldots + A_k(a_n - a_k)$$
$$+ \ldots + A_{n-1}(a_n - a_{n-1})]$$ gulden over 1 maand.

Wij hebben dus de betrekking

$$Na_n - \sum_1^{n-1} A_k(a_n - a_k) : 1 = A - N : p$$

of
$$A - N = pNa_n - p\sum_1^{n-1} A_k(a_n - a_k) \quad \ldots \quad (1)$$

Voor deze betrekking kan men klaarblijkelijk schrijven:

$$-N(1 + pa_n) + (A + pa_n \sum_1^{n-1} A_k) = p\sum_1^{n-1} A_k a_k$$

of daar $\sum_1^{n-1} A_k = A - A_n$ is:

Digitized by Google

$$-N(1+pa_n)+A(1+pa_n)-pa_nA_n=p\sum_1^{n-1}A_ka_k,$$

bijgevolg ook: $(A-N)(1+pa_n)=p\sum_1^{n}A_ka_k,$ . . . . (2)

zijnde eene zeer eenvoudige betrekking.

2e Oplossing.

Onderstelt men dat de koopman de gedeeltelijke aflossingssommen A_1, A_2, A_3 ... A_n onmiddellijk na de ontvangst kan uitzetten tegen denzelfden interest, dat is tegen p gulden per gulden 's maands, dan zullen deze na verloop der a_n maand, dus bij de laatste aflossing, respectievelijk evenveel winst opgeleverd hebben als

$A_1(a_n-a_1), A_2(a_n-a_2)$. ... $A_k(a_n-a_k)$... $A_{n-1}(a_n-a_{n-1})$

gulden in 1 maand, dus gezamenlijk evenveel als $\sum_1^{n-1}A_k(a_n-a_k)$

gulden in 1 maand, bijgevolg $p\sum_1^{n-1}A_k(a_n-a_k)$ gulden.

De N gulden van den inkoop gedurende die a_n maand tegen dien interest uitgezet zou evenveel winst gegeven hebben als Na_np gulden in 1 maand en zou dus $N+Na_np$ geworden zijn. Klaarblijkelijk heeft men dus

$$A+p\sum_1^{n-1}A_k(a_n-a_k)=N+Na_np,$$

welke betrekking volkomen met (1) in de eerste oplossing overeenstemt. Door dezelfde herleiding zullen we dus ook hier tot de betrekking (2) geraken.

Aanm. In de *eerste* oplossing is de redenering van onze eerste practici gevolgd, de *tweede* is oorspronkelijk.

CVI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Men vraagt te bewijzen, dat:

$$a\,Sin\phi+\frac{a^2}{2}Sin2\phi+\frac{a^3}{2.3}Sin3\phi+\frac{a^4}{2.3.4}Sin4\phi\,enz.=e^{aCos\phi}Sin(a\,Sin\phi).$$

Opgelost *door* A. Rutgers, G. Schouten, W. van Haarst, L. van Zanten Jzn. *en* H. Japikse.

Oplossing *van* A. Rutgers.

Stel: $e^{i\varphi}=Cos\,\phi+i\,Sin\,\phi=x,\ i=\sqrt{-1}$,

dan is: $e^{-i\varphi}=Cos\,\phi-i\,Sin\,\phi=\frac{1}{x}$,

en door toepassing van het theorema van de Moivre:

Digitized by Google

$$e^{in\varphi} = Cos\, n\phi + i\, Sin\, n\phi = z^n,$$
$$e^{-in\varphi} = Cos\, n\phi - i\, Sin\, n\phi = \frac{1}{z^n}.$$

Stelt men hierin achtereenvolgens $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ enz., dan vindt men door aftrekking

$$Sin\, \phi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),\ Sin\, 2\phi = \frac{1}{2i}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right),$$

en in het algemeen

$$Sin\, n\phi = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right).$$

Hiermede wordt het eerste lid der te bewijzen formule:

$$\frac{1}{2i}\left\{a\left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{a^2}{2}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right) + \frac{a^3}{2.3}\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) + \frac{a^4}{2.3.4}\left(z^4 - \frac{1}{z^4}\right) + \text{enz.}\right\}$$
$$= \frac{1}{2i}\left\{\left(az + \frac{a^2z^2}{2} + \frac{a^3z^3}{2.3} + \frac{a^4z^4}{2.3.4} + \ldots\right) - \left(\frac{a}{z} + \frac{1a^2}{2z^2} + \frac{1\,a^3}{2.3z^3} + \frac{1}{2.3.4}\frac{a^4}{z^4}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2i}\left\{(e^{az} - 1) - \left(e^{\frac{a}{z}} - 1\right)\right\} = \frac{1}{2i}\left(e^{az} - e^{\frac{a}{z}}\right).$$

Vervangt men nu z en $\frac{1}{z}$ door bovenstaande waarden, dan verkrijgt men:

$$a\, Sin\, \phi + \frac{a^2}{2}\, Sin\, 2\phi + \frac{a^3}{2.3}\, Sin\, 3\phi + \frac{a^4}{2.3.4}\, Sin\, 4\phi + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(e^{a(Cos\varphi + iSin\varphi)} - e^{a(Cos\varphi - iSin\varphi)}\right) = \frac{1}{2i}\left\{e^{aCos\varphi}\left(e^{aiSin\varphi} - e^{-aiSin\varphi}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2i}\, e^{a\,Cos\,\varphi}\, 2i\, Sin\,(a\, Sin\, \phi) = e^{a\,Cos\,\varphi}\, Sin\,(a\, Sin\, \phi).$$

Aanm. Men kan bijna op dezelfde manier bewijzen dat:

$$1 + aCos\phi + \frac{a^2}{2}Cos2\phi + \frac{a^3}{2.3}Cos3\phi + \ldots = e^{aCos\varphi}Cos(aSin\,\phi).$$

Door optelling der waarden van z^n en $\frac{1}{z^n}$ verkrijgt men in het algemeen:

$$Cos\, n\phi = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Substitueert men hierin achtereenvolgens $n = 1$, $n = 2$, enz., dan verkrijgt men voor het eerste lid van de bovenstaande formule:

Digitized by Google

$$1+\frac{1}{2}\left\{a\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{a^2}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{a^3}{2.3}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\frac{a^4}{2.3.4}\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\ldots\right\}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left\{\left(ax+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{2.3}+\frac{a^4x^4}{2.3.4}+\ldots\right)+\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{1}{2.3}\frac{a^3}{x^3}+\frac{1}{2.3.4}\frac{a^4}{x^4}\right)\right\}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left\{\left(e^{ax}-1\right)+\left(e^{\frac{a}{x}}-1\right)\right\}=1+\frac{1}{2}\left(e^{ax}+e^{\frac{a}{x}}-2\right)=\frac{1}{2}\left(e^{ax}+e^{\frac{a}{x}}\right).$$

Schrijft men nu weder voor x en $\frac{1}{x}$ de waarden, dan komt er:

$$1+a\,Cos\,\phi+\frac{a^2}{2}Cos\,2\phi+\frac{a^3}{2.3}\,Cos\,3\phi+\frac{a^4}{2.3.4}\,Cos\,4\phi+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{a(Cos\,\phi+i\,Sin\,\phi)}+e^{a(Cos\,\phi-i\,Sin\,\phi)}\right)$$

$$=e^{a\,Cos\,\phi}\left(\frac{e^{ai\,Sin\,\phi}+e^{-ai\,Sin\,\phi}}{2}\right)=e^{a\,Cos\,\phi}\,Cos\,(a\,Sin\,\phi).$$

CVII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

De afstanden van de middelpunten der aangeschreven cirkels eens driehoeks tot het middelpunt van den cirkel, den driehoek omschreven, in de stralen dier aangeschreven cirkels uit te drukken.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST *en* A. RUTGERS.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Stellen wij de zijden des driehoeks door a, b en c voor, den inhoud door I, den straal des omschreven cirkels door R, den straal des aan a aangeschreven cirkels door r_1, aan b door r_2 en aan c door r_3, terwijl $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ is, dan kunnen wij als bekend aannemen

$$r_1=\frac{I}{s-a},\quad r_2=\frac{I}{s-b},\quad r_3=\frac{I}{s-c}\ \text{en}\ R=\frac{abc}{4I}.$$

Uit de drie eerste vergelijkingen volgt

$$s-a=\frac{I}{r_1},\ s-b=\frac{I}{r_2}\ \text{en}\ s-c=\frac{I}{r_3}.$$

Door het product van de overeenkomstige leden te nemen, vindt men: $(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{I^3}{r_1r_2r_3}$,

waaruit volgt: $r_1r_2r_3=\frac{I^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}=sI$

en door de som te nemen, verkrijgt men:

Digitized by Google

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)=s=\frac{I}{r_1}+\frac{I}{r_2}+\frac{I}{r_3},$$

dat is: $s=\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3}{r_1r_2r_3}\times I$ of $I=\frac{r_1r_2r_3\times s}{r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3}$.

Hieruit volgt dan in verband met de vorige vergelijking:

$$r_1r_2r_3=sI,\quad s^2=r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3$$

of $$s=\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}\ldots\ldots\ldots\ (a)$$

en dus: $$I=\frac{r_1r_2r_3}{\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}}.$$

Nu hebben wij:

$$s-a=\frac{I}{r_1}=\frac{r_2r_3}{\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}},$$

$$s-b=\frac{I}{r_2}=\frac{r_1r_3}{\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}}$$

en $$s-c=\frac{I}{r_3}=\frac{r_1r_2}{\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}}.$$

Trekken wij deze waarden nu beurtelings van de vergel. (a) af, dan komt er voor de zijden des driehoeks:

$$a=\frac{r_1(r_2+r_3)}{\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}},\quad b=\frac{r_2(r_1+r_3)}{\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}}$$

en $$c=\frac{r_3(r_1+r_2)}{\sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}}$$

en derhalve $R=\frac{abc}{4I}=\frac{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_1+r_3)}{4(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}$.

Drukken wij nu de bedoelde afstanden uit door d_1, d_2 en d_3, dan is, zooals bekend is:

$d_1=\sqrt{R(R+2r_1)}$, $d_2=\sqrt{R(R+2r_2)}$ en $d_3=\sqrt{R(R+2r_3)}$

en hierin de waarde van R schrijvende, bekomt men:

$$d_1=\frac{\sqrt{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_1+r_3)}\{9r_1^2(r_2+r_3)+r_2^2(r_1+r_3)+r_3^2(r_1+r_2)+10r_1r_2r_3\}}{4(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)},$$

$$d_2=\frac{\sqrt{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_1+r_3)}\{r_1^2(r_2+r_3)+9r_2^2(r_1+r_3)+r_3^2(r_1+r_2)+10r_1r_2r_3\}}{4(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}$$

en $$d_3=\frac{\sqrt{(r_1+r_2)(r_2+r_3)(r_1+r_3)}\{r_1^2(r_2+r_3)+r_2^2(r_1+r_3)+9r_3^2(r_1+r_2)+10r_1r_2r_3\}}{4(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)}.$$

CVIII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Men verlangt de zijden van een bolvormigen driehoek in de

Digitized by Google

spherische excessen der supplements-driehoeken uit te drukken.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST, A. RUTGERS *en* A. EECEN.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Noemen wij de zijden des bolvormigen driehoeks a, b en c en de tegenoverstaande hoeken A, B en C, dan zijn de hoeken van den supplements-driehoek op a, A, 180° — B en 180° — C, die van dien op b, 180° — A, B en 180° — C; en die van dien op c, 180° — A, 180° — B en C. Als dan de spherische excessen gegeven zijn $2d_3$, $2d_2$, $2d_1$, in dezelfde orde, als de supplements-driehoeken boven genomen zijn, dan hebben wij:

$$2d_1 = -A - B + C + 180^\circ,\ 2d_2 = -A + B - C + 180^\circ$$

en

$$2d_3 = A - B - C + 180^\circ.$$

Uit de halve som der beide eerste vergelijkingen volgt dan $A = 180^\circ - d_1 - d_2$, uit die van de eerste en de laatste $B = 180^\circ - d_1 - d_3$ en uit die van de beide laatste $C = 180^\circ - d_2 - d_3$, waardoor alzoo de drie hoeken des driehoeks bekend zijn. Om nu de zijden te vinden, hebben wij, de halve som van de waarden van A, B en C, S noemende,

$$S = \tfrac{1}{2}(A + B + C) = 270^\circ - (d_1 + d_2 + d_3)$$

en derhalve

$$S - A = 90^\circ - d_3,\ S - B = 90^\circ - d_2 \text{ en } S - C = 90^\circ - d_1.$$

Daaruit volgt:

$$Sin A = Sin(d_1 + d_2),\ Sin B = Sin(d_1 + d_3),\ Sin C = Sin(d_2 + d_3).$$

$$Cos(S - A) = Sin\, d_3,\ Cos(S - B) = Sin\, d_2 \text{ en } Cos(S - C) = Sin\, d_1,$$

En wij behoeven slechts deze waarden te schrijven in de bekende formule:

$$Cos\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{Cos\,(S - B)\, Cos\,(S - C)}{Sin\, B\, Sin\, C}},$$

om te verkrijgen: $$Cos\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{Sin\, d_1\, Sin\, d_2}{Sin\,(d_1 + d_3)\, Sin\,(d_2 + d_3)}}$$

en evenzoo $$Cos\, \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{Sin\, d_1\, Sin\, d_3}{Sin\,(d_1 + d_2)\, Sin\,(d_2 + d_3)}}$$

en $$Cos\, \tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{Sin\, d_2\, Sin\, d_3}{Sin\,(d_1 + d_2)\, Sin\,(d_1 + d_3)}}.$$

CIX. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Men begeert hetzelfde te doen als in Voorstel N°. 108,

Digitized by Google

wanneer nog daarbij het spherisch exces van den driehoek zelven bekend is.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST, A. RUTGERS *en* A. EECEN.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Stellen wij, dat de zijden des bolvormigen driehoeks a, b en c zijn, dan worden die van den supplements-driehoek op c uitgedrukt door $180° - a$, $180° - b$ en c; die van dien op b door $180° - a$, b en $180° - c$; en die van dien op a door a, $180° - b$ en $180° - c$. Laten voorts de spherische excessen dier driehoeken, in dezelfde orde als boven genomen, gegeven zijn $2d$, $2d_1$, $2d_2$ en $2d_3$, dan is (zie LOBATTO *Spher. Trig.*, pag. 130) $Sin\, d = \frac{P}{4\, Cos\, \frac{1}{2}a\, Cos\, \frac{1}{2}b\, Cos\, \frac{1}{2}c}$,

waarin $P = 2\sqrt{Sin\, s\,.\, Sin\,(s-a)\,.\, Sin\,(s-b)\,.\, Sin\,(s-c)}$ verondersteld wordt. Nu is het gemakkelijk in te zien, dat voor de supplements-driehoeken, de waarde van P niet verandert en dat wij alzoo hebben:

$$Sin\, d_1 = \frac{P}{4\, Sin\, \frac{1}{2}a\, Sin\, \frac{1}{2}b\, Cos\, \frac{1}{2}c},$$

$$Sin\, d_2 = \frac{P}{4\, Sin\, \frac{1}{2}a\, Cos\, \frac{1}{2}b\, Sin\, \frac{1}{2}c}$$

$$\text{en } Sin\, d_3 = \frac{P}{4\, Cos\, \frac{1}{2}a\, Sin\, \frac{1}{2}b\, Sin\, \frac{1}{2}c}.$$

Uit de beide eerste der vier vergelijkingen volgt dan: $\frac{Sin\, d}{Sin\, d_1} = tg\, \frac{1}{2}a\, tg\, \frac{1}{2}b$, en uit de beide laatste $\frac{Sin\, d_2}{Sin\, d_3} = Cot\, \frac{1}{2}a\, tg\, \frac{1}{2}b$.

De wortel uit het product dezer vergelijkingen is dan:

$$tg\, \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{Sin\, d\, Sin\, d_2}{Sin\, d_1\, Sin\, d_3}}$$

en de wortel uit haar quotient:

$$tg\, \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{Sin\, d\, Sin\, d_3}{Sin\, d_1\, Sin\, d_2}}.$$

Op gelijke wijze vindt men uit de eerste en de derde der bedoelde vier vergelijkingen:

$$\frac{Sin\, d}{Sin\, d_2} = tg\, \tfrac{1}{2}a\, tg\, \tfrac{1}{2}c$$

en uit de tweede en de vierde:

$$\frac{Sin\, d_3}{Sin\, d_1} = tg\, \tfrac{1}{2}a\, Cot\, \tfrac{1}{2}c,$$

Digitized by Google

en de wortel uit het quotient wordt:

$$tg\,\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{Sin\,d\;Sin\,d_1}{Sin\,d_2\;Sin\,d_3}}.$$

CX. VOORSTEL. (*)

Door J. J. TEDING VAN BERKHOUT.

Zij de grondlijn BC *van een driehoek in twee gelijke deelen gedeeld in* D, *en door den top* A *eene lijn getrokken evenwijdig aan* BC *en op* BC *in* D *eene loodlijn opgericht, welke de lijn, evenwijdig aan* BC, *snijde in* E *en door* D *eene lijn getrokken, welke* AB *en* AC *snijde in* F *en* G: *vereenigt men nu de punten* F *en* G *met* E, *dan heeft men* EF : EG = FD : DG. *Vrage het bewijs.*

OPGELOST *door* J. J. TEDING VAN BERKHOUT, A. RUTGERS, L. VAN ZANTEN JZN., A. EECEN *en* H. JAPIKSE.

OPLOSSING *van* J. J. TEDING VAN BERKHOUT.

Men verlenge de lijn welke door F, D, G getrokken wordt totdat zij de lijn AE, verlengd zijnde, snijde in H, dan is $\triangle$ BDF $\backsim$ $\triangle$ AHF, waaruit volgt:

$$DF : HF = BD : AH = CD : AH.$$

Uit $\triangle$ AHG $\backsim$ $\triangle$ CGD volgt:

$$AH : HG = CD : DG$$

of

$$CD : AH = DG : HG,$$

derhalve

$$DF : HF = DG : HG,$$

$$DF : DG = HF : HG,$$

en de lijn FG is in de punten D en H harmonisch gedeeld. Van de harmonische stralen FE, DE, GE en HE zijn nu twee, DE en HE, loodrecht op elkander staande, derhalve is $\angle$ FED = $\angle$ GED. De lijn DE deelt dus den hoek FEG in twee gelijke hoeken en men heeft volgens eene bekende eigenschap der driehoeken:

$$EF : FG = FD : DG.$$

OPLOSSING *van* H. JAPIKSE.

Het punt D ligt op het midden van de lijn BC, het daarmede harmonisch verwante punt ligt dus op de lijn BC op oneindig grooten afstand. Hieruit volgt, dat de lijnen AF, AD, AC en AE zullen vormen een harmonischen straalbundel,

(*) Dit en het volgend Voorstel zonder bewijs opgegeven in het werkje vermeld bij Voorstel N°. 92.

Digitized by Google

derhalve zijn de punten F, D, G en H harmonische punten, dus de lijnen FE, ED, EG en EH vormen ook een harmonischen straalbundel. Van deze vier harmonische stralen nu staan de twee verwante ED en EH loodrecht op elkander, dus maken zij, volgens eene bekende stelling, met de beide andere verwante stralen gelijke hoeken, derhalve $\angle FED = \angle DEG$. De lijn DE deelt dus in den driehoek FEG den tophoek midden door, waaruit volgt: $EF : EG = FD : DG$.

CXI. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij de lijn AB *harmonisch gedeeld in* A′ *en* B′; *wanneer nu op* AB *in de punten* A *en* B *loodlijnen worden opgericht, door het punt* A′ *eene lijn getrokken wordt, welke die loodlijnen snijdt in de punten* C *en* D *respectivelijk, eindelijk het punt* B′ *vereenigd wordt met* C *en* D, *dan is* $B'C : B'D = A'C : A'D$. *Vrage het bewijs.*

Opgelost *door* J. J. Teding van Berkhout, A. Rutgers, L. van Zanten Jzn., A. Eecen *en* H. Japikse.

Oplossing *van* J. J. Teding van Berkhout.

(Zie fig. 34.) Noemen wij het punt, waar de lijn CB′ de loodlijn op AB in B opgericht snijdt, E, en vereenigt men de punten A′ en E, dan heeft men vooreerst:

$$AA' : A'B = AB' : BB'.$$

Maar nu wegens $\triangle ACB' \backsim \triangle BEB'$ en $\triangle AA'C \backsim \triangle A'BD$ heeft men:

$$AC : BE = AB' : BB' = AA' : A'B = AC : BD,$$

derhalve: $$BE = BD$$

en DE, in twee gelijke deelen gedeeld in B, is de gemeenschappelijke grondlijn van de twee driehoeken A′ED en B′ED, welke derhalve beide gelijkbeenig zijn, zoodat

$$A'E = A'D \text{ en } B'E = B'D.$$

Uit $\triangle AA'C \backsim \triangle A'BD$ volgt nog:

$$A'A : A'B = A'C : A'D$$

en uit $\triangle ACB' \backsim \triangle BEB'$ volgt:

$$AB' : BB' = B'C : B'E,$$

derhalve: $$A'C : A'D = B'C : B'E = B'C : B'D.$$

dat te bewijzen was.

Aanmerking. $\angle CB'D$ is in twee gelijke deelen gedeeld door AB′, en wanneer men dus EA′ en B′D verlengt tot zij

Digitized by Google

elkander snijden, dan zullen zij zich snijden op het verlengde van CA in een punt F, dat van A denzelfden afstand heeft als A van C. Die lijn, aldus in twee gelijke deelen gedeeld in A, is de derde diagonaal van den volkomen vierhoek, die geconstrueerd voor ligt. Zoekt men nu voor de lijn CD het met A′ verwante harmonische deelpunt, zoo wordt het punt G bepaald en vereenigt men B′ en G, dan heeft men:

$$CA' : A'D = CG : GD,$$

maar: $CA' : A'D = B'C : B'E,$

derhalve: $B'C : B'E = CG : GD$ en $B'G \parallel DE$

en men heeft een trapezium CAGB′, wiens diagonalen zijn AB′ en CG.

Oplossing *van* H. Japikse.

Richt men in de punten A′ en B′ ook loodlijnen op, op de lijn AB, dan zullen deze vier loodlijnen, daar de punten A, A′, B en B′ harmonisch zijn gelegen, een harmonischen straalbundel vormen, getrokken uit een punt dat ligt op oneindig grooten afstand. Hieruit volgt dat de punten C, A′, D en G ook harmonisch zullen zijn en dus de lijnen CB′, B′A′, B′D en B′G geven een harmonischen straalbundel. Van deze vier harmonische stralen staan de lijnen A′B′ en B′G loodrecht op elkander, ze maken dus met de beide andere verwante stralen gelijke hoeken, derhalve:

$$\angle CB'A' = \angle DB'A' \text{ en dus } CB' : DB' = CA' : DA'.$$

CXII. Voorstel.

Door D. B. Wisselink.

Twee regelrechte oppervlakken, die eene beschrijvende lijn gemeen hebben, zullen in 't algemeen in twee punten dezer beschrijvende lijn dezelfde raakvlakken hebben en vallen hunne raakvlakken voor drie punten der gemeenschappelijke beschrijvende lijn samen, dan zullen zij samenvallen voor alle punten dezer lijn. Men vraagt het bewijs.

Opgelost *door* G. Schouten *en* D. B. Wisselink.

Oplossing *van* G. Schouten.

Zij de vergelijking van de beschrijvende lijn van het eene oppervlak:

$$x = z\,\phi(\alpha) + \psi(\alpha),$$
$$y = z\,f(\alpha) + F(\alpha),$$

en van die van het tweede oppervlak:

Digitized by Google

$$x_1 = z_1 \phi_1(\beta) + \psi_1(\beta),$$
$$y_1 = z_1 f_1(\beta) + F_1(\beta);$$

opdat deze beschrijvende lijnen voor de waarden α en β der parameters samenvallen, moet:

$$\left.\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \phi_1(\beta), \\ \psi(\alpha) &= \psi_1(\beta), \\ f(\alpha) &= f_1(\beta), \\ F(\alpha) &= F_1(\beta). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Het raakvlak aan het eerste oppervlak in het punt $(x, y, z,)$, heeft tot vergelijking:

$$v - z = \frac{dz}{dx}(t - x) + \frac{dz}{dy}(u - y),$$

waarin t, u, v de loopende coördinaten voorstellen.

Dat aan het tweede oppervlak in het punt $(x_1, y_1, z_1,)$ door:

$$v - z_1 = \frac{dz_1}{dx_1}(t - x_1) + \frac{dz_1}{dy_1}(u - y_1).$$

Zijn de coördinaten $(x, y, z,)$ gelijk aan de coördinaten $(x_1, y_1, z_1,)$, m. a. w.: beschouwt men een punt van de gemeenschappelijke beschrijvende lijn, dan kunnen de raakvlakken niet samenvallen, tenzij:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz_1}{dx_1}, \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{dz_1}{dy_1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Nu wordt $\frac{dz}{dx}$ gevonden, door de vergelijking der beschrijvende lijn ten opzichte van x te differentieëren, waarbij y constant blijft; dit geeft:

$$1 = \frac{dz}{dx}\phi(\alpha) + z\phi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dx} + \psi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dx},$$
$$0 = \frac{dz}{dx}f(\alpha) + z f'(\alpha)\frac{d\alpha}{dx} + F'(\alpha)\frac{d\alpha}{dx},$$

hieruit $\frac{d\alpha}{dx}$ geëlimineerd, geeft:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\phi(\alpha) + \frac{z\phi'(\alpha) + \psi'(\alpha)}{z f'(\alpha) + F'(\alpha)} f(\alpha)}.$$

Door x in y, ϕ in f en ψ in F te veranderen, vindt men:

Digitized by Google

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{f(\alpha) + \frac{z f'(\alpha) + F'(\alpha)}{z \Phi'(\alpha) + \psi'(\alpha)} \Phi(\alpha)}.$$

Voor het tweede oppervlak vinden we nu:

$$\frac{dz_1}{dx_1} = \frac{1}{\Phi_1(\beta) + \frac{z \Phi'_1(\beta) + \psi'_1(\beta)}{z f'_1(\beta) + F'_1(\beta)} f_1(\beta)},$$

$$\frac{dz_1}{dy_1} = \frac{1}{f_1(\beta) + \frac{z f'_1(\beta) + F'_1(\beta)}{z \Phi'_1(\beta) + \psi'_1(\beta)} \Phi_1(\beta)}.$$

De voorwaarden (2) worden dus, met het oog op (1):

$$\frac{z \Phi'(\alpha) + \psi'(\alpha)}{z f'(\alpha) + F'(\alpha)} = \frac{z \Phi'_1(\beta) + \psi'_1(\beta)}{z f'_1(\beta) + F'_1(\beta)}, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

welke vergelijking ten opzichte van z van den tweeden graad is. In 't algemeen zullen dus de oppervlakken in twee verschillende punten van de gemeenschappelijke beschrijvende lijn samenvallende raakvlakken hebben.

Is $\frac{\Phi'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\psi'(\alpha)}{F'(\alpha)}$, m. a. w.: is het eerste regelvlak ontwikkelbaar, dan wordt (3):

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{z \Phi'_1(\beta) + \psi'_1(\beta)}{z f'_1(\beta) + F'_1(\beta)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

alzoo van den eersten graad, zoodat er dan slechts één gemeenschappelijk raakvlak kan wezen.

Zijn eindelijk beide regelvlakken ontwikkelbaar, dan wordt (4):

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\Phi'_1(\beta)}{f'_1(\beta)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

onafhankelijk van z.

Heeft dus de betrekking (5) plaats, dan vallen de raakvlakken voor alle punten der gemeenschappelijke beschrijvende lijn samen; heeft ze niet plaats, dan hebben de regelvlakken ook geen gemeenschappelijk raakvlak.

Deze laatste uitkomst was gemakkelijk te voorzien, aangezien elk raakvlak aan een ontwikkelbaar oppervlak dit raakt volgens een beschrijvende lijn.

Vallen dus de raakvlakken voor eenig punt der gemeenschappelijke beschrijvende lijn samen, dan moet dit samen-

Digitized by Google

vallen ook plaats grijpen voor alle punten dier lijn; maken de raakvlakken voor eenig punt een hoek met elkaâr, dan moeten ze voor ieder ander punt van de gemeenschappelijke beschrijvende lijn denzelfden hoek met elkaâr vormen.

Twee regelvlakken dus, die een gemeenschappelijke beschrijvende lijn hebben, kunnen een raakvlak gemeen hebben:
1e. slechts in twee punten, als ze beide onontwikkelbaar zijn;
2e. slechts in één punt, als een hunner ontwikkelbaar is;
3e. òf in geen punt, òf in alle punten der beschrijvende lijn, als ze beide ontwikkelbaar zijn.

CXIII. Voorstel.

Door D. B. Wisseling.

Twee regelrechte oppervlakken, die een zelfde richtvlak en eene beschrijvende lijn gemeen hebben, zullen voor één punt dier lijn een zelfde raakvlak hebben, en vallen hunne raakvlakken samen voor twee punten dier beschrijvende lijn, dan vallen zij samen voor alle punten dier lijn. Vraje het bewijs.

Opgelost *door* G. Schouten *en* D. B. Wisseling.

Oplossing *van* G. Schouten.

Nemen wij het xy-vlak tot richtvlak, en zij het eene oppervlak:

$$y = x\Phi(z) + \psi(z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en het andere:

$$y_1 = x_1\Phi_1(z_1) + \psi_1(z_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Opdat de beschrijvende lijnen voor $z = \gamma$ samenvallen, moet

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(\gamma) = \Phi_1(\gamma) \\ \text{en} \quad \psi(\gamma) = \psi_1(\gamma) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

zijn.

Het raakvlak in het punt (x, y, z) van (1) wordt voorgesteld door:

$$v - z = \frac{dz}{dx}(t - x) + \frac{dz}{dy}(u - y),$$

dat in het punt (x_1, y_1, z_1) van (2) door:

$$v - z_1 = \frac{dz_1}{dx_1}(t - x_1) + \frac{dz_1}{dy_1}(u - y_1).$$

Laat men de punten samenvallen, beschouwt men dus een punt van de gemeenschappelijke beschrijvende lijn, dan wordt er vereischt tot het samenvallen van de raakvlakken in dat punt:

$$\left.\frac{dz}{dx} = \frac{dz_1}{dx_1} \quad \text{en} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz_1}{dy_1}.\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Digitized by Google

Door (1) ten opzichte van x en y te differentieren, daarbij resp. y en x als constant beschouwende, vindt men:

$$0 = x\phi'(z)\frac{dz}{dx} + \phi(z) + \psi'(z)\frac{dz}{dx}$$

$$1 = x\phi'(z)\frac{dz}{dy} + \psi'(z)\frac{dz}{dy},$$

waaruit volgt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\phi(z)}{x\phi'(z) + \psi'(z)}$$

$$\frac{dz}{dy} = +\frac{1}{x\phi'(z) + \psi'(z)}.$$

Evenzoo volgt uit (2) op dezelfde wijze

$$\frac{dz_1}{dx_1} = -\frac{\phi_1(z)}{x\phi'_1(z) + \psi'_1(z)}$$

$$\frac{dz_1}{dy_1} = +\frac{1}{x\phi'_1(z) + \psi'_1(z)}.$$

De voorwaarde (4) voor het samenvallen der raakvlakken wordt dus met het oog op (3):

$$x\phi'_1(\gamma) + \psi'_1(\gamma) = x\phi'(\gamma) + \psi'(\gamma), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waaruit volgt:

$$x = -\frac{\psi'(\gamma) - \psi'_1(\gamma)}{\phi'(\gamma) - \phi'_1(\gamma)}.$$

Voor slechts *één* punt dus zullen de raakvlakken samenvallen.

Bestaat er een tweede punt, waarin de raakvlakken samenvallen, dan volgt uit (5) dat noodzakelijk

$$\phi'_1(\gamma) = \phi'(\gamma) \quad \text{en} \quad \psi'_1(\gamma) = \psi'(\gamma)$$

moet zijn, zoodat alsdan de vergelijking (5) identiek is, en er derhalve voor alle x, bijgevolg voor alle punten der gemeenschappelijk beschrijvende lijn, een gemeenschappelijk raakvlak bestaat.

CXIV. Voorstel.

Door D. B. Wisselink.

Bij een ontwikkelbaar oppervlak is het rakend vlak in eenig punt eener beschrijvende lijn rakend voor alle punten dierzelfde beschrijvende lijn. Vrage het bewijs.

Opgelost *door* G. Schouten *en* D. B. Wisselink.

Oplossing *van* G. Schouten.

Definieert men de ontwikkelbare oppervlakken als de omhullende oppervlakken van een plat vlak, waarvan de wet van

Digitized by Google

beweging slechts van één parameter afhangt, dan volgt de stelling onmiddelijk uit die definitie.

Immers het omhullend vlak de meetkundige plaats zijnde van de opvolgende doorsneden bij elken stand van het bewegende vlak met den oneindig dichtbij gelegenen, zoo bestaat een ontwikkelbaar oppervlak uit een reeks rechte lijnen, die ieder voor zich de punten voorstellen, waarin het raakvlak het oppervlak raakt.

Definieert men echter de ontwikkelbare oppervlakken als de meetkundige plaats van de raaklijnen aan een kromme, dan kan men op de volgende wijze aantoonen, dat een raakvlak het oppervlak volgens een dezer raaklijnen moet raken.

Stellen we de kromme voor door:

$$z = \phi(\alpha),$$
$$y = \psi(\alpha),$$

waarin α een willekeurige parameter is.

Dan is de raaklijn aan het punt $\alpha, \psi(\alpha)$ en $\phi(\alpha)$

$$\left.\begin{aligned} z - \phi(\alpha) &= \phi'(\alpha)(z - \alpha) \\ y - \psi(\alpha) &= \psi'(\alpha)(z - \alpha) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Door α en de functies ϕ en ψ te elimineeren, zoude de vergelijking van het oppervlak ontstaan.

De vergelijking van het raakvlak in het punt x, y, z van dit oppervlak is:

$$v - z = \frac{dz}{dz}(t - x) + \frac{dz}{dy}(u - y); \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

berekenen we $\frac{dz}{dz}$ en $\frac{dz}{dy}$, door (1) ten opzichte van z te differentieren. Men vindt, de eerste van (1) nemende:

$$\frac{dz}{dz} - \phi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dz} = \phi'(\alpha)\left(1 - \frac{d\alpha}{dz}\right) + \phi''(\alpha)(z - \alpha)\frac{d\alpha}{dz}$$

$$-\psi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dz} = \psi'(\alpha)\left(1 - \frac{d\alpha}{dz}\right) + \psi''(\alpha)(z - \alpha)\frac{d\alpha}{dz}$$

en door $\frac{d\alpha}{dx}$ te elimineeren:

$$\frac{dz}{dx} = \phi'(\alpha) - \frac{\phi''(\alpha)}{\psi''(\alpha)}\psi'(\alpha).$$

Evenzoo geeft de tweede van (1):

$$\frac{dy}{dz} = \psi'(\alpha) - \frac{\psi''(\alpha)}{\phi''(\alpha)}\phi'(\alpha).$$

Digitized by Google

We zien dus, dat de coëfficienten $\frac{dz}{dy}$ en $\frac{dy}{dz}$ van het raakvlak (2) slechts afhangen van a, alzoo voor alle punten der raaklijn in een bijzondere stand dezelfde zijn, waaruit onmiddelijk volgt, dat ook het raakvlak voor die punten hetzelfde is, wat te bewijzen was.

CXV. Voorstel.

Door J. M. Heybrock.

Men vraagt het zwaartepunt te bepalen van het gesloten gedeelte der strophoïde. (*De* strophoïde *is afgebeeld in fig.* 11 *op de tweede plaat van dit deel.*)

Opgelost *door* J. M. Heijbrock, L. van Zanten Jzn.; A. Eecen *en* H. Japikse.

Oplossing *van* J. M. Heybrock.

Wij hebben in de oplossing van voorstel XXIV van dit deel de vergelijking der *strophoïde*, wanneer de oorsprong der coördinaten in N zij gesteld (zie fig. 11), bevonden te zijn:

$$z^2 = \frac{y^2(r-y)}{r+y}.$$

De as der coördinaten is een as van symmetrie en het zwaartepunt moet op dien as liggen. Noemen wij dat punt Z, dan is:

$$NZ = \frac{\int xydy}{\int xdy},$$

beide integralen genomen tusschen de grenzen $y = r$ en $y = 0$. Nu heeft men:

$$\int xydy = \int y^2 \sqrt{\left(\frac{r-y}{r+y}\right)} dy, \text{ of stellende } \frac{r-y}{r+y} = z^2$$

$$= -4r^3 \int \frac{z^2(1-z^2)^2}{(1+z^2)^4} dz = -4r^3 \left\{ \int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^4} - 2\int \frac{z^4dz}{(1+z^2)^4} + \int \frac{z^6dz}{(1+z^2)^4} \right\}$$

en $$\int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^4} = -\frac{1}{5}\frac{z}{(1+z^2)^3} + \frac{1}{5}\int \frac{dz}{(1+z^2)^4},$$

$$\int \frac{z^4dz}{(1+z^2)^4} = -\frac{\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{3}z}{(1+z^2)^3} + \frac{1}{5}\int \frac{dz}{(1+z^2)^4},$$

$$\int \frac{z^6dz}{(1+z^2)^4} = -\frac{z^5 + \frac{5}{3}z^3 + z}{(1+z^2)^3} + \int \frac{dz}{(1+z^2)^4},$$

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^4} = \frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^3} + \frac{1.5z}{4.6(1+z^2)^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z}{(1+z^2)} + \frac{1.3.5}{2.4.6}B(tang = z);$$

Digitized by Google

Deze waarden substituerende, vindt men:

$$\int xydy = 4r^2\left[\frac{\frac{2}{3}z+z^3+z^5}{(1+z^2)^3}-\frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^2}-\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)}-\frac{1}{4}B(tang=z)\right]$$

en integrerende tusschen de grenzen r en 0 voor y, waarmede overeenkomen de grenzen voor z, $z=0$ en $z=1$, verkrijgt men: $\int_0^r xydy = 4r^2\left\{\frac{1}{16}\pi-\frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{12}r^3\{3\pi-8\}$.

Wijders is $\int xdy = \int y\sqrt{\left(\frac{r-y}{r+y}\right)}dy$

of wederom stellende

$$\frac{r-y}{r+y}=z^2, \int xdy = -4r^2\int\frac{z^2(1-z^2)}{(1+z^2)^3}dz$$

$$= -4r^2\left\{\int\frac{z^4dz}{(1+z^2)^3}-\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^3}\right\},$$

$$\int\frac{z^4dz}{(1+z^2)^3} = -\frac{z+z^3}{(1+z^2)^2}+\int\frac{dz}{(1+z^2)^3},$$

$$\int\frac{z^2dz}{(1+z^2)^3} = -\frac{\frac{1}{2}z}{(1+z^2)^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dz}{(1+z^2)^3},$$

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^3} = \frac{z}{4(1+z^2)^2}+\frac{3z}{8(1+z^2)}+\frac{3}{8}B.(tang=z).$$

Substituerende deze waarden, vinden wij:

$$\int xdy = 4r^2\left\{\frac{-z^3-\frac{3}{2}z}{(1+z^2)^2}+\frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{1}{4}\frac{z+z^3}{(1+z^2)^2}+\frac{1}{4}B.(tang=z)\right\}$$

$$= 4r^2\left\{\frac{-\frac{3}{2}z^3-\frac{1}{4}z}{(1+z^2)^2}+\frac{1}{4}B(tang=z\right\},$$

en nemende deze integraal tusschen de grenzen 1 en 0, vindt men:

$$\int_0^r xdy = \frac{1}{4}r^2\{4-\pi\}$$

en derhalve:

$$NZ = \frac{\int_0^r xydy}{\int_0^r xdy} = \frac{\frac{1}{12}r^3\{3\pi-8\}}{\frac{1}{4}r^2\{4-\pi\}} = \frac{1}{3}r\left\{\frac{3\pi-8}{4-\pi}\right\}$$

CXVI. VOORSTEL.

Door J. M. HEYBROCK.

Men vraagt den inhoud te bepalen van het lichaam dat ont-

Digitized by Google

staat, wanneer men het gesloten gedeelte der strophoïde *om den oorsprong der hoeken laat omwentelen.*

OPGELOST *door* A. EECEN, J. M. HEIJBROCK, L. VAN ZANTEN JZN. *en* H. JAPIKSE.

OPLOSSING *van* A. EECEN.

Volgens den regel van GULDIN is de inhoud van het bedoelde lichaam gelijk aan het product van den inhoud der vlakke figuur, welke omwentelt en van den omtrek des cirkels door het zwaartepunt dezer figuur beschreven. Nu is de straal van dezen cirkel $= NZ$ en dus volgens het vorig voorstel

$$= \frac{1}{3} r \left\{ \frac{3\pi - 8}{4 - \pi} \right\}.$$

De inhoud dier vlakke figuur is

$$= 2 \int_0^r s dy = \frac{1}{2} r^2 (4 - \pi),$$

derhalve de inhoud van het bedoelde lichaam:

$$I = 2\pi NZ. \int_0^r s dy = \frac{1}{3} r^3 \pi (3\pi - 8) = \frac{1}{3} \times 1.4248 \times \pi r^3$$
$$= 0.4749 \times \pi r^3$$
$$= 1.4919 \times r^3.$$

CXVII. VOORSTEL.

Door D. B. WISSELINK.

In het vlak van den driehoek ABC *een punt* O *zoodanig te bepalen, dat* $\square$ AO + $\square$ BO + $\square$ CO *een minimum zij.*

OPGELOST *door* D. B. WISSELINK, A. RUTGERS, A. EECEN *en* H. JAPIKSE.

OPLOSSING *van* D. B. WISSELINK.

Noemen wij AO, x en $\angle$ BAO, ϕ, dan is $\angle$ CAO $= A - \phi$, $\square$ BO $= x^2 + c^2 - 2cx \, Cos \, \phi$, $\square$ CO $= x^2 + b^2 - 2bx \, Cos \, (A - \phi)$, derhalve moet $\square$ AO + $\square$ BO + $\square$ CO $= 3x^2 + b^2 + c^2 - 2bx \, Cos \, (A - \phi) - 2cx \, Cos \, \varphi$ een minimum gemaakt worden. De uitdrukking voor $\square$ AO + $\square$ BO + CO is eene functie van de onderling onafhankelijk veranderlijken x en ϕ, d. i. F (x, ϕ), dan hebben wij, differentierende deze functie ten opzichte van x en ten opzichte van ϕ:

$$\frac{dF}{dx} = 6x - 2b \, Cos \, (A - \phi) - 2c \, Cos \, \phi,$$

$$\frac{dF}{d\phi} = - 2bx \, Sin \, (A - \phi) + 2cx \, Sin \, \phi.$$

Digitized by Google

Stellende beide deze differentiaal-verhoudingen $= 0$, dan verkrijgen wij, daar van maximum geene sprake zijn kan, voor de voorwaarden van bestaan van een minimum:

$3x - b\,Cos(A - \phi) - c\,Cos\,\phi = 0$ en $c\,Sin\,\phi - b\,Sin(A - \phi) = 0$.

Verheffen wij beide deze vergelijkingen tot de tweede macht, dan verkrijgen wij optellende:

$$9x^2 = b^2 + c^2 + 2bc\,\{Cos\,\phi\,Cos(A - \phi) - Sin\,\phi\,Sin(A - \phi)\}$$
$$= b^2 + c^2 + 2bc\,Cos\,A,$$

waaruit volgt $x = AO = \frac{1}{3}\sqrt{(b^2 + c^2 + 2bc\,Cos\,A)}$ en evenzoo, wanneer men voor BO en $\angle$ ABO, y en ϕ', voor CO en $\angle$ ACO, z en ϕ'' stelt, deze als onafhankelijk veranderlijken aanmerkt, de differentiaal-verhoudingen

$$\frac{dF}{dy} \text{ en } \frac{dF}{d\phi'},\quad \frac{dF}{dz} \text{ en } \frac{dF}{d\phi''}$$

zoekt en op gelijke wijze als hierboven voortwerkt, vindt men: $BO = \frac{1}{3}\sqrt{(a^2 + c^2 + 2ac\,Cos\,B)}$ en $CO = \frac{1}{3}\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\,Cos\,C)}$.

Nu heeft men voor de voorwaarde van het bestaan van het minimum gevonden ten opzichte van AO en $\angle$ BAO:

$$c\,Sin\,\phi = b\,Sin(A - \phi).$$

Volgens de figuur heeft men:

$$AB : BD = Sin\,ADB : Sin\,BAO,$$
$$AC : CD = Sin\,ADC : Sin\,CAO,$$

d. i.

$$c : BD = Sin\,ADB : Sin\,\phi,$$
$$b : CD = Sin\,ADC : Sin(A - \phi),$$

Men heeft nu $c\,Sin\,\phi = b\,Sin(A - \phi)$ en $Sin\,ADB = Sin\,ADC$, derhalve: $BD = CD$.

Ten opzichte van BO en $\angle$ CBO, heeft men:

$$a\,Sin\,\phi' = c\,Sin(B - \phi').$$

Volgens de figuur:

$$BC : CE = Sin\,BEC : Sin\,EBC,$$
$$AB : AE = Sin\,AEB : Sin\,ABE,$$

d. i.

$$a : CE = Sin\,BEC : Sin\,\phi',$$
$$c : AE = Sin\,AEB : Sin(B - \phi'),$$

derhalve: $AE = CE \ldots.$

Het punt O is derhalve het onderling snijpunt der lijnen welke uit de hoekpunten tot de middelpunten der overstaande zijden van den driehoek getrokken worden, of het *zwaartepunt* van den driehoek.

Constructie door A. RUTGERS *aangegeven.* Men verlenge

Digitized by Google

de zijde AB tot in G, zoodat AG = AB, en trekke CG, dan is $\square CG = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$, trekke nu uit C tot het midden der overstaande zijde AB des driehoeks ABC eene lijn CF, en daarop door A eene lijn evenwijdig aan CG, dan zal deze de lijn CF in het punt O snijden. Dezelfde bewerking herhalende, wanneer men BC verlengt tot in H en AH trekt, daarna BE tot het midden van de zijde AC, dan zal deze de lijn CF in O snijden. Eindelijk voor de derde zijde herhalende, vindt men dat het punt O het onderling snijpunt is der lijnen AD, BE, CF. Het bewijs is gemakkelijk.

CXVIII. VOORSTEL. (*)

Door J. W. TESCH.

Neemt men in den driehoek ABC *op de zijden of hare verlengden* $AB_a = AB$, $AC_a = AC$, $BC_b = BC$, $BA_b = BA$, $CA_c = CA$, $CB_c = CB$, *construeert men vervolgens de parallelogrammen* $AB_aA'C_a$, $BC_bB'A_b$ *en* $CA_cC'B_c$, *dan snijden de diagonalen* AA', BB' *en* CC' *elkander in één punt* O.

OPGELOST *door* J. W. TESCH, H. JAPIKSE *en* A. EECEN.

OPLOSSING *van* J. W. TESCH.

(Zie fig. 35.) Daar $\triangle BC_aG \backsim \triangle BAC$, vinden wij:

$$BC_a : BA = BG : BC = C_aG : AC,$$

waaruit volgt: $BG = \frac{a(c-b)}{c}$ en $C_aG = \frac{b(c-b)}{c}$.

Hieruit weder: $CG = \frac{ab}{c}$ en $A'G = c - b + \frac{b^2}{c}$.

Maar $\triangle ADC \backsim \triangle A'DG$;

bijgevolg: $AC : A'G = CD : DG$,

of $AC + A'G : CG = AC : CD$,

$$\frac{b^2 + c^2}{c} : \frac{ab}{c} = b : CD,$$

$$CD = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}$$

en dus $BD = a - \frac{ab^2}{b^2 + c^2} = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}$.

Nu is ook $CE = \frac{ba^2}{a^2 + c^2}$, $AF = \frac{cb^2}{a^2 + b^2}$,

$AE = \frac{bc^2}{a^2 + c^2}$, $BF = \frac{ca^2}{a^2 + b^2}$.

(*) Zonder bewijs medegedeeld in SCHLÖMILCH's *Zeitschrift für Physik und Mathematik*, 16ter Jahrg.

Digitized by Google

Daar nu $BD \times CE \times AF = BF \times AE \times CD$ is, snijden de lijnen elkander in één punt.

Aanm. Indien men de loodlijnen uit O op de zijden BC, AC, AB nedergelaten x, y, z noemt, dan zal

$$x : y : z = a : b : c.$$

Immers de loodlijnen uit B', dus ook die uit O, op de zijden BC en AB nedergelaten, zijn omgekeerd evenredig met de zijden BA_1 en BC_1 of: $x : z = a : c$.

Evenzoo vindt men: $x : y = a : b$.

CXIX. Voorstel. (†)

Door C. J. Matthes.

Drie gegeven rechte lijnen BC, CA, AB *worden gesneden door twee andere rechte lijnen respectievelijk in de punten* A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. *Te bewijzen, dat men eene kegelsnede kan beschrijven, die de zes rechte lijnen* AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1 *en* CC_2 *aanraakt.*

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

(Zie fig. 36.) Als men het doorsnijdingspunt der *beide* rechte lijnen O tot weêrkeerigheids-middenpunt aanneemt, worden de polen dier lijnen punten op oneindige afstand. Zij nu A'B'C' de weêrkeerige driehoek van ABC; trek dan door A', B', C' twee stelsels van evenwijdige lijnen respectievelijk loodrecht ondersteld op de lijnen uit O, dan zijn van A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 de poollijnen:

$$A'A'_1,\ A'A'_2,\ B'B'_1,\ B'B'_2,\ C'C'_1,\ C'C'_2.$$

Bijgevolg zijn A'_1, A'_2; B'_1, B'_2; C'_1, C'_2 de polen van AA_1, AA_2; BB_1, BB_2; CC_1, CC_2. Voorts ziet men gemakkelijk in:

$$A'B' \times B'C' = B'C'_1 \times B'A'_1 = B'C'_2 \times B'A'_2,$$
$$B'C' \times C'A' = C'A'_1 \times C'B'_1 = C'A'_2 \times C'B'_2,$$
$$C'A' \times A'B' = A'B'_1 \times A'C'_1 = A'B'_2 \times A'C'_2,$$

waaruit volgt:

$$C'_1A'_2 \,//\, C'_2A'_1,\quad A'_1B'_2 \,//\, A'_2B'_1 \text{ en } B'_1C'_2 \,//\, B'_2C'_1.$$

Wijders heeft men, behalve $\angle P'_2 = \angle P'_1$ nog de vergelijkingen:

$$P'_1L \times P'_2B'_1 = P'_1C'_1 \times P'_2C'_1 = P'_2C'_2 \times P'_1C'_2 = P'_1M \times P'_2A'_2,$$

(†) Dit en het volgend Voorstel zijn ontleend aan Ferrers *Nieuwere Meetkunde*, Voorbeelden 42 en 43.

Digitized by Google

derhalve: $P'_1L : P'_1M = P'_2A'_2 : P'_2B'_1$,
dus ook: $LM // A'_2B'_1 // A'_1B'_2$,
zoodat $A'_2C'_2$ en $B'_2C'_1$, $C'_2A'_1$ en $C'_1B'_1$, $A'_1B'_2$ en $B'_1A'_2$ elkander ontmoeten in punten op één rechte lijn gelegen. Door die zes punten zal bijgevolg eene kegelsnede kunnen worden beschreven, waaruit wederom voortvloeit, dat binnen de zeszijde door de poollijnen gevormd, eene kegelsnede kan worden ingeschreven.

CXX. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

A, B, C, S *zijn vier vaste punten*, SD *is loodrecht op* SA *getrokken*, *snijdende* BC *in* D; SE *loodrecht op* SB, *snijdende* CA *in* E; SF *loodrecht op* SC, *snijdende* AB *in* F. *Bewijs*, *dat* D, E, F *op eene zelfde rechte lijn liggen.*

Bewijs verder, dat de vier kegelsneden, die S *tot brandpunt hebben en de drie zijden der onderscheiden driehoeken* ABC, AEF, BFD, CDE *aanraken*, *gelijke parameters hebben.*

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Als men zich den tot den driehoek ABC wederkeerigen A'B'C' ten opzichte van het punt S voorstelt, dan bevindt men dat de poollijnen der bedoelde ontmoetingspunten de hoogte-loodlijnen zijn van den wederkeerigen driehoek, die elkaâr in één punt O' ontmoeten, waardoor de opgave is opgelost wat het eerste gedeelte betreft. Wat het tweede aangaat merke men op, dat de om $\triangle A'B'C'$, $\triangle B'O'C'$, $\triangle C'O'A'$, $\triangle A'O'B'$ beschreven cirkels gelijken straal hebben, daar de hoeken B'O'C', C'O'A; A'O'B' achtervolgens de supplementen zijn van A', B', C', waaruit wederom volgt: dat de weêrkeerigen van die vier gelijke cirkels kegelsneden zijn met het gemeenschappelijk brandpunt S en parameters $2l = \frac{2k^2}{p}$, die dus gelijk zijn, terwijl zij zijn ingeschreven in de driehoeken ABC, AEF, BFD, CDE.

CXXI. Voorstel.

Door L. Janse Bz.

Men vraagt den driehoek te construeren, wanneer gegeven zijn de deellijnen; die de supplementen zijner hoeken midden-

Digitized by Google

doordeelen, en die onderling een nieuwen driehoek vormen.

Opgelost *door* L. Janse Bz., J. C. Eger, A. Eegen, C. Lely *en* J. Kiël.

Oplossing *van* L. Janse Bz.

Beschrijf met de gegevene deellijnen eenen driehoek $A_1B_1C_1$; trek uit zijne hoekpunten loodlijnen AA_1, BB_1 en CC_1 op de overstaande zijden, vereenig de voetpunten dier loodlijnen, dan zal de daardoor ontstane driehoek ABC de begeerde zijn, terwijl bovendien de loodlijnen de hoeken diens driehoeks middendoordeelen.

Bewijs.

(Zie fig. 37.) Dewijl de hoeken A en B, B en C en C en A, door de loodlijnen met de overstaande zijden gevormd, recht zijn, zoo liggen de punten A, O, B, C_1; B, O, C, A_1; alsmede de punten C, O, A, B_1, in drie cirkels, die elkander in het punt O, in het snijpunt der deellijnen of der loodlijnen, zullen snijden.

Stel $\angle OB_1A_1 = \alpha$, $\angle OC_1B_1 = \beta$, $\angle OA_1C_1 = \gamma$.

De hoeken aan den omtrek OB_1C en OAC staan op denzelfden boog OC, en daarom $\angle OAC = \alpha$ en om dezelfden reden $\angle OBA = \beta$ en $\angle OCB = \gamma$.

Verder zijn de driehoeken OB_1C en OBC_1; OA_1C en OAC_1, alsmede de driehoeken OBA_1 en OB_1A rechthoekig en gelijkhoekig; daarom uit het eerste paar $\angle BC_1O = \alpha$, uit het tweede $\angle OA_1C = \beta$ en uit het derde $\angle OB_1A = \gamma$.

Eindelijk staan de hoeken aan den omtrek OC_1B en OAB op denzelfden boog OB, en dus ook $\angle OAB = \alpha$; evenzoo de hoeken OA_1C en OBC op den boog OC, benevens de hoeken OB_1A en OCA op den boog OA, waaruit volgt $\angle OBC = \beta$ en $\angle OCA = \gamma$; de hoeken des driehoeks ABC worden dus blijkbaar door de loodlijnen middendoorgedeeld.

En daar de gegevene zijden des driehoeks $A_1B_1C_1$ loodrecht op de genoemde deellijnen staan, zoo deelen deze de *supplementshoeken* des driehoeks ABC middendoor.

Oplossing *van* J. C. Eger.

Onderstellen wij dat ABC de gevraagde en $A_1B_1C_1$ de gegeven driehoek is; duiden wij dan de halve supplementshoeken aan de punten A, B en C respectievelijk door α, β en γ aan, dan vinden wij de volgende betrekkingen. Vooreerst is

Digitized by Google

$$A + 2\alpha = 2R$$
$$B + 2\beta = 2R$$
$$C + 2\gamma = 2R$$

opt. $A + B + C + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 6R$

en daar $A + B + C = 2R$ is,

zoo is ook $\alpha + \beta + \gamma = 2R.$

Daaruit volgt $\angle C_1 = \gamma$, $\angle A_1 = \alpha$, $\angle B_1 = \beta$, en hierdoor wederom $\triangle ACB_1$, $\triangle A_1CB$ en $\triangle ABC_1$ alle gelijkvormig met $\triangle A_1B_1C_1$. Die gelijkvormigheid geeft de volgende verhoudingen:

$A_1C:BA_1 = C_1A_1:B_1A_1$, $BC_1:AC_1 = B_1C_1:A_1C_1$ en $AB_1:B_1C = A_1B_1:B_1C_1$, of $A_1C \times B_1A_1 = C_1A_1 \times BA_1$, $BC_1 \times A_1C_1 = AC_1 \times B_1C_1$ en $AB_1 \times B_1C_1 = B_1C \times A_1B_1$.

Bovendien is

$A_1C + B_1C = A_1B_1$, $A_1B + BC_1 = A_1C_1$ en $AB_1 + AC_1 = B_1C_1$; stellen wij de bekende lijnen $A_1B_1 = f$, $B_1C_1 = d$ en $A_1C_1 = e$, dan is $B_1C = f - A_1C$, $BC_1 = e - A_1B$ en $AB_1 = d - AC_1$; door substitutie dezer waarden in bovenstaande vergelijkingen, veranderen zij in:

$A_1C \times f = A_1B \times e$, $BC_1 \times e = AC_1 \times d$ en $(d - AC_1)d = (f - A_1C)f$, of $f.A_1C = e.A_1B$ (1), $e^2 - e.A_1B = d.AC_1$ (2) en $d^2 - d.AC_1 = f^2 - f.A_1C$, of door substitutie van A_1C en AC_1 uit de beide eerste vergelijkingen in de derde:

$$d^2 - e^2 + e.A_1B = f^2 - e.A_1B,$$

waaruit $$A_1B = \frac{e^2 + f^2 - d^2}{2e}.$$

Brengt men deze waarde van A_1B in (1) over, dan verkrijgt men:

$$A_1C = \frac{e^2 + f^2 - d^2}{2f},$$

en door overbrenging in (2): $AC_1 = \dfrac{d^2 + e^2 - f^2}{2d}$.

Uit deze formules is duidelijk dat de punten A, B en C de voetpunten der loodlijnen zijn, die in drieh. $A_1B_1C_1$ uit de overstaande hoekpunten op de zijden worden nedergelaten. Trekt men dus de loodlijnen uit A_1, B_1 en C_1 op de overstaande zijden en verbindt men de voetpunten dier loodlijnen tot een driehoek, dan ontstaat daardoor de gevraagde driehoek ABC.

Digitized by Google

Om de zijden van den drieh. ABC te berekenen, merke men op, dat door de gelijkvormige driehoeken A_1BC en $A_1B_1C_1$ de evenredigheid ontstaat $A_1C : CB = A_1C_1 : B_1C_1$,
en wegens drieh. $ACB_1 \backsim A_1B_1C_1$ $B_1C : AC = B_1C_1 : A_1C_1$,

waaruit $A_1C \times B_1C = BC \times AC$;
op dezelfde wijze vindt men ook $AB_1 \times AC_1 = AB \times AC$
en $BC_1 \times A_1B = AB \times BC$,
of door de boven gevonden waarden voor A_1C, B_1C, AB_1 enz.

$$\frac{e^2+f^2-d^2}{2f} \times \frac{d^2+f^2-e^2}{2f} = AC \times BC$$

$$\frac{d^2+e^2-f^2}{2d} \times \frac{d^2+f^2-e^2}{2d} = AB \times AC$$

$$\frac{d^2+e^2-f^2}{2e} \times \frac{e^2+f^2-d^2}{2e} = AB \times BC;$$

de wortel uit het gedurig product dezer drie vergelijkingen geeft:

$$AB \times BC \times AC = \frac{(d^2+e^2-f^2)(d^2+f^2-e^2)(e^2+f^2-d^2)}{8def}$$

en deze vergelijking, door ieder der drie laatste gedeeld, geeft:

$$AB = \frac{d^2+e^2-f^2}{2de} \times f, \quad AC = \frac{d^2+f^2-e^2}{2df} \times e,$$

$$BC = \frac{e^2+f^2-d^2}{2ef} \times d.$$

CXXII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Op eene van de zijden eens ongelijkzijdigen bolvormigen driehoeks is een gelijkbeenige bolvormige driehoek beschreven, die denzelfden inhoud heeft als de eerstgenoemde. Men vraagt de opstaande zijden des laatsten in de zijden des eersten uit te drukken.

Opgelost *door* J. C. Eger *en* C. J. Matthes.

Oplossing *van* J. C. Eger.

In de Stereometrie wordt de volgende stelling bewezen: *Bolvormige driehoeken, waarvan de sommen der hoeken gelijk zijn, hebben gelijke oppervlakten;* daar die stelling nergens eenige beperking heeft, is ook het omgekeerde waar, n.l.: Van driehoeken, wier inhouden gelijk zijn, zijn de sommen der hoeken gelijk; derhalve is ook het spherisch exces in

Digitized by Google

beide even groot. Stellen wij dat a, b en c de zijden van den gegeven driehoek zijn, van den gelijkbeenigen driehoek de basis $= c$ en de beenen $= x$, en duiden wij het spherisch exces door E aan, dan is volgens bekende formule

$$Cos\tfrac{1}{2}\,E = \frac{Cos^2\tfrac{1}{2}a + Cos^2\tfrac{1}{2}b + Cos^2\tfrac{1}{2}c - 1}{2\,Cos\tfrac{1}{2}a\,Cos\tfrac{1}{2}b\,Cos\tfrac{1}{2}c}.$$

Evenzoo is voor den gevraagden driehoek

$$Cos\tfrac{1}{2}\,E = \frac{Cos^2\tfrac{1}{2}c + 2\,Cos^2\tfrac{1}{2}x - 1}{2\,Cos\tfrac{1}{2}c\,Cos^2\tfrac{1}{2}x} = \frac{Cos^2\tfrac{1}{2}c + Cos\,x}{Cos\tfrac{1}{2}c\,(Cos\,x + 1)};$$

waaruit

$$\frac{Cos^2\tfrac{1}{2}a + Cos^2\tfrac{1}{2}b + Cos^2\tfrac{1}{2}c - 1}{2\,Cos\tfrac{1}{2}a\,Cos\tfrac{1}{2}b\,Cos\tfrac{1}{2}c} = \frac{Cos^2\tfrac{1}{2}c + Cos\,x}{Cos\tfrac{1}{2}c\,(Cos\,x + 1)}$$

of $\quad (Cos^2\tfrac{1}{2}a + Cos^2\tfrac{1}{2}b + Cos^2\tfrac{1}{2}c - 1)(Cos\,x + 1)$

$$= 2\,Cos\tfrac{1}{2}a\,Cos\tfrac{1}{2}b\,Cos^2\tfrac{1}{2}c + 2\,Cos\tfrac{1}{2}a\,Cos\tfrac{1}{2}b\,Cos\tfrac{1}{2}x;$$

hieruit $Cos\,x$ oplossende, vindt men:

$$Cos\,x = \frac{1 - (Cos^2\tfrac{1}{2}a + Cos^2\tfrac{1}{2}b + Cos^2\tfrac{1}{2}c) + 2\,Cos\tfrac{1}{2}a\,Cos\tfrac{1}{2}b\,Cos^2\tfrac{1}{2}c}{(Cos\tfrac{1}{2}a - Cos\tfrac{1}{2}b)^2 + Cos^2\tfrac{1}{2}c - 1}$$

$$= -1 + \frac{2\,Cos\tfrac{1}{2}a\,Cos\tfrac{1}{2}b\,Sin^2\tfrac{1}{2}c}{(Cos\tfrac{1}{2}a - Cos\tfrac{1}{2}b)^2 - Sin^2\tfrac{1}{2}c}.$$

CXXIII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Een bolvormige driehoek is gegeven: men verlangt op een gegeven boog een rechthoekigen bolvormigen driehoek te vinden van gelijken inhoud.

Opgelost *door* J. C. Eger *en* W. van Haarst.

Oplossing *van* J. C. Eger.

Laat de zijden van den gegeven driehoek aangeduid worden door a, b en c; de gegeven boog van den gevraagden driehoek door d (die wij onderstellen rechthoekszijde te zijn), de tweede rechthoekszijde daarvan door x en de schuine zijde door y, dan is, zie Voorstel CXXII:

1°. van den gegeven driehoek:

$$Cos\tfrac{1}{2}E = \frac{Cos^2\tfrac{1}{2}a + Cos^2\tfrac{1}{2}b + Cos^2\tfrac{1}{2}c - 1}{2\,Cos\tfrac{1}{2}a\,Cos\tfrac{1}{2}b\,Cos\tfrac{1}{2}c}$$

en 2°. van den gevraagden

$$Cos\tfrac{1}{2}E = \frac{Cos^2\tfrac{1}{2}d + Cos^2\tfrac{1}{2}x + Cos^2\tfrac{1}{2}y - 1}{2\,Cos\tfrac{1}{2}d\,Cos\tfrac{1}{2}x\,Cos\tfrac{1}{2}y} \quad . \; . \; (1)$$

Digitized by Google

Daar beide driehoeken gelijken inhoud hebben, is E in beide even groot, dus E eene bekende grootheid.

Verder is in den gevraagden driehoek

$$Cos\, y = Cos\, d\, Cos\, x \ldots\ldots\ldots (2)$$

en het is dus uit de vergelijkingen (1) en (2), dat de waarden voor x en y moeten opgespoord worden.

Daar $Cos\, x = 2Cos^2 \tfrac{1}{2}x - 1$ is, verandert (2) in

$$2\, Cos^2 \tfrac{1}{2}y - 1 = Cos\, d\,(2\, Cos^2 \tfrac{1}{2}x - 1)$$

of $$Cos^2 \tfrac{1}{2}y = Cos\, d\, Cos^2 \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\, Cos\, d + \tfrac{1}{2}, \ldots (3)$$

en deze vorm, in (1) overgebracht, geeft:

$$\frac{Cos^2 \tfrac{1}{2}d + Cos^2 \tfrac{1}{2}x + Cos\, d\, Cos^2 \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\, Cos\, d - \tfrac{1}{2}}{2\, Cos \tfrac{1}{2}d\, Cos \tfrac{1}{2}x \sqrt{(Cos\, d\, Cos^2 \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}Cos\, d + \tfrac{1}{2})}} = Cos \tfrac{1}{2}E,$$

of $$\frac{Cos^2 \tfrac{1}{2}x\,(1 + Cos d) + Cos^2 \tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}(Cos\, d + 1)}{2\, Cos \tfrac{1}{2}d\, Cos \tfrac{1}{2}x \sqrt{\left(\frac{Cos\, d\,(2\, Cos^2 \tfrac{1}{2}x - 1) + 1}{2}\right)}} = Cos \tfrac{1}{2}E,$$

of daar $$1 + Cos\, a = 2\, Cos^2 \tfrac{1}{2}a,$$

$$\frac{Cos^2 \tfrac{1}{2}x\, Cos^2 \tfrac{1}{2}d}{Cos \tfrac{1}{2}d\, Cos \tfrac{1}{2}x \sqrt{\left(\frac{Cos\, d\, Cos\, x + 1}{2}\right)}} = Cos \tfrac{1}{2}E,$$

of $$\frac{Cos \tfrac{1}{2}x\, Cos \tfrac{1}{2}d}{\sqrt{\left(\frac{Cos\, d\, Cos\, x + 1}{2}\right)}} = Cos \tfrac{1}{2}E,$$

en door kwadrateering

$$2\, Cos^2 \tfrac{1}{2}x\, Cos^2 \tfrac{1}{2}d = Cos^2 \tfrac{1}{2}E + Cos^2 \tfrac{1}{2}E\, Cos\, d(2\, Cos^2 \tfrac{1}{2}x - 1),$$

waaruit:

$$Cos^2 \tfrac{1}{2}x = \frac{Cos^2 \tfrac{1}{2}E\,(1 - Cos\, d)}{2(Cos^2 \tfrac{1}{2}d - Cos^2 \tfrac{1}{2}E\, Cos\, d)} = \frac{Cos^2 \tfrac{1}{2}E\, Sin^2 \tfrac{1}{2}d}{Cos^2 \tfrac{1}{2}d - Cos^2 \tfrac{1}{2}E\, Cos\, d}$$

of door $Cos\, d$ te veranderen in $2\, Cos^2 \tfrac{1}{2}d - 1$

$$Cos^2 \tfrac{1}{2}x = \frac{Sin^2 \tfrac{1}{2}d}{1 - \frac{Cos\, E\, Cos^2 \tfrac{1}{2}d}{Cos^2 \tfrac{1}{2}E}},$$

en stelt men hierin $\dfrac{Cos\, E\, Cos^2 \tfrac{1}{2}d}{Cos^2 \tfrac{1}{2}E} = Cos^2\phi$,

dan is $Cos^2 \tfrac{1}{2}x = \dfrac{Sin^2 \tfrac{1}{2}d}{Sin^2\phi}$ of $Cos \tfrac{1}{2}x = \dfrac{Sin \tfrac{1}{2}d}{Sin\, \phi}$.

Wanneer men dezen laatsten vorm in (3) substitueert, verkrijgt men: $Cos \tfrac{1}{2}y = Sin \tfrac{1}{2}d \sqrt{\left(1 + \dfrac{Cos\, d}{Sin^2\, \phi}\right)}$.

Digitized by Google

CXXIV. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Den inhoud te bepalen van een bolvormigen driehoek, wiens hoekpunten door hunne coördinaten gegeven zijn, en op een bol liggen, welks middelpunt als oorsprong is aangenomen.

Opgelost *door* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Daar de oorsprong O der coördinaten in het middelpunt van den bol ligt, kunnen wij voor de vergelijking des bols $x^2+y^2+z^2=r^2$ nemen en stellen wij dan dat aa_1a_2, bb_1b_2 en cc_1c_2 de coördinaten van de gegevene punten A, B en C zijn, dan moeten zij, om op het oppervlak van den bol te liggen, aan de drie vergelijkingen

$$a^2+a_1^2+a_2^2=b^2+b_1^2+b_2^2=c^2+c_1^2+c_2^2=r^2$$

voldoen. Laten wij nu door den oorsprong drie vlakken gaan, zoodat twee van de drie punten in elk vlak liggen, dan wordt de vergelijking van het vlak, waarin O, A en B liggen:

$$x(a_1b_2-a_2b_1)+y(a_2b-ab_2)+z(ab_1-a_1b)=0,$$

die van het vlak, waarin O, B en C gelegen zijn:

$$x(b_1c_2-b_2c_1)+y(b_2c-bc_2)+z(bc_1-b_1c)=0$$

en die van het vlak, dat door O, A en C gaat:

$$x(a_1c_2-a_2c_1)+y(a_2c-ac_2)+z(ac_1-a_1c)=0 \quad . \text{ (a)}$$

Nemen wij nu aan dat drie vlakken, wier vergelijkingen $mx+ny+pz=0$, $m_1x+n_1y+p_1z=0$ en $m_2x+n_2y+p_2z=0$ elkander snijden, dan zal men, zoo als bekend is, voor de hoeken, onder welke zij elkander twee aan twee snijden, hebben:

$$Cos\,\alpha=\pm\frac{mm_2+nn_2+pp_2}{\sqrt{(m^2+n^2+p^2)(m_2^2+n_2^2+p_2^2)}},$$

$$Cos\,\beta=\pm\frac{mm_1+nn_1+pp_1}{\sqrt{(m^2+n^2+p^2)(m_1^2+n_1^2+p_1^2)}}$$

en $$Cos\,\gamma=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{(m_1^2+n_1^2+p_1^2)(m_2^2+n_2^2+p_2^2)}}.$$

Stelt men nu, dat de drie laatste vergelijkingen identiek zijn met de vergelijkingen (a), dan zal men slechts de waarden van m, n, p, m_1, n_1, p_1 en m_2, n_2, p_2 behoeven te substitueren, om die van *Cos* A, *Cos* B en *Cos* C, dat is de hoeken van den bolvormigen driehoek, te vinden. Deze alzoo bekend zijnde, vindt men den inhoud door de formule:

Digitized by Google

$$I = \frac{A + B + C - 180^\circ}{180^\circ} \times r^2\pi.$$

Wij zouden hierin dan echter drie bogen moeten schrijven, waarom wij zullen trachten ze tot één boog te herleiden. Stellen wij daartoe

$$mm_2 + nn_2 + pp_2 = M_2, \quad m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = M_1, \quad mm_1 + nn_1 + pp_1 = M,$$
$$m^2 + n^2 + p^2 = Q, \quad m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = Q_1 \quad \text{en} \quad m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 = Q_2,$$

zoodat daardoor wordt $Cos\,A = \pm\frac{M_2}{\sqrt{QQ_2}}$, $Cos\,B = \pm\frac{M}{\sqrt{QQ_1}}$ en $Cos\,C = \pm\frac{M_1}{\sqrt{Q_1Q_2}}$.

Schrijven wij deze waarden in de bekende formule

$$Cos(A + B + C) = Cos\,A\,Cos\,B\,Cos\,C - (Cos\,A\,Sin\,B\,Sin\,C + Sin\,A\,Cos\,B\,Sin\,C + Sin\,A\,Sin\,B\,Cos\,C),$$

dan wordt zij

$$Cos(A+B+C) = \frac{MM_1M_2 - \{M\sqrt{(QQ_2 - M_2^2)(Q_1Q_2 - M_1^2)} + M_1\sqrt{(QQ_1 - M^2)(QQ_2 - M_2^2)} + M_2\sqrt{(QQ_1 - M^2)(Q_1Q_2 - M_1^2)}\}}{QQ_1Q_2}$$

Nu is
$$QQ_2 - M_2^2 = (mn_2 - m_2n)^2 + (mp_2 - m_2p)^2 + (np_2 - n_2p)^2,$$
$$Q_1Q_2 - M_1^2 = (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (m_1p_2 - m_2p_1)^2 + (n_1p_2 - n_2p_1)^2$$
en
$$QQ_1 - M^2 = (mn_1 - m_1n)^2 + (mp_1 - m_1p)^2 + (np_1 - n_1p)^2.$$

En wanneer men $c(a_1b_2 - a_2b_1) + c_1(a_2b - ab_2) + c_2(ab_1 - a_1b) = S$ stelt, kan men vinden

$$mn_2 - m_2n = +a_2S, \quad mp_2 - m_2p = -a_1S, \quad np_2 - n_2p = aS;$$
$$m_1n_2 - m_2n_1 = -c_2S, \quad m_1p_2 - m_2p_1 = c_1S, \quad n_1p_2 - n_2p_1 = -cS;$$
$$mn_1 - m_1n = b_2S, \quad mp_1 - m_1p = -b_1S \quad \text{en} \quad np_1 - n_1p = bS.$$

Daardoor wordt dan $QQ_2 - M_2^2 = (a^2 + a_1^2 + a_2^2)S^2 = r^2S^2$, $Q_1Q_2 - M_1^2 = (c^2 + c_1^2 + c_2^2)S^2 = r^2S^2$

Digitized by Google

en $\qquad QQ_1 - M^2 = (b^2 + b_1^2 + b_2^2)S^2 = r^2S^2$

en dan is $\quad Cos(A + B + C) = \dfrac{MM_1M_2 - r^2(M + M_1 + M_2)S^2}{QQ_1Q_2}$.

Voorts is dan

$$Cos(A+B+C-180^\circ) = -Cos(A+B+C) = \frac{r^2(M+M_1+M_2)S^2 - MM_1M_2}{QQ_1Q_2}$$

en derhalve $\quad I = \dfrac{r^2\pi}{180^\circ}B(Cos = \dfrac{r^2(M + M_1 + M_2)S^2 - MM_1M_2}{QQ_1Q_2}$

of wel den boog in deelen van den straal uitdrukkende

$$I = r^2.B(Cos = \frac{r^2(M + M_1 + M_2)S^2 - MM_1M_2}{QQ_1Q_2}.$$

Daarin is nu

$$S = c(a_1b_2 - a_2b_1) + c_1(a_2b - ab_2) + c_2(ab_1 - a_1b),$$
$$M = mm_1 + nn_1 + pp_1 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$+ (a_2b - ab_2)(b_2c - bc_2) + (ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c),$$
$$M_1 = m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = (b_1c_2 - b_2c_1)(a_1c_2 - a_2c_1)$$
$$+ (b_2c - bc_2)(a_2c - ac_2) + (bc_1 - b_1c)(ac_1 - a_1c),$$
$$M_2 = mm_2 + nn_2 + pp_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1c_2 - a_2c_1)$$
$$+ (a_2b - ab_2)(a_2c - ac_2) + (ab_1 - a_1b)(ac_1 - a_1c),$$
$$Q = m^2 + n^2 + p^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b - ab_2)^2 + (ab_1 - a_1b)^2,$$
$$Q_1 = m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (b_2c - bc_2)^2 + (bc_1 - b_1c)^2$$

en

$$Q_2 = m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 = (a_1c_2 - a_2c_1)^2 + (a_2c - ac_2)^2 + (ac_1 - a_1c)^2.$$

Aanmerkingen. In het bijzondere geval, dat $a = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c = 0$ en $b_2 = c_2$ is, waardoor $a_2 = r$ en $c_1 = b$ wordt, vinden wij:

$$S = bc_1r = b^2r, \quad M = b^2b_2r, \quad M_1 = b^2b_2r, \quad M_2 = 0,$$
$$Q = Q_2 = b^2r^2 \text{ en } Q_1 = b^2(2b_2^2 + b^2) = b^2(b_2^2 + r^2)$$

en daardoor wordt $\quad I = r^2B(Cos = \dfrac{2b_2r}{b_2^2 + r^2}$,

welke vergelijking voor $b_2 = 0$ naar behooren overgaat in $I = r^2B(Cos = 0) = \frac{1}{2}r^2\pi$, dat is een achtste deel van het oppervlak van den bol.

Stellen wij daarentegen

$$a = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_2 = 0 \text{ en } c_2 = 0,$$

waardoor $a_2 = r$ wordt, dan is

$$S = (bc_1 - b_1c)r, \quad M = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = (b_1c_1 + bc)r^2,$$
$$Q = (b^2 + b_1^2)r^2 = r^4, \quad Q_1 = (bc_1 - b_1c)^2$$
$$\text{en } Q_2 = (c^2 + c_1^2)r^2 = r^4,$$

Digitized by Google

zoodat wij in dit geval hebben $I = r^2 B(Cos = \frac{bc + b_1c_1}{r^2}$, waarin voor $b_1 = b = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ $I = r^2B\,(Cos = \frac{1}{2}\sqrt{2})$ $= \frac{1}{4}r^2\pi$ en voor $b_1 = 0$ wederom $I = r^2B\,(Cos = 0) = \frac{1}{2}r^2\pi$ wordt.

Voor het geval dat $a_2 = 0$, $b_1 = 0$ en $c = 0$ is, waardoor $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_2^2 = c_1^2 + c_2^2 = r^2$ wordt, vinden wij $S = -(ab_2c_1 + a_1bc_2)$, $M = a_1c_1r^2 - abb_2c_2$, $M_1 = abr^2 - a_1b_2c_1c_2$, $M_2 = b_2c_2r^2 - aa_1bc_1$, $Q = a^2b_2^2 + a_1^2r^2$, $Q_1 = b^2c_2^2 + c_1^2r^2$ en $Q_2 = a_1^2c_2^2 + a^2r^2$ en wij verkrijgen in dit geval:

$$I = r^2B\left(Cos = \frac{r_2(ab_2c_1 + a_1bc_2)^2\{r^2(ab + a_1c_1 + b_2c_2) - (aba_1c_1 + a_1c_1b_2c_2 + abb_2c_2)\} - (a_1c_1r^2 - abb_2c_2)\times(abr^2 - a_1c_1b_2c_2)(b_2c_2r^2 - aba_1c_1)}{(a^2r^2 + a_1^2c_2^2)(a_1^2r^2 + a^2b_2^2)(c_2^2r^2 + b^2c_2^2)}\right.$$

Stelt men hierin $a_1 = a$, $b_2 = b$, $c_2 = c$, zoodat $c_1 = b = a = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$ is, dan wordt $I = r^2B\,(Cos = \frac{23}{27}$, dat is ten naastenbij $\frac{1}{3}r^2\pi$.

N.B. Daar M, M_1 en M_2 twee waarden hebben, zij men bedacht voor de scherpe hoeken de positieve waarden te nemen.

CXXV. Voorstel.

Door L. van Zanten Jzn.

Twee lijnen AB *en* CD *snijden elkander in een punt* E *onder een hoek* θ *zoodanig, dat*

$$\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} = \left(\frac{1}{EC} + \frac{1}{ED}\right) Cos\,\theta.$$

Te bewijzen dat AC *en* BD *elkander snijden in een punt der loodlijn, die op* CD *in* E *wordt opgericht.*

Opgelost *door* L. van Zanten Jzn., A. Eecen, M. C. Paraira, J. Kiel *en* C. Lely.

Oplossing *van* L. van Zanten Jzn.

(Zie fig. 38). Trek CF loodrecht op CE in C, DG loodrecht op DE in D, dan is

Digitized by Google

$$EF = EC\ Sec\ \theta, \qquad EG = ED\ Sec\ \theta.$$

Nu is gegeven:

$$\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} = \frac{1}{EC : Cos\ \theta} + \frac{1}{ED : Cos\ \theta},$$

dus:

$$\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} = \frac{1}{EF} + \frac{1}{EG},$$

$$\frac{1}{EA} - \frac{1}{EF} = \frac{1}{EG} - \frac{1}{EB},$$

$$\frac{EF - EA}{EA \times EF} = \frac{AF}{EA \times EF} = \frac{EB - EG}{EG \times EB} = \frac{BG}{EG \times EB};$$

waaruit volgt:

$$\frac{AF}{EA} \times \frac{EG}{EF} \times \frac{EB}{GB} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ware het nu mogelijk, dat de loodlijn PE op CD nedergelaten, CA in P en BD in P′ sneed, dan zou men hebben:

$\triangle ACF \backsim \triangle AEP$, $\triangle CEF \backsim \triangle DEG$, $\triangle EP'B \backsim \triangle DBG$

en $AF : CF = AE : EP$, $EG : EF = DG : CF$, $EB : EP' = GB : DG$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{CF}{EP}, \qquad \frac{EG}{EF} = \frac{DG}{CF}, \qquad \frac{EB}{GB} = \frac{EP'}{DG},$$

waaruit volgt, uit aanmerking van (1):

$$\frac{CF}{EP} \times \frac{DG}{CF} \times \frac{EP'}{DG} = 1$$

en

$$EP' = EP.$$

CXXVI. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Men vraagt meetkundig *te bewijzen, het vraagstuk voorkomende in* BRIOT ET BOUQUET, Géométrie Analytique: *wanneer men de figuur geconstrueerd heeft, dienende tot het bewijs der stelling omtrent het vierkant beschreven op de schuinsche zijde van een rechthoekigen driehoek, zullen de twee lijnen, welke de uiteinden der schuinsche zijde vereenigen met de overstaande hoekpunten der vierkanten beschreven op de overstaande zijden van den driehoek, elkander snijden in de loodlijn, uit het hoekpunt van den rechten hoek des driehoeks op de schuinsche zijde nedergelaten.*

OPGELOST *door* A. EECEN, W. VAN HAARST, M. C. PARAIRA, J. C. EGER *en* C. LELY.

OPLOSSING *van* A. EECEN.

(Zie fig. 39). Trekt men door het snijpunt P der lijnen

Digitized by Google

CG en BH, de lijn AD, dan moet bewezen worden, dat AD loodrecht op BC staat.

Volgens eene bekende stelling uit de theorie der transversalen heeft men:

$$AF \times CD \times BE = CF \times BD \times AE \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Uit de figuur volgt direkt:

$$BE : AE = BG : AC = AB : AC$$

en $$AF : CF = AB : CH = AB : AC,$$

dus: $$BE \times AF : AE \times CF = AB^2 : AC^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Deze vergelijking in verband gebracht met vergelijking (1), geeft:

$$AB^2 : AC^2 = BD : CD,$$

waaruit $AB^2 + AC^2 : BD + CD = AB^2 : BD = AC^2 : CD,$

of $BC^2 : BC = AB^2 : BD = AC^2 : CD,$

dus $AB^2 = BC \times BD$ en $AC^2 = BC \times CD,$

waaruit dus onmiddelijk blijkt, dat de lijn AD een loodlijn is, getrokken uit het hoekpunt van den rechten hoek tot de hypothenusa van den rechthoekigen driehoek.

CXXVII. VOORSTEL.

Door J. W. TESCH.

Van alle driehoekige pyramiden met gegeven grondvlak en hoogte die te bepalen, wier oppervlak een minimum *is.*

OPGELOST *door* J. W. TESCH, M. C. PARAIRA, G. SCHOUTEN *en* A. EECEN.

OPLOSSING *van* J. W. TESCH.

Zij de inhoud van het gegeven grondvlak $= p^2$ en de gegeven hoogte $= h$.

Laat uit V (zie fig. 40) loodlijnen neder op de zijden van $\triangle ABC$, dan zijn TDV, TEV, TFV de standhoeken, die wij zullen voorstellen door θ, ϕ, ψ.

Nu is $TV = TF \, Sin \, \psi$ en $TV = FV \, tang \, \psi$

of $$FT = \frac{h}{Sin \, \psi}, \qquad FV = h \, Cot \, \psi.$$

Bijgevolg $\triangle ABT = \frac{1}{2} h \times \frac{c}{Sin \, \psi}$ en $\triangle ABV = \frac{1}{2} ch \, Cot \, \psi.$

Oppervl. pyramide $$= \tfrac{1}{2} h \left(\frac{a}{Sin \, \theta} + \frac{b}{Sin \, \phi} + \frac{c}{Sin \, \psi} \right) . \; . \; . \quad (1)$$

Inh. $$\triangle ABC = p^2 = \tfrac{1}{2} h \, (a \, Cot \, \theta + b \, Cot \, \phi + c \, Cot \, \psi) \quad . \quad (2)$$

Het komt er nu op aan, de uitdrukking

Digitized by Google

$$f(\theta, \varphi, \psi) = \frac{a}{Sin\,\theta} + \frac{b}{Sin\,\phi} + \frac{c}{Sin\,\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

tot een minimum te maken.

Uit (A) volgt

$$\frac{df}{d\theta} = -\frac{a\,Cos\,\theta}{Sin^2\theta} - \frac{c\,Cos\,\psi}{Sin^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\theta}; \quad \frac{df}{d\phi} = -\frac{b\,Cos\,\phi}{Sin^2\phi} - \frac{c\,Cos\,\psi}{Sin^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\phi}.$$

Deze beide uitdrukkingen moeten $= 0$ zijn, en men heeft derhalve:

$$-\frac{a\,Cos\,\theta}{Sin^2\theta} - \frac{c\,Cos\,\psi}{Sin^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{b\,Cos\,\phi}{Sin^2\phi} - \frac{c\,Cos\,\psi}{Sin^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\phi}$$

en na herleiding $\frac{a\,Cos\,\theta}{Sin^2\theta} \cdot \frac{d\psi}{d\phi} = \frac{b\,Cos\,\phi}{Sin^2\phi} \cdot \frac{d\psi}{d\theta}$ . . . . . (B)

Maar uit (2) volgt

$$-\frac{ad\theta}{Sin^2\theta} - \frac{cd\psi}{Sin^2\psi} = 0 \quad \text{en} \quad -\frac{bd\phi}{Sin^2\phi} - \frac{cd\psi}{Sin^2\psi} = 0$$

of $\frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{a\,Sin^2\psi}{c\,Sin^2\theta}, \quad \frac{d\psi}{d\phi} = -\frac{b\,Sin^2\psi}{c\,Sin^2\phi}.$

Deze uitdrukkingen worden nu gesubstitueerd in (B) en men heeft:

$$-\frac{ab\,Cos\,\theta\,Sin^2\psi}{c\,Sin^2\theta\,Sin^2\phi} = -\frac{ab\,Cos\,\varphi\,Sin^2\psi}{c\,Sin^2\phi\,Sin^2\theta},$$

waaruit volgt: $Cos\,\theta = Cos\,\phi,$

$$\theta = \phi.$$

Evenzoo blijkt dat $\psi = \theta = \varphi$; de zijvlakken moeten dus gelijke hoeken maken met het grondvlak.

Dat deze waarden de uitdrukking voor het oppervlak tot een minimum maken, is duidelijk. Immers ware $\theta > \phi > \psi$, dan zou de uitdrukking

$$\frac{a}{Sin\,\theta} + \frac{b}{Sin\,\varphi} + \frac{c}{Sin\,\psi} > \frac{a}{Sin\,\theta} + \frac{b}{Sin\,\theta} + \frac{c}{Sin\,\theta} \quad \text{zijn.}$$

Daar nu $FV = h\,Cot\,\psi$, $DV = h\,Cot\,\theta$, $EV = h\,Cot\,\phi$ is, zoo is het oppervlak een minimum, wanneer $\varphi = \theta = \psi$, d. i. wanneer de loodlijn uit den top der pyramide op haar grondvlak nedergelaten dit snijdt in het middelpunt des cirkels, welke in het grondvlak kan ingeschreven worden.

Opmerking van G. Schouten. Op dezelfde wijze blijkt, dat voor een n-hoekige pyramide het oppervlak een minimum zijn zal, ingeval de loodlijn uit den top op het grondvlak neder-

Digitized by Google

gelaten, dit treft in een punt, dat op gelijken afstand van elk der zijden des grondvlaks ligt.

Ingeval dus dit grondvlak niet is een veelhoek, waarin een cirkel kan beschreven worden, kan er ook geen plaats voor den top aangewezen worden, waarvoor het oppervlak een minimum is, dat wil zeggen, waarvoor dit oppervlak grooter wordt, *naar welke richting ook* de top verplaatst wordt in een vlak, liggende op een afstand h van het grondvlak.

CXXVIII. Voorstel.

Door J. M. Heybrock.

Als men uit de uiteinden van een der assen eener ellips lijnen trekt tot een willekeurig genomen punt aan den omtrek der ellips, dan ontstaat daardoor een vlakke driehoek; men vraagt, twee der hoeken van dien driehoek uit te drukken in functie van den derden.

Opgelost *door* J. M. Heijbrock *en* C. Lely.

Oplossing *van* J. M. Heijbrock.

Zij de vergelijking der ellips: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

of $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$

dan kan men deze vergelijking beschouwen te zijn ontstaan door de eliminatie van β uit de vergelijkingen:

$$\frac{x}{a}=\beta\left\{1+\frac{y}{b}\right\} \quad \text{en} \quad \frac{x}{a}=\frac{1}{\beta}\left\{1-\frac{y}{b}\right\}$$

dat is: $y=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a}x-b$ en $y=-\beta\cdot\frac{b}{a}x+b$,

deze vergelijkingen behooren bij lijnen gaande door de uiteinden der kleine as en elkander snijdende in den omtrek der gegevene ellips. Stelt men nu de bovengenoemde hoeken p, q en t, en de hoeken die de laatst vermelde lijnen met het positieve deel der x-as maken ϕ en ϕ', dan is:

$$tang\,\phi=-\beta\cdot\frac{b}{a}; \quad tang\,\phi'=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{b}{a},$$

waaruit men vindt: $tang\,p=-Cotg\,\phi=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{a}{b}$

$$tang\,q=\quad Cotg\,\phi'=\beta\cdot\frac{a}{b}$$

Digitized by Google

derhalve: $tang\, p \times tang\, q = \frac{a^2}{b^2}$

en $tang\, q = \frac{a^2}{b^2}\, Cotang\, p$

$$tang\, t = -tang\,(p+q) = -\frac{tang\, p + tang\, q}{1 - tang\, p\, tang\, q},$$

dit geeft na herleiding:

$$tang\, t = \frac{1 + (1-e^2)\, tang^2\, p}{e^2\, tang\, p} = 2 \times \frac{1 - e^2\, Sin^2\, p}{e^2\, Sin\, 2p}.$$

Wisselt men de letters a en b om, dan verkrijgt men de oplossing van het vraagstuk, toegepast op de groote as.

CXXIX. VOORSTEL.

Door D. B. WISSELINK.

Onder alle koorden van eene zelfde lengte, die in eene vlakke kromme kunnen getrokken worden, diegene te bepalen, welke het grootste of het kleinste segment afsnijdt.

OPGELOST *door* D. B. WISSELINK *en* G. SCHOUTEN.

ANALYTISCHE OPLOSSING *van* D. B. WISSELINK.

(Zie fig. 41.) Zij A, (x, y); B, (u, v), dus $y = F(x)$, $v = F(u)$, AG $= y$, BH $= v$, AK $\perp$ BH en laten de raaklijnen in A en B met de X-as hoeken maken β en β_1, de koorde BA een hoek γ, laat de eerste raaklijn met de koorde een hoek α en de tweede een hoek α_1 maken, dan is

$$\text{Inh. AGHBF} = \int_k^u YdX = \int vdu - \int ydx,$$

doch u is een functie van x, dus

$$\text{Inh. AGHBF} = \int v\frac{du}{dx}dx - \int ydx$$

$$\text{en Inh. segm. ABF} = \int v\frac{du}{dx}dx - \int ydx - \tfrac{1}{2}(y+v)(u-x).$$

De afgeleide dezer functie moet nul zijn, dus:

$$v\frac{du}{dx} - y - \tfrac{1}{2}(u-x)\left(\frac{dy}{dx} + \frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}(y+v)\left(\frac{du}{dx} - 1\right) = 0.$$

Na vereenvoudiging:

$$\frac{du}{dx}\left\{(v-y) - (u-x)\frac{dv}{du}\right\} + (v-y) - (u-x)\frac{dy}{dx} = 0. \quad (1)$$

Digitized by Google

Nog bestaat tusschen x, y, u en v de betrekking:

$$(x-u)^2+(y-v)^2=p^2$$

en hieruit:

$$(x-u)\left(1-\frac{du}{dx}\right)+(y-v)\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right)=0$$

of $$\frac{du}{dx}\left\{(x-u)+(y-v)\frac{dv}{du}\right\}=(x-u)+(y-v)\frac{dy}{dx}.$$

Tusschen de laatste verg. en (1) $\frac{du}{dx}$ geëlimineerd geeft:

$$\frac{(x-u)+(y-v)\frac{dy}{dx}}{(x-u)+(y-v)\frac{dv}{du}}=-\frac{(v-y)-(u-x)\frac{dy}{dx}}{(v-y)-(u-x)\frac{dv}{du}}$$

of $$\frac{1+\frac{y-v}{x-u}\cdot\frac{dy}{dx}}{1+\frac{y-v}{x-u}\cdot\frac{dv}{du}}=-\frac{\frac{v-y}{u-x}-\frac{dy}{dx}}{\frac{v-y}{u-x}-\frac{dv}{du}}$$

of $$\frac{1+tg\,\gamma\,tg\,\beta}{1+tg\,\gamma\,tg\,\beta_1}=-\frac{tg\,\gamma-tg\,\beta}{tg\,\gamma-tg\,\beta_1}$$

of $$\frac{tg\,\beta-tg\,\gamma}{1+tg\,\beta\,tg\,\gamma}=-\frac{tg\,\beta_1-tg\,\gamma}{1+tg\,\beta_1\,tg\,\gamma}$$

of $$tg\,(\beta-\gamma)=-tg\,(\beta_1-\gamma)$$

of $$tg\,\alpha=tg\,(\gamma-\beta_1)=tg\,\alpha_1$$

d. w. z.: De hoeken die de raaklijnen, in de snijpunten der koorde met de kromme, met de koorde maken, moeten gelijk zijn.

MEETKUNDIGE OPLOSSING *van* G. SCHOUTEN.

Zij AB een der standen van de koorde (fig. 42). Als de grootte van het segment, door die koorde bepaald, een maximum- of minimum-waarde zal hebben, moet de differentiaal nul zijn. Geven we daartoe aan AB een oneindig kleine verplaatsing, zoodat ze in den stand A'B' komt, die met AB een oneindig kleinen hoek van de eerste orde maakt, dan is met verwaarloozing der grootheden van hoogere orden

$$AA'\ Cos\ A'AS = BB'\ Cos\ B'BS' \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

omdat $$AB = A'B' \quad \text{is.}$$

Omdat de differentiaal van het segment nul moet zijn, moet ook $$Sector\ SAA' = Sector\ SBB'$$

zijn; maar $Sector\ SAA' = \frac{1}{2}SA \times SA' \times Sin\ ASA'$

Digitized by Google

en $\textit{Sector}\ SBB' = \frac{1}{2} SB \times SB' \times \textit{Sin}\ BSB'$,

altijd met verwaarloozing der grootheden van tweede en hoogere orde, zoodat

$$SA \times SA' = SB \times SB' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Maar de inhouden dierzelfde sectoren kunnen we ook op de volgende wijze voorstellen:

$$\textit{Sector}\ SAA' = \tfrac{1}{2} SA \times AA' \times \textit{Sin}\ A'AS$$
$$\textit{Sector}\ SBB' = \tfrac{1}{2} SB \times BB' \times \textit{Sin}\ SBB',$$

zoodat ook

$$SA \times A'A \times \textit{Sin}\ A'AS = SB \times BB' \times \textit{Sin}\ SBB' \quad . \ . \ (3)$$

De leden van (3) door de overeenkomstige van (1) gedeeld, geeft:

$$SA\ tg\ A'AS = SB\ tg\ B'BS' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

En de leden van (4) door de overeenkomstige van (2) gedeeld, geeft na eenige herleiding:

$$SB'\ tg\ A'AS = SA'\ tg\ B'BS' \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Omdat $SA + SB = SA' + SB'$,

vindt men door middel van (4) en (5):

$$SA\,(1 + tg\ A'AS\,.\,Cot\ B'BS) = SB'\,(1 + tg\ A'AS\,.\,Cot\ B'BS),$$

of $SA = SB'$

dus ook $SB = SA'$.

De driehoeken SAA' en SBB' zijn dus gelijk en gelijkvormig, waaruit voortvloeit: $\angle A'AS = \angle BB'S$.

Gaat men nu tot de grens over, dan ziet men, dat beide hoeken overgaan in de hoeken, die de koorde maakt met de raaklijnen aan de kromme in de uiteinden der koorde; zoodat als voorwaarde van maximum of minimum geldt, dat de raaklijnen aan de kromme in de uiteinden der koorde met deze een gelijkbeenigen driehoek moeten vormen, welks basis de koorde is.

CXXX. Voorstel.

Door D. J. Korteweg.

Op de uiteinden van twee toegevoegde middellijnen eener ellips werden normalen opgericht; welke is de meetkundige plaats der onderlinge snijpunten dier normalen?

Opgelost *door* M. C. Paraira *en* D. J. Korteweg.

Oplossing *van* M. C. Paraira.

Laat de vergelijking der ellips zijn $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, zoo moet, indien $y = mx$ en $y = m'x$ de vergelijkingen van twee toe-

Digitized by Google

gevoegde middellijnen zijn, $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ zijn. Stelt men dus voor de eene dier lijnen $y = \frac{b}{am}x$, zoo is de andere $y = -\frac{bm}{a}x$.

De vergelijkingen van de loodlijnen op de uiteinden van deze middellijnen opgericht, zullen dan zijn:

$$y = -\frac{amx}{b} \pm \frac{a^2m^2 + b^2}{b\sqrt{m^2+1}}, \text{ en } y = \frac{a}{bm}x \pm \frac{b^2m^2 + a^2}{bm\sqrt{m^2+1}};$$

waaruit nu m moet geëlimineerd worden. Men vindt daartoe achtervolgens:

$$by + amx = \frac{a^2m^2 + b^2}{\sqrt{m^2+1}}, \quad bmy + ax = \frac{b^2m^2 + a^2}{\sqrt{m^2+1}};$$

$$b^2y^2 + 2abmxy + a^2m^2x^2 = \frac{a^4m^4 + 2a^2b^2m^2 + b^4}{m^2+1},$$

$$b^2m^2y^2 + 2abmxy + a^2x^2 = \frac{b^4m^4 + 2a^2b^2m^2 + a^4}{m^2+1}$$

en door aftrekking dezer vergelijkingen:

$$b^2y^2(1 - m^2) + a^2x^2(m^2 - 1) = \frac{(a^4 - b^4)(m^4 - 1)}{m^2+1}$$

$$\text{of} \quad a^2x^2 - b^2y^2 = a^4 - b^4, \quad \frac{x^2}{\frac{a^4 - b^4}{a^2}} - \frac{y^2}{\frac{a^4 - b^4}{b^2}} = 1,$$

dus is de meetk. plaats een met de ellips concentrische hyperbel.

CXXXI. Voorstel.

Door D. J. Korteweg.

Gegeven zijn eene ellips en eene rechte lijn in haar vlak. Uit punten dier rechte lijn worden raaklijnen aan de ellips getrokken, welke met de contact-koorden driehoeken insluiten. Welke is de meetkundige plaats der zwaartepunten van die driehoeken?

Opgelost *door* D. J. Korteweg *en* A. Eegen.

Oplossing *van* D. J. Korteweg.

Als ordinaten-as kiezen wij de middellijn der ellips, die evenwijdig loopt met de gegeven rechte; als abscissen-as de toegevoegde middellijn.

Voor de vergelijking der ellips mogen wij dan stellen:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1;$$

Digitized by Google

voor die der gegeven rechte:

$$x = p.$$

Wij voeren verder in de coördinaten p, q van een willekeurig punt der rechte, X, Y van het bijbehoorende zwaartepunt, x_1, y_1 van het midden der bijbehoorende contactkoorde. Daar het tweede punt echter gelegen is op één derde van den afstand tusschen het derde en eerste, zijn ons dadelijk de beide volgende betrekkingen bekend:

$$3X = 2x_1 + p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$3Y = 2y_1 + q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Het punt x_1, y_1 moet gelegen zijn op de contactkoorde van het punt p, q en op de rechte, die dit punt met het middelpunt der ellips vereenigt. Daaruit volgen de beide betrekkingen:

$$\frac{x_1 p}{a^2} + \frac{y_1 q}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Met behulp van (1) en (2) elimieeren wij x_1 en y_1. Daardoor vindt men:

$$\frac{p(3X - p)}{a^2} + \frac{q(3Y - q)}{b^2} = 2; \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\frac{3X - p}{p} = \frac{3Y - q}{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Uit (6) blijkt: $$q = \frac{pY}{X}.$$

Dit gesubstitueerd in (5), geeft aanleiding tot de gevraagde vergelijking:

$$\frac{X^2 p(3X - p)}{a^2} + \frac{p(3Y^2 X - pY^2)}{b^2} = 2X^2$$

$$p\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right)(3X - p) = 2X^2$$

$$\frac{Y^2}{b^2} = \frac{X^2[(2a^2 + p^2) - 3pX]}{a^2 p(3X - p)}$$

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2} X^2 \cdot \frac{\frac{2a^2 + p^2}{3p} - X}{X - \frac{1}{3}p}.$$

Onder dezen vorm kan men de vergelijking gemakkelijk bediscussieeren.

Digitized by Google

De oorsprong voldoet, maar als geïsoleerd punt; want indien X een weinig grooter of een weinig kleiner dan nul genomen wordt, verkrijgt Y een onbestaanbare waarde.

Overigens zijn de abscissen van alle bestaanbare punten begrepen tusschen de grenzen:

$$\tfrac{1}{3}p \quad \text{en} \quad \frac{2a^2+p^2}{3p}.$$

De lijn $X = \frac{1}{3}p$ is asymptoot. Wordt X iets kleiner dan $\frac{2a^2+p^2}{3p}$ genomen, dus gelijk aan: $\frac{2a^2+p^2}{3p} - \beta$; waarin β zeer klein is; dan is:

$$Y^2 = \beta \times \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{2a^2+p^2}{3p} - \frac{1}{3}p - \beta} \cdot X^2$$

dus:

$$\lim \frac{Y}{\beta} = \infty.$$

De lijn:

$$X = \frac{2a^2+p^2}{3p}$$

raakt de kromme in haar snijpunt met de abscissen-as.

De kromme is verder symetriek ten opzichte der abscissen-as.

Door verdere discussie met behulp van differentiaal-rekening vindt men dat $\frac{dy}{dx}$ tusschen de grenzen $\frac{1}{3}p$ en $\frac{2a^2+p^2}{3p}$ voortdurend negatief blijft, zoodat de kromme van af $X = \frac{1}{3}p$ tot $X = \frac{2a^2+p^2}{3p}$ voortdurend de abcissen-as nadert. Zij kan verder slechts één buigpunt boven, en één onder die as vertoonen; want indien men beproeft in de kromme meerdere buigpunten aan te brengen, zal men dadelijk bespeuren dat zij dan door een rechte in meer dan drie punten zou gesneden worden, bijv. door een lijn gaande door het tweede buigpunt, rakende aan het hoogere gedeelte der kromme. Dit nu is onmogelijk, daar de kromme van den derden graad is.

Ieder zal zich nu den loop der kromme voorschetsen kunnen.

CXXXII. VOORSTEL.

Door D. J. KORTEWEG.

Een hoek van gegeven grootte kan draaien om zijn hoekpunt, gesteld in het middelpunt eener hyperbel. Welke is de

Digitized by Google

meetkundige plaats van de voetpunten der loodlijnen, uit dat hoekpunt nedergelaten op de lijn, welke de punten vereenigt, waar de hyperbel door de beenen van den gegeven hoek gesneden wordt?

OPGELOST *door* D. J. KORTEWEG.

OPLOSSING *van* D. J. KORTEWEG.

De asymptoten der hyperbel worden als coördinaten-assen gekozen, die dus in den regel scheefhoekig zijn en een hoek θ insluiten. Voor de vergelijking der hyperbel stellen wij:

$$xy = k^2;$$

voor die van de beide beenen van den hoek, geplaatst in een willekeurigen stand:

$$y = m_1 x \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{en} \quad y = m_2 x \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Wanneer dan α voorstelt den gegeven hoek, dan is voortdurend:

$$tg\,\alpha = \frac{(m_1 - m_2)\,Sin\,\theta}{1 + m_1 m_2 + (m_1 + m_2)\,Cos\,\theta} \ldots\ldots (3)$$

Voor de snijpunten van de lijnen (1) en (2) met de hyperbel vindt men de coördinaten:

$$\frac{k}{\sqrt{m_1}},\ k\sqrt{m_1} \quad \text{en} \quad \frac{k}{\sqrt{m_2}},\ k\sqrt{m_2};$$

daarom is de vergelijking der vereenigingslijn van beide snijpunten:

$$\frac{x - \dfrac{k}{\sqrt{m_1}}}{\dfrac{k}{\sqrt{m_1}} - \dfrac{k}{\sqrt{m_2}}} = \frac{y - k\sqrt{m_1}}{k\sqrt{m_1} - k\sqrt{m_2}};$$

of

$$x\sqrt{m_1 m_2} + y - k\,(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}) = 0. \ldots (4)$$

De richtingscoëfficient dezer lijn is:

$$\mathrm{M} = -\sqrt{m_1 m_2},$$

en wanneer M_1 de richtingscoëfficient voorstelt van de loodlijn op deze lijn neergelaten, dan is:

$$1 + \mathrm{M}\mathrm{M}_1 + (\mathrm{M} + \mathrm{M}_1)\,Cos\,\theta = 0,$$

of

$$\mathrm{M}_1 = -\frac{1 + \mathrm{M}\,Cos\,\theta}{\mathrm{M} + Cos\,\theta} = -\frac{1 - \sqrt{m_1 m_2}\,Cos\,\theta}{-\sqrt{m_1 m_2} + Cos\,\theta},$$

en de vergelijking van zulk een loodlijn, neergelaten uit den oorsprong, wordt:

$$y\,(-\sqrt{m_1 m_2} + Cos\,\theta) + x\,(1 - Cos\,\theta\sqrt{m_1 m_2}) = 0. \quad (5)$$

Digitized by Google

Nu moet nog slechts uit (3), (4) en (5) m_1 en m_2 geëlimineerd worden. Men houdt dan over een betrekking tusschen x en y, tusschen de coördinaten van het snijpunt van (4) en (5), dat de meetkundige plaats beschrijft.

Uit (5) volgt:

$$\sqrt{m_1 m_2} = \frac{x + y \, Cos\,\theta}{y + x \, Cos\,\theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Wij substituëren deze waarde van $\sqrt{m_1 m_2}$ in (4) en vinden dan:

$$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy \, Cos\,\theta}{k\,(x \, Cos\,\theta + y)} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Met behulp van (6) en (7) elimineeren wij m_1 en m_2 uit den noemer der breuk in (3), en lossen dan op uit (3):

$$m_1 - m_2 = \frac{tg\,\alpha(1 + m_1 m_2 + (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})^2 Cos\theta - 2\sqrt{m_1 m_2} Cos\theta)}{Sin\,\theta}$$

$$= \frac{tg\,\alpha\left\{k^2 Sin^2\theta(x^2 + y^2 + 2xy Cos\theta) + (x^2 + y^2 + 2xy Cos\theta)^2 Cos\theta\right\}}{k^2\,(x \, Cos\,\theta + y)^2 \, Sin\,\theta}$$

Deze vergelijking deelende door (7), vindt men:

$$\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2} = \frac{tg\,\alpha\,(k^2 \, Sin^2\theta + (x^2 + y^2 + 2xy \, Cos\,\theta) \, Cos\,\theta)}{k\,(x \, Cos\,\theta + y) \, Sin\,\theta} \quad (9)$$

en nu geeft de identieke vergelijking:

$$(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})^2 - (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})^2 = 4\sqrt{m_1 m_2};$$

met behulp van (6), (7) en (9) aanleiding tot de vergelijking der gevraagde meetkundige plaats, namelijk tot:

$$\frac{(x^2 + y^2 + 2xy Cos\theta)^2 (Sin^2\theta - Cos^2\theta tg^2\alpha) - 2k^2 Sin^2\theta Cos\theta tg\alpha (x^2 + y^2 + 2xy Cos\theta) - k^4 Sin^4\theta tg^2\alpha}{k^2\,(x \, Cos\,\theta + y)^2 \, Sin^2\,\theta}$$

$$= \frac{4\,(x + y \, Cos\,\theta)}{x \, Cos\,\theta + y}; \quad \text{of:}$$

$$(x^2 + y^2 + 2xy Cos\theta)^2 (tg^2\theta - tg^2\alpha) - 2k^2 Sin\theta tg\theta tg\alpha (x^2 + y^2 + 2xy Cos\theta) - k^4 Sin^2\theta tg^2\theta tg^2\alpha = 4k^2 tg^2\theta (x^2 Cos\theta + y^2 Cos\theta + xy(1 + Cos^2\theta)).$$

Discussie dezer vergelijking zou te ver voeren. Stelt men $\alpha = 0$, dan verkrijgt men de meetkundige plaats van de voetpunten der loodlijnen uit het middelpunt eener hyperbel op de raaklijnen neergelaten.

CXXXIII. VOORSTEL.

Door L. VAN ZANTEN JZN.

Een homogene plaat die den vorm heeft van een gelijkbee-

Digitized by Google

nigen driehoek, rust in een verticaal vlak met zijne gelijke zijden op twee punten. Vrage naar den evenwichts-toestand.

OPGELOST *door* L. VAN ZANTEN JZN. *en* G. SCHOUTEN.

OPLOSSING *van* L. VAN ZANTEN JZN.

Gegeven de afstand der punten P en Q (zie fig. 43) $= a$, de hoek dien PQ maakt met een waterpas vlak α, de hoogte van $\triangle ABC = h$, zijn tophoek $= 2\beta$. Gevraagd de hoek θ, dien de basis BC met een hor. vlak maakt. (RS horizontaal). De weerstanden in de punten P en Q zijn normaal gericht op de zijden AB en AC en hunne richtingen moeten elkaar snijden in de verticaal die uit 't zwaartepunt Z wordt neergelaten. Zij E dit snijpunt, dan liggen de punten P, Q, E en A op een cirkel, waarvan AE de middellijn is, derh.

$$AE = \frac{a}{Sin\, 2\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\angle PEA = \angle PQA, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

enz.

Nu is $\angle ZDF = 90^\circ - \theta$, $\angle QSF = 90^\circ - (\theta + \beta)$,

$\angle PRF = 90^\circ - (\theta - \beta)$.

$$\begin{array}{lll} & \angle PQA = \angle QSF + \alpha & = 90^\circ - (\theta + \beta - \alpha) \\ & \angle PEF = 180^\circ - PRF & = 90^\circ + (\theta - \beta) \\ \text{aftrekken} & \angle PEA \text{ (zie (2))} & = 90^\circ - (\theta + \beta - \alpha) \\ \hline & \angle AEF & = \quad 2\theta - \alpha. \end{array}$$

Verder is $AZ\, Sin\, AZF = AE\, Sin\, AEF$

of $$\frac{2h}{3}\, Sin\, \theta = \frac{a}{Sin\, 2\beta}\, Sin\, (2\theta - \alpha),$$

waaruit: $$\frac{Sin\, (2\theta - \alpha)}{Sin\, \theta} = \frac{2h\, Sin\, 2\beta}{3a}.$$

Liggen P en Q in een horizontaal vlak, dan is $\alpha = 0$,

dus $$\frac{Sin\, 2\theta}{Sin\, \theta} = 2\, Cos\, \theta = \frac{2h\, Sin\, 2\beta}{3a},$$

gevende de waarden:

$$Sin\, \theta = 0 \quad \text{of} \quad \theta = 0 \quad \text{en} \quad Cos\, \theta = \frac{h\, Sin\, 2\beta}{3a}.$$

Is bovendien de driehoek rechthoekig, dan is $2\beta = 90^\circ$,

$$\theta = 0 \quad \text{of} \quad = bg\left(Cos = \frac{h}{3a}\right),$$

Digitized by Google

Het laatste resultaat kan ook rechtstreeks op de volgende wijze gevonden worden, (zie fig. 44),

$\angle FZK = \angle PAZ = \angle ZAQ = \angle ZIE = 45^\circ$, dus $PI = PA$

en $EI = EK$; $\triangle EFZ \backsim \triangle PEQ$ (zijden loodrecht op elkaar)

dus $PE : EQ = EF : FZ$, maar $FZ = FK$, $EQ = PI$

$$PE - EQ : EF - FZ = PE : EF = EQ : FZ$$

$\overline{EJ}^2 : \overline{EK}^2$, daar deze gelijk zijn, is

ook $PE = EF$ en $EQ = FZ$, dus $EZ = PQ = EA = a$.

Laten wij nu in den gelijkb. $\triangle AEZ$ de loodl. EG op de basis neer, dan is $ZG = \frac{1}{2} AZ = \frac{1}{3}h$, derh. daar

$$EZ \, Cos\, \theta = ZG \text{ is, } a \, Cos\, \theta = \tfrac{1}{3}h \text{ of } Cos\, \theta = \frac{h}{3a}.$$

CXXXIV. Voorstel. (*)

Door C. J. Matthes.

Twee kegelsneden zijn beschreven met een gemeenschappelijk brandpunt en de bijbehoorende richtlijnen gegeven. Te bewijzen, dat, bijaldien de som harer omgekeerde parameters standvastig is, hare gemeenschappelijke raaklijnen eene kegelsnede zullen aanraken.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Als men uit het gegeven brandpunt S loodlijnen laat vallen op de gegeven richtlijnen, dan bevatten die loodlijnen de middelpunten van weêrkeerige cirkels met opzicht tot het punt S, die tevens de polen zijn der richtlijnen. Voor eene bepaalde constante van weêrkeerigheid zijn die twee middelpunten bepaald. Met verschillende stralen van cirkels zullen de correspondeerende kegelsneden verschillen. Nu moet de som der omgekeerde parameters van twee zulke kegelsneden standvastig zijn, bijgevolg de som der stralen van de wederkeerige cirkels. Hieruit vloeit verder voort: dat de doorsnijdingspunten van elk paar cirkels gelegen zijn aan den omtrek eener ellips, waarvan de twee middelpunten van al de cirkels de brandpunten zijn, en wier groote as aan de standvastige som der stralen $R + r = R' + r' =$ enz. gelijk is. Die ellips heeft tot weêrkeerige wederom eene kegelsnede, waaraan de poollijnen van de punten der eerstgemelde ellips raaklijnen zijn.

(*) Dit voorstel en de twee volgenden zijn ontleend aan Ferrers *Nieuwere Meetkunde*, voorbeelden 44, 45 en 46.

Digitized by Google

CXXXV. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Eene kegelsnede is beschreven, welke drie gegeven rechte lijnen BC, CA, AB *aanraakt, zóó dat de twee raaklijnen, uit een gegeven punt* O *daaraan getrokken, loodrecht op elkander staan. Bewijs, dat zij altijd zekere andere vaste rechte lijn zal aanraken en dat, als die rechte lijn* BC, CA, AB *respectivelijk in* D, E, F *snijdt, elk van de hoeken* AOD, BOE, COF *een rechte hoek is.*

Bewijs tevens, dat de poollijn van O, *met opzicht tot die kegelsnede, altijd eene kegelsnede zal aanraken, waarvan* O *een brandpunt is.*

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

De wederkeerige van zulk eene kegelsnede ten opzichte van het punt O op haren richtcirkel is, zie Ferrers, bl. 110, § 122, eene gelijkzijdige hyperbel, gaande steeds door de drie polen der raaklijnen BC, CA, AB, maar dan is ook volgens § 123 het hoogte middelpunt O′ van de drie punten A′, B′, C′ aan den omtrek dier hyperbel gelegen, en deszelfs poollijn mede raaklijn aan de gegeven kegelsnede. Aangezien nu A′, B′, C′, D, E, F achtervolgens de polen zijn van B′C′, C′A′, A′B′, A′O′D′, B′O′E′, C′O′F′, zoo ziet men gereedelijk in dat de hoeken AOD, BOE, COF recht moeten zijn. Van de poollijn van O ten aanzien van de gegeven kegelsnede snijdt deze eene koorde af die in O een rechten hoek onderspant; zij is dus raaklijn tot eene kegelsnede die O tot brandpunt heeft volgens Voorstel C.

CXXXVI. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

OA, OB *zijn de gemeenschappelijke raaklijnen aan twee kegelsneden, die een zelfde brandpunt* S *hebben;* CA, CB *zijn raaklijnen aan één van hare doorsnijdingspunten;* BD, AE *raaklijnen die* CA, CB *respectivelijk in* D, E *ontmoeten. Te bewijzen, dat* S, D, E *op ééne zelfde rechte lijn liggen.*

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

(Zie fig. 45.) De weêrkeerige krommen van beide kegelsneden met opzicht tot het haar gemeenschappelijk brandpunt S zijn cir-

Digitized by Google

kels, die elkaâr snijden, zoodat de snijpunten $o'a'$ en $o'b'$ de polen zijn der gemeenschappelijke raaklijnen OA en OB. Het punt C, een van de twee dat de kegelsneden gemeen hebben, heeft tot poollijn eene der raaklijnen c', gemeen aan de twee cirkels; de beide raakpunten, $c'a'$ en $c'b'$, zijn de polen van CA en CB. Als men nu die raakpunten ieder met een verschillend uiteinde der gemeenschappelijke koorde verbindt, $c'a'$ met $o'a'$, $c'b'$ met $o'b'$ door lijnen a° en b', dan snijden die lijnen de cirkels nog in de punten $a'e'$ en $b'd'$, de polen der raaklijnen AE en BD. Het verbinden eindelijk van die punten met het raakpunt van denzelfden cirkel $c'b'$ en $c'a'$ geeft de lijnen e' en d', de poollijnen van E en D. Zullen nu deze punten met S op eene rechte lijn liggen, dan moeten de poollijnen een punt gemeen hebben. Daarvoor mag men het indedaad houden (aangezien de poollijn van S op oneindigen afstand zich bevindt) zoodra men kan bewijzen, dat d' en e' evenwijdig loopen, en dat valt gemakkelijk in het oog. Immers heeft men, zie de figuur, $\angle e'a' = \angle b'o' = \angle a'd'$, dat is, inwendig verwisselende hoeken gelijk, waaruit het gestelde blijkt.

CXXXVII. VOORSTEL.

Door J. W. TESCH.

Een driehoek te construeren, wanneer gegeven zijn de loodlijn op de basis, de loodlijn op eene der opstaande zijden en de lijn die uit den top tot het midden der basis is getrokken.

OPGELOST *door* J. W. TESCH, A. EECEN, J. KIEL *en* J. C. EGER.

OPLOSSING *van* J. W. TESCH.

(Zie fig. 46.) Beschrijf den rechthoekigen driehoek ADE, waarin AD is de gegeven loodlijn op de basis en AE de lijn die de basis middendoordeelt. Beschrijf uit E met EA tot straal een halven cirkel. Zet van uit F daarin eene koorde uit FG = E, de tweede gegeven hoogte. Vereenig G met A en neem EB=EC, dan zal △ABC de gevraagde zijn.

De reden hiervan is duidelijk. Immers daar EB = EC, en EA = EF, zal ABFC een parallelogram zijn, en dus de loodlijn uit C op AB neergelaten gelijk aan FG zijn. Het overige behoeft geen betoog.

CXXXVIII. VOORSTEL.

Door L. JANSE BZ.

Van een scheefhoekigen driehoek zijn gegeven de basis, een

Digitized by Google

der hoeken aan de basis en de deellijn, welke den tophoek middendoordeelt; men vraagt dien driehoek te berekenen en te construeeren.

OPGELOST *door* L. JANSE BZ.

OPLOSSING *van* L. JANSE BZ.

Zij van $\triangle$ ABC gegeven BC $= a$, $\angle$ ABC $= \beta$ en AD $= l$ en stel den halven tophoek $= \alpha$ en

$$BC : AD = a : l = k.$$

In de driehoeken ABC en ACD heeft men

$$AC : BC = Sin\,\beta : Sin\,2\alpha \text{ en } AC = a\,Sin\,\beta : Sin\,2\alpha$$

$$AC : AD = Sin\,ADC : Sin\,ACD$$

$$= Sin(\alpha+\beta) : Sin(2\alpha+\beta);\ AC = l\,Sin(\alpha+\beta) : Sin(2\alpha+\beta)$$

derhalve $k\,Sin\,\beta\,Sin\,(2\alpha+\beta) = Sin\,2\alpha\,Sin\,(\alpha+\beta)$ . . (A)

waaruit volgt:

$$Sin^6\alpha - (2k\,Sin\,\beta)\,Sin^5\alpha + \left\{k^2\,Sin^2\beta - Sin^2\beta - 1\right\}Sin^4\alpha$$
$$+ (k\,Sin^4\beta + 2k\,Sin\,\beta)\,Sin^3\alpha$$
$$+ (k^2\,Sin^5\beta - k^2\,Sin^4\beta + k^2\,Sin^2\beta - Sin^2\beta)\,Sin^2\alpha$$
$$- k\,Sin^4\beta\,Sin\,\alpha + \tfrac{1}{4}k^2\,Sin^6\beta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (A')$$

Uit welke formule, wanneer de verhouding k en de hoek β gegeven zijn, de *Sinus* van α, dus hoek α en daarmede en met de gegevens de geheele driehoek kan berekend worden.

Om den hoek α door constructie uit (A) te bepalen, stelle men $k' = k\,Sin\,\beta$ en neme N. *log.* der beide leden (modul$=m$)

$$m\,Log\,k' + m\,Log\,Sin\,(2\alpha+\beta)$$
$$= m\,Log\,Sin\,2\alpha + m\,Log\,Sin\,(\alpha+\beta). \quad . \; . \; . \quad (B)$$

Wij moeten dus twee krommen beschrijven, die tot vergelijkingen hebben:

$$y = m\,Log\,k' \qquad + m\,Log\,Sin\,(2\alpha+\beta)$$
$$\text{en } y = m\,Log\,Sin\,2\alpha + m\,Log\,Sin\,(\alpha+\beta).$$

Zij O de oorsprong der coördinaten: men neme

$$OX = m \times \tfrac{1}{2}\pi = 0.4343 \times 1.5708 = 0.6822;$$

deze moge beslaan op de teekening 341.1 mm. en de eenheid is derhalve 341.1 : 0.6822 = 500 mm.

De afstand OX zij in 90 gelijke deelen verdeeld, bevattende de bogen α van 0° tot 90°. De hoogte der teekening zij in 100 gelijke deelen verdeeld en stelle de eenheid voor.

De zwarte kromme lijnen stellen het 1e lid der vergelijking (B) voor, voor $\beta = 10°, 20° \ldots 170°$ en de roode kromme lijnen het tweede lid voor dezelfde waarden van β: de snij-

Digitized by Google

punten der overeenkomstige krommen geven de waarden van α aan voor elke der waarden van β. De krommen snijden elkander in twee punten en geven dus twee waarden van α: de eene geldt wanneer de hoek, de andere wanneer de supplements-hoek middendoor is gedeeld, de overige vier wortels der vergelijking (A′) zijn onbestaanbaar. Een gedeelte der teekening wordt in fig. 47 voorgesteld.

In de teekening is $k = 1$ genomen, voor andere waarden van k worden de zwarte kromme lijnen hooger of lager verplaatst.

CXXXIX. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Men vraagt eene formule te vinden voor de som van de breuken, *allen één zelfde noemer p hebbende, welke, wat hare waarden betreft, tusschen twee geheele getallen m en n kunnen ingevoegd worden.*

Opgelost *door* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* J. J. Teding van Berkhout.

Wij stellen $n > m$. Men heeft de breuken $= m + \frac{1}{p}$, $m + \frac{2}{p}$ $\ldots\ldots m + \frac{p-1}{p}$, welke kunnen worden ingevoegd tusschen m en $m + 1$. Voor de som dier breuken heeft men, daar het aantal termen $= p - 1$

$$(2m + 1) \times \tfrac{1}{2}(p - 1),$$

voor de som der breuken tusschen $m + 1$ en $m + 2$

$$(2m + 3) \times \tfrac{1}{2}(p - 1),$$

voor de som der breuken tusschen $m + 2$ en $m + 3$

$$(2m + 5) \times \tfrac{1}{2}(p - 1), \text{ enz.},$$

voor de som der breuken tusschen $n - 1$ en n

$$(2n - 1) \times \tfrac{1}{2}(p - 1),$$

voor de som van alle de breuken, terwijl het aantal termen is $n - m$

$$\tfrac{1}{2}[(2m + 1) + (2n - 1)] \times (n - m) \times \tfrac{1}{2}(p - 1)$$
$$= (m + n)(n - m) \times \tfrac{1}{2}(p - 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(p - 1) \times (n^2 - m^2).$$

Neem tot voorbeeld $p = 3$, dan is de som $= n^2 - m^2$,
$p = 5$, dan is de som $= 2(n^2 - m^2)$.

Stellende $m = 6$, $n = 10$, dan is in het eerste geval de

Digitized by Google

som van

$6^1/_3,\ 6^2/_3,\ 7^1/_3,\ 7^2/_3,\ 8^1/_3,\ 8^2/_3,\ 9^1/_3,\ 9^2/_3 = 64 = \overline{10}^2 - \overline{6}^2,$

in het tweede geval de som van

$$6^1/_5,\ 6^2/_5,\ 6^3/_5,\ 6^4/_5 \ldots\ 9^1/_5,\ 9^2/_5,\ 9^3/_5,\ 9^4/_5$$
$$= 128 = 2\,[\overline{10}^2 - \overline{6}^2].$$

CXL. Voorstel. (*)

Door J. J. Teding van Berkhout.

Indien in de middellijn AB *van een cirkel, buiten het middelpunt, of in hare verlengde een punt* C *wordt aangenomen, en* CDE *getrokken, welke den cirkel snijde in* D *en in* E, *en uit* D *eene loodlijn nedergelaten op* AB, *welke deze middellijn snijde in* F, *en den cirkel wederom ontmoete in* G, *zoo men dan de punten* E *en* G *vereenigt door eene lijn, welke de middellijn snijde in* H, *dan is die middellijn in* C *en in* H *harmonisch gedeeld.*

Opgelost *door* J. C. Eger, J. J. Teding van Berkhout *en* A. Eegen.

Oplossing *van* J. C. Eger.

Bewijs. Trekt men nog de koorden AE, AG, BG en BD, dan ligt vooreerst de vierhoek ABGE in een' cirkel (zie fig. 48), waardoor $\angle EAB + \angle BGE = 2R$;
maar ook $\angle HGB + \angle BGE = 2R$,
derhalve is $\angle EAB = \angle HGB$.

Verder is $\angle EAB = \angle EDB$, omdat zij op denzelfden boog staan; en trekt men nu CG, dan is drieh. CDG gelijkbeenig, terwijl drieh. BGD ook gelijkbeenig is.

Hierdoor is $\angle CGF = \angle CDF$
en $\angle BGF = \angle BDF$,
dus $\angle CGB = \angle CDB$, derh. ook $\angle EAB = \angle CGB$,
maar $\angle EAB = \angle HGB$,
dus $\angle CGB = \angle HGB$.

In driehoek CGD is nu $\angle G$ middendoor gedeeld door de lijn BG; bovendien is $\angle AGB$ recht, waardoor ook de supplementshoek EGC door GA middendoor gedeeld; daardoor is de basis CH in de punten B en A harmonisch gedeeld, en hierdoor wederkeerig is AB harmonisch verdeeld in de punten C en H.

(*) Zonder bewijs opgegeven in het werkje vermeld bij N°. 92.

Digitized by Google

Opmerking van J. J. Teding van Berkhout. Men heeft aldus eene constructie tot het harmonisch deelen eener gegevene lijn: de gewone is echter korter en gemakkelijker.

CXLI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Den inhoud van een bolvormigen driehoek uit te drukken in den sphaerischen straal des omschreven cirkels en twee der hoeken, die de naar de hoekpunten getrokkene stralen met elkander vormen.

Opgelost *door* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Zij van den bolvormigen driehoek ABC, O de pool van den omschreven cirkel en dus $AO = CO = BO = r$, de spherische straal. Stellen wij het spherisch exces van den driehoek BOC $= \delta$, dat van $AOC = \delta_1$ en dat van $AOB = \delta_2$, voorts de inhouden in dezelfde orde genomen I_1, I_2 en I_3 en dien van den geheelen driehoek I, dan is

$$I_1 = \frac{\delta}{90^\circ} \times R^2\pi, \quad I_2 = \frac{\delta_1}{90} \times R^2\pi, \quad I_3 = \frac{\delta_2}{90} \times R^2\pi$$

en alzoo

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\delta + \delta_1 + \delta_2}{90} \times R^2\pi \text{ en } \delta + \delta_1 + \delta_2 = \frac{90\,I}{R^2\pi},$$

waarin R de straal van den bol beteekent. Noemen wij nu den hoek BOC, α, AOC, β en AOB, $\gamma = 360^\circ - \alpha - \beta$, dan is in den gelijkbeenigen driehoek BOC (zie Lobatto, *Trigon.* 97,)

$$Cot\,\delta = \frac{Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,\alpha}{Sin\,\alpha},$$

in driehoek AOC $\quad Cot\,\delta_1 = \dfrac{Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,\beta}{Sin\,\beta}$

en in driehoek BOC $\quad Cot\,\delta_2 = \dfrac{Cot^2\tfrac{1}{2}r + Cos\,\gamma}{Sin\,\gamma}.$

Nu is $\quad Cot\,(\delta + \delta_1 + \delta_2) = \dfrac{Cot\,(\delta + \delta_1)\,Cot\,\delta_2 - 1}{Cot\,(\delta + \delta_1) + Cot\,\delta_2}$

$$= \frac{Cot\,\delta\,Cot\,\delta_1\,Cot\,\delta_2 - Cot\,\delta - Cot\,\delta_1 - Cot\,\delta_2}{Cot\,\delta\,Cot\,\delta_1 + Cot\,\delta\,Cot\,\delta_2 + Cot\,\delta_1\,Cot\,\delta_2 - 1}$$

en hierin de waarden van $Cot\,\delta$, $Cot\,\delta_1$ en $Cot\,\delta_2$ schrijvende,

Digitized by Google

vindt men: $Cot(\delta + \delta_1 + \delta_2) =$

$$\frac{(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\alpha)(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\beta)(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cot\gamma)-(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\alpha)Sin\beta Sin\gamma-(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\beta)Sin\alpha Sin\gamma-(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\gamma)Sin\alpha Sin\beta}{(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\alpha)(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\gamma)Sin\beta+(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\alpha)(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\beta)Sin\gamma+(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\beta)(Cot^2\tfrac{1}{2}r+Cos\gamma)Sin\alpha-Sin\alpha Sin\beta Sin\gamma},$$

of wel na rangschikking en ontwikkeling $Cot(\delta + \delta_1 + \delta_2) =$

$$\frac{\begin{array}{c}Cot^6\tfrac{1}{2}r + Cot^4\tfrac{1}{2}r(Cos\,\alpha + Cos\,\beta + Cos\,\gamma) + Cot^2\tfrac{1}{2}r(Cos\,\alpha\,Cos\,\beta - Sin\,\alpha\,Sin\,\beta + Cos\,\alpha\,Cos\,\gamma - Sin\,\alpha\,Sin\,\gamma + \\ + Cos\,\beta\,Cos\,\gamma - Sin\,\beta\,Sin\,\gamma) + Cos\,\alpha\,Cos\,\beta\,Cos\,\gamma - Cos\,\alpha\,Sin\,\beta\,Sin\,\gamma - Cos\,\beta\,Sin\,\alpha\,Sin\,\gamma - Cos\,\gamma\,Sin\,\alpha\,Sin\,\beta\end{array}}{\begin{array}{c}Cot^4\tfrac{1}{2}r(Sin\,\alpha + Sin\,\beta + Sin\,\gamma) + Cot^2\tfrac{1}{2}r\{(Cos\,\alpha + Cos\,\beta)\,Sin\,\gamma + (Cos\,\alpha + Cos\,\gamma)\,Sin\,\beta + (Cos\,\beta + Cos\,\gamma)\,Sin\,\alpha\} + \\ + Sin\,\alpha\,Cos\,\beta\,Cos\gamma + Sin\,\beta\,Cos\,\alpha\,Cos\,\gamma + Sin\,\gamma\,Cos\,\alpha\,Cos\,\beta - Sin\,\alpha\,Sin\,\beta\,Sin\,\gamma\end{array}}$$

Maar nu is $Cos(\alpha + \beta + \gamma) = Cos\,\alpha\,Cos\,\beta\,Cos\,\gamma - Cos\,\alpha\,Sin\,\beta\,Sin\,\gamma - Cos\,\beta\,Sin\,\alpha\,Sin\,\gamma - Cos\,\gamma\,Sin\,\alpha\,Sin\,\beta = 1$
en $Sin(\alpha + \beta + \gamma) = Sin\,\beta\,Cos\,\alpha\,Cos\,\gamma + Sin\,\alpha\,Cos\,\beta\,Cos\,\gamma + Sin\,\gamma\,Cos\,\alpha\,Cos\,\beta - Sin\,\alpha\,Sin\,\beta\,Sin\,\gamma = 0$,
daardoor wordt dan

$$Cot(\delta+\delta_1+\delta_2) = \frac{Cot^6\tfrac{1}{2}r + Cot^4\tfrac{1}{2}r[Cos\,\alpha + Cos\,\beta + Cos(\alpha+\beta)] + Cot^2\tfrac{1}{2}r[Cos\,\alpha + Cos\,\beta + Cos(\alpha+\beta)] + 1}{Cot^4\tfrac{1}{2}r[Sin\,\alpha + Sin\,\beta - Sin(\alpha+\beta)] - Cot^2\tfrac{1}{2}r[Sin\,\alpha + Sin\,\beta - Sin(\alpha+\beta)]},$$

waarin $Cos\,\gamma$ door $Cos\{360^\circ - \alpha - \beta) = Cos(\alpha+\beta)$ en $Sin\,\gamma$ door $Sin(360 - \alpha - \beta) = -Sin(\alpha+\beta)$ is vervangen. Men kan derhalve schrijven

$$Cot(\delta + \delta_1 + \delta_2) = \frac{Cot^6\tfrac{1}{2}r + Cot^2\tfrac{1}{2}r(1 + Cot^2\tfrac{1}{2}r)\{Cos\,\alpha + Cos\,\beta + Cos(\alpha+\beta)\} + 1}{Cot^2\tfrac{1}{2}r(Cot^2\tfrac{1}{2}r - 1)\{Sin\,\alpha + Sin\,\beta + Sin(\alpha+\beta)\}}$$

of wel

$$Cot(\delta + \delta_1 + \delta_2) = \frac{\tfrac{1}{2}Cot^3\tfrac{1}{2}r + \dfrac{1 + Cot^2\tfrac{1}{2}r}{2\,Cot\tfrac{1}{2}r}\{Cos\,\alpha + Cos\,\beta + Cos(\alpha+\beta)\} + \dfrac{1}{2\,Cot^2\tfrac{1}{2}r}}{\dfrac{Cot^2\tfrac{1}{2}r - 1}{2Cot\tfrac{1}{2}r}\{Sin\,\alpha + Sin\,\beta - Sin(\alpha+\beta)\}} =$$

Digitized by Google

$$= \frac{Cot^2 \tfrac{1}{2}r + tg^2 \tfrac{1}{2}r + 2\, Cosec\, r \left\{ Cos\, \alpha + Cos\, \beta + Cos\, (\alpha + \beta) \right\}}{2\, Cot\, r \left\{ Sin\, \alpha + Sin\, \beta - Sin\, (\alpha + \beta) \right\}},$$

of eindelijk, daar $Cot^2 \tfrac{1}{2}r + tg^2 \tfrac{1}{2}r =$

$$= (Cot\, \tfrac{1}{2}r + tg\, \tfrac{1}{2}r)(Cot^2 \tfrac{1}{2}r - Cot\, \tfrac{1}{2}r\, tg\, \tfrac{1}{2}r + tg^2 \tfrac{1}{2}r) =$$

$$= 2\, Cosec\, r\, (4\, Cot^2\, r + 1) \quad \text{is,}$$

$$Cot(\delta + \delta_1 + \delta_2) = Cot\left(\frac{901}{R^2 \pi}\right) = \frac{4\, Cot^2 r + 1 + Cos\alpha + Cos\beta + Cos(\alpha + \beta)}{Cos\, r \left\{ Sin\, \alpha + Sin\beta - Sin\, (\alpha + \beta) \right\}}.$$

CXLII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

In dezelfde gegevens van het vorig voorstel verlangt men den inhoud van het zesvlakkige lichaam uittedrukken, waarvan de koorden des driehoeks en die, welke uit de beide polen des omschreven cirkels naar de hoekpunten kunnen worden getrokken, de ribben zijn.

Opgelost *door* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Zij r de spherische straal, r_1 de werkelijke straal des omschreven cirkels van den bolvormigen driehoek ABC, welks zijden a, b en c en hoek $BOC = \alpha$, hoek $AOC = \beta$ en hoek $AOB = \gamma = 360° - \alpha - \beta$ zijn. Noemen wij voorts den inhoud van den vlakken driehoek, die door de koorden gevormd wordt I, dan is

$$I = \frac{AB \times BC \times AC}{4r_1},$$

of wel, daar

$$AB = \frac{Sin\, C}{Sin\, A} \times BC$$

en

$$AC = \frac{Sin\, B}{Sin\, A} \times BC \text{ is,}$$

$$I = \frac{Sin\, B\, Sin\, C}{4r_1\, Sin^2\, A} \times BC^2, \text{ of eindelijk, } r_1 = \frac{BC}{2\, Sin\, A}$$

zijnde,

$$I = \frac{Sin\, B\, Sin\, C}{2\, Sin\, A} \times BC^2 \ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

waarin A, B en C de hoeken des vlakken driehoeks beteekenen. Maar nu is

$Sin A = Sin \tfrac{1}{2}\alpha$, $Sin B = Sin \tfrac{1}{2}\beta$, $Sin C = Sin \tfrac{1}{2}\gamma = + Sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$, dewijl A en $\tfrac{1}{2}\alpha$, B en $\tfrac{1}{2}\beta$ en C en $\tfrac{1}{2}\gamma$ door denzelfden boog des kleinen cirkels gemeten worden. Bovendien is nog $BC = 2R\, Sin \tfrac{1}{2}a$ of daar $Sin \tfrac{1}{2}a = Sin r\, Sin \tfrac{1}{2}\alpha$ is, $BC = 2R\, Sin r\, Sin \tfrac{1}{2}\alpha$.

Daardoor wordt (a)

$$I = 2R^2\, Sin\, \tfrac{1}{2}\alpha\, Sin\, \tfrac{1}{2}\beta\, Sin\, \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\, Sin^2 r \ldots \text{(b)}$$

Digitized by Google

Voorts is

$$r_1 = \frac{BC}{2\,Sin\,A} = \frac{2R\,Sin\,r\,Sin\,\frac{1}{2}\alpha}{2\,Sin\,\frac{1}{2}\alpha} = R\,Sin\,r \text{ en } BO = 2R\,Sin\tfrac{1}{2}r.$$

Noemen wij nu het middelpunt des cirkels P en dan $OP = h$ en $O_1P = h_1$, zoodat $h_1 = 2R - h$ is, dan wordt

$$h = \sqrt{(BO^2 - r_1^2)} = R\,(1 - Cos\,r) \text{ en } h_1 = R\,(1 + Cos\,r).$$

Voor den inhoud van de eene pyramide verkrijgen wij alzoo

$$I_1 = \tfrac{1}{3}hI = \tfrac{2}{3}R^3\,(1 - Cos\,r)\,Sin^2 r\,Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin\,\tfrac{1}{2}\beta\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

en voor dien van de andere

$$I_2 = \tfrac{1}{3}h_1 I = \tfrac{2}{3}R^3\,(1 + Cos\,r)\,Sin^2 r\,Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin\,\tfrac{1}{2}\beta\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Eindelijk is derhalve de inhoud van het geheele lichaam

$$I_2 + I_1 = \tfrac{4}{3}R^3\,Sin^2 r\,Sin\,\tfrac{1}{2}\alpha\,Sin\,\tfrac{1}{2}\beta\,Sin\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

CXLIII. Voorstel.

Door J. W. Tesch.

De differentiaal-vergelijking

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + \frac{dP}{dx}y = 0,$$

waarin P eene functie is van x, te integreren.

Opgelost *door* G. Schouten, J. W. Tesch *en* A. Eegen.

Oplossing *van* G. Schouten.

In plaats van de opgegeven vergelijking kunnen we schrijven:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dPy}{dx} = 0,$$

waarvan de integraal is $\frac{dy}{dx} + Py + C = 0$ . . . . . (1)

Deze kan op de volgende wijzen geïntegreerd worden:

1°. Men ziet onmiddelijk, dat er een integreerende factor onafhankelijk van y bestaat, daar

$$\frac{d(Py + C)}{dy} = P \quad \text{en} \quad \frac{dl}{dx} = 0 \quad \text{is;}$$

noemen we χ dien factor, dan moet

$$\frac{d\chi}{\chi} = Pdx$$

zijn, dus $\chi = e^{\int Pdx}$.

De vergelijking (1) met dezen factor vermenigvuldigd, geeft

$$e^{\int Pdx}dy + (Py + C)\,e^{\int Pdx}dx = 0,$$

of ook $d\,(e^{\int Pdx}y) + Cd\{\int e^{\int Pdx}\} = 0,$

waaruit onmiddellijk volgt

Digitized by Google

$$ye^{\int Pdx} + C\int e^{\int Pdx}dx + C' = 0,$$

welke de gevraagde integraal-vergelijking is.

2°. Stelt men in (1) voor y het produkt van twee nieuwe veranderlijken u en v, dan komt er

$$\frac{d.uv}{dx} + Puv + C = 0$$

of ook: $$\left(u\frac{dv}{dx} + C\right) + \left(\frac{du}{dx} + Pu\right)v = 0.$$

Aan deze vergelijking zal voldaan worden door

$$u\frac{dv}{dx} + C = 0$$

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0$$

te stellen, zoodat we twee vergelijkingen verkrijgen ter bepaling van u en v.

De laatste van deze geeft

$$\frac{du}{u} = -Pdx$$

$$u = C_1 e^{-\int Pdx},$$

zoodat de eerste nu geeft $dv = -\frac{C}{C_1}e^{\int Pdx}dx$

$$v = -\frac{C}{C_1}\int e^{\int Pdx}dx + C_2,$$

waardoor $y = u \times v = e^{-\int Pdx}\left\{-C\int e^{\int Pdx}dx + C'\right\}$ wordt, als $C_1C_2 = C'$ gesteld wordt.

CXLIV. Voorstel.

Door A. Rutgers.

Wordt gevraagd de differentiaal-vergelijking

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{\left[a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]}$$

te integreren.

Opgelost *door* A. Rutgers *en* G. Schouten.

Oplossing *van* A. Rutgers.

Stelt men $\frac{dy}{dx} = p$, dan wordt $\frac{d^2y}{d^2x} = p\frac{dp}{dy}$, en de differentiaal-vergelijking gaat over in

$$p\left\{p - y\frac{dp}{dy} - \sqrt{a^2 + b^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2}\right\} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Digitized by Google

waaraan voldaan wordt door $p = 0$ . . . . . (2)

$$\text{en} \quad p - y\frac{dp}{dy} - \sqrt{a^2 + b^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2} = 0 \ldots . \quad (3)$$

Uit (2) volgt door integratie

$$y = C, \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

welke vergelijking eene bijzondere oplossing der differentiaal-vergelijking voorstelt, daar de waarden van het derde en al de hoogere differentiaal-quotienten uit haar afgeleid, steeds voldoen aan de differentiaal-vergelijking zelve.

Differentieert men (3) ten opzichte van y, dan komt er

$$\frac{d^2p}{dy^2}\left\{y + b^2\frac{\frac{dp}{dy}}{\sqrt{a^2 + b^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2}}\right\} = 0, \quad (5)$$

waaraan voldaan wordt door

$$\frac{d^2p}{dy^2} = 0, \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\text{en} \qquad y + b^2\frac{\frac{dp}{dy}}{\sqrt{a^2 + b^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2}} = 0 \ldots . \quad (7)$$

Uit (6) verkrijgt men door integratie

$$\frac{dp}{dy} = C \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

en hieruit op dezelfde wijze

$$p = Cy + C' \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Substituteert men de waarde van p en $\frac{dp}{dy}$ uit (9) en (8) in (3), dan vindt men

$$C' = \sqrt{a^2 + b^2C^2};$$

zoodat (9) hierdoor overgaat in

$$p = \frac{dy}{dx} = Cy + \sqrt{a^2 + b^2C^2} \ldots . \quad (10)$$

Integreert men deze, dan verkrijgt men tot algemeene integraal der differentiaal-vergelijking

$$Cx + C' = l(Cy + \sqrt{a^2 + b^2C^2}). \ldots \quad (11)$$

Door oplossing van $\frac{dp}{dy}$ uit (7) en door substitutie der ver-

Digitized by Google

kregen waarde in (3) wordt nog verkregen

$$p = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

of

$$\frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{a}{b}dx,$$

en nu door integratie

$$Bg\ Sin\frac{y}{b} = \frac{a}{b}x + C''$$

of

$$y = b\ Sin\frac{ax + C''}{b} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (12)$$

Daar deze vergelijking, zooals lichtelijk is na te gaan, wel aan de differentiaal-vergelijking, maar niet aan (11) voldoet, zoo is zij óf eene bijzondere oplossing óf eene afzonderlijke oplossing der *eerste* orde.

Past men hier toe, wat bij (4) gezegd is, zoo bevindt men, dat het derde differentiaal-quotient uit (12) afgeleid, niet meer voldoet aan de differentiaal-vergelijking of met andere woorden, niet meer overeen komt met de waarde die de laatste, na differentiatie voor $\frac{d^3y}{dx^3}$, oplevert.

Uit (12) leidt men af

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{a^3}{b^2}\ Cos\frac{ax + C''}{b},$$

terwijl de differentiaal-vergelijking geeft $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$.

De vergelijking (12) is dus eene afzonderlijke oplossing van de eerste orde.

Men kan dit ook op eene andere wijze aantoonen. Elimineert men y tusschen (11) en (12), dan komt er

$$Cx + C' = l\left\{bC\ Sin\frac{ax + C''}{b} + \sqrt{a^2 + b^2C^2}\right\} \quad . \ (13)$$

Differentieert men nu (12) en elimineert men vervolgens y en $\frac{dy}{dx}$ tusschen de verkregene en (11) en (12), zoo wordt

$$Cx + C' = l\left(a\ Cos\frac{ax + C''}{b}\right). \ . \ . \ . \ . \ (14)$$

Daar de eliminatie van C of van C' tusschen (13) en (14) twee vergelijkingen geeft, waarin x, C_x en C' of C voor-

Digitized by Google

komen, zoo zal ook de eliminatie van C_3 tusschen deze vergelijkingen eene vergelijking moeten opleveren, waarin x voorkomt. Hieruit volgt dat elk der constanten C en C' eene functie van x is, zoodat het niet mogelijk is, de vergelijking (12) voor eene bijzondere, maar van x onafhankelijke, waarde van C of C' uit (11) af te leiden.

De verg. (12) kan dus geene bijzondere oplossing zijn; zij moet bijgevolg eene afzonderlijke oplossing zijn, en wel van de *eerste* orde, omdat zij eene willekeurige constante bevat.

Aanm. Neemt men in (3) y tot onafhankelijk en p tot afhankelijk veranderlijke aan, dan is deze vergelijking de differentiaal-vergelijking van eene ellips.

Door eliminatie van $\frac{dp}{dy}$ tusschen (7) en (3) verkrijgt men nl.

$$p = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

waaruit $$b^2p^2 = a^2b^2 - a^2y^2,$$
of $$b^2p^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
en na deeling door a^2b^2

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Deze vergelijking is de middelpunts-verg. van eene ellips, hebbende tot halve assen a en b. Zij is de afzonderlijke oplossing van (3), terwijl (10) de algemeene integraal voorstelt.

CXLV. Voorstel.

Door D. J. Korteweg.

Van een drievlakkigen hoek, wiens ribben allen loodrecht op elkander staan, zijn gegeven: 1°. *de horizontale projectiën van twee ribben,* 2°. *de hoek, dien de derde ribbe met het horizontale vlak maakt; men verlangt de projectie te voltooijen.*

Opgelost *door* C. de Haas Jbz. *en* D. J. Korteweg.

Oplossing *van* C. de Haas Jbz.

Laten a_2b_2 en c_2d_2 (zie fig. 49) de hor. projectiën zijn; en P de gegevene hoek. Vooreerst dient opgemerkt te worden dat, als twee paar elkaar loodrecht snijdende lijnen geprojecteerd worden, van de vier rechte hoeken twee als stomp geprojecteerd worden; namelijk de hoek wiens beenen het projectievlak snijden, en de over dezen staande hoek. Men kan dus

Digitized by Google

aannemen dat van den hoek $d_2g_2b_2$ de beenen het hor. vlak snijden. Men kan, daar de vert. proj. niet gegeven is, de afstand dezer snijpunten willekeurig aannemen. Zij AB (zie fig. 50) die afstand. Nu beschrijft men op AB een halven cirkel ADB, en een segment ACB dat den hoek $d_2g_2b_2$ bevat; waarbij de boog van het segment tot een halven cirkel wordt verlengd; zoodat EF//AB is.

P is de hoek dien de derde ribbe maakt met het hor. vlak. Zijn complement abc is dus de hoek dien het vlak van $\angle d_2g_2b_2$ met dit vlak maakt; en de verhouding $\frac{p}{q}$ van de afstanden van den doorgang dezer beide vlakken tot het hoekpunt g, en zijne hor. proj. g_2, wordt gevonden door ac loodrecht te trekken op ab; men heeft: $\frac{p}{q} = \frac{bc}{ab}$. Zij nu AB die doorgang. Trekt men hierop loodrecht IK, dan is

$$\angle AKB = 90^\circ \quad \text{en} \quad \angle ALB = \angle b_2g_2d_2;$$

was nu $IL : IK = q : p$, dan zou $\angle AKB$ om AB draaiende, een hoek abc moeten doorloopen, om als ALB geprojecteerd te worden. Men moet dus $IK = y$ zoodanig bepalen dat $LI = \frac{q}{p}y$ is.

Daar nu $IH^2 = KH^2 - KI^2 = LG^2 - LM^2$ is, zoo moet y opgelost worden uit

$$r^2 - y^2 = R^2 - \left(\frac{q}{p}y + a\right)^2;$$

waarin $KM = r$, $LG = R$ en $HG = a$ gesteld is. Deze verg. wordt, na ontwikkeling en rangschikking:

$$y^2(p^2 - q^2) - 2apqy = p^2a^2 - p^2(R^2 - r^2).$$

Maar $R^2 - r^2 = a^2$; dus $y^2(p^2 - q^2) = 2apqy$, waaruit volgt:

$$y = 0 \quad \text{en} \quad y = \frac{2apq}{p^2 - q^2}.$$

Men kan hieruit y construeren, en dus de plaats van IK bepalen. Maakt men nu $g_2O = AL$ en $g_2R = BL$, dan is OR de hor. doorgang van het vlak van den hoek $d_2g_2b_2$ (De vert. proj. van g_2 niet gegeven zijnde, weet men alleen dat OR evenwijdig is aan dien doorgang).

De derde ribbe zal geprojecteerd worden in de lijn e_2f_2, loodrecht staande op OR.

Digitized by Google

De waarde $y = 0$ voldoet niet aan de vraag; want voor $y = 0$ valt KB langs AB, en in dit geval wordt de rechte hoek altijd als rechte hoek geprojecteerd. Door op g_2d_2 de lengte LB, en op g_2b_2 de lijn AL uit te zetten, krijgt men eene tweede projectie voor de derde ribbe. Eindelijk kan men aannemen dat de beenen van den hoek $a_2g_2c_2$ het hor. vlak snijden. Er zijn dus twee verschillende projecties en vier verschillende standen van de derde ribbe mogelijk.

CXLVI. VOORSTEL.

Door D. J. KORTEWEG.

Volgens de methoden der lagere meetkunde te bewijzen, dat indien men twee cirkels zoodanig laat bewegen, dat zij voortdurend blijven raken aan de lijnen OA, OB, OC *en* OD (*waarbij natuurlijk de stralen veranderlijk zijn*), *het snijpunt der gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen eene rechte lijn beschrijft, gaande door het punt* O.

OPGELOST *door* D. J. KORTEWEG *en* C. LELY.

OPLOSSING *van* D. J. KORTEWEG.

Zie fig. 51. Beide cirkels a en b denken wij ons in de figuur geheel willekeurig aangebracht. Wanneer dan eene verplaatsing van één van beide het punt P doet blijven op de lijn OP, dan zullen wij, door ieder der cirkels beurtelings te verplaatsen, alle willekeurige standen van beide cirkels kunnen verkrijgen, zonder dat het snijpunt der gemeenschappelijke raaklijnen de rechte OP verlaten heeft. Wij behoeven dus slechts te bewijzen, dat, indien een der cirkels a vervangen wordt door een willekeurige andere cirkel a_1, rakende aan dezelfde lijnen, het nieuwe snijpunt P_1 met het oude P en met het punt O in eene rechte lijn gelegen is.

Wij trekken daartoe door P een willekeurige snijlijn PmM en daarna door M en P_1 de snijlijn Mm_1P_1. Wanneer nu q en Q raakpunten zijn van de gemeenschappelijke raaklijn aan de cirkels a en b, dan zijn de rechthoekige driehoeken Paq en PbQ gelijkvormig; daaruit volgt:

$$\frac{Pa}{Pb} = \frac{aq}{bQ} = \frac{am}{bM}.$$

De driehoeken aPm en b_1PM hebben dus twee zijden evenredig, den hoek over een dier zijden gelijk, en den anderen overstaanden hoek van dezelfde soort. Zij zijn gelijkvormig.

Digitized by Google

Daaruit volgt: $\angle Pam = \angle PbM$, of:

$$am // bM.$$

Evenzeer is: $bM // a_1m_1$,

dus: $am // bM // a_1m_1$.

Ten einde nu te onderzoeken of de punten O, P en P_1 in één rechte gelegen zijn, beschouwen wij OP als transversaal van den driehoek aa_1b. P_1 zal het snijpunt dier transversaal met de derde zijde zijn indien:

$$\frac{bP}{aP} \times \frac{Oa}{Oa_1} \times \frac{P_1a_1}{P_1b_1} = 1.$$

Nu is $\frac{bP}{aP} = \frac{bM}{aM}$, $\frac{Oa}{Oa_1} = \frac{am}{a_1m_1}$, $\frac{P_1a_1}{P_1b_1} = \frac{a_1m_1}{bM}$;

zoodat aan bovenstaande betrekking voldaan is, en derhalve het gestelde bewezen.

CXLVII. Voorstel. (*)

Door L. van Zanten Jzn.

Van een homogenen rechten kegel, wiens hoogte h, is door een vlak evenwijdig aan het grondvlak, een kegel, wiens hoogte h', afgesneden en de afgeknotte kegel is door een vlak dat door de as gaat gedeeld. Welke betrekking moet er tusschen h en h' bestaan, opdat de halve afgeknotte kegel op zijn kleinste grondvlak kunne staan?

Opgelost *door* L. van Zanten Jzn., G. Schouten, A. Eecen *en* C. Lely.

Oplossing *van* G. Schouten.

Laten R en r de stralen zijn van de beide grondvlakken en ρ die eener doorsnede op den afstand p van een dier vlakken; is dan x de afstand van het zwaartepunt tot het vlakke zijvlak, dan is het moment van het lichaam ten opzichte van dit vlak $\frac{1}{2}\pi(r^2 + rR + R^2).\frac{1}{3}(h - h')x$;
dat eener doorsnede van de dikte dp, natuurlijk

$$\tfrac{1}{2}\pi\rho^2.dp.\frac{2\rho}{\pi} \text{ of } \rho^3 dp;$$

x wordt dus gegeven door:

$$\int_0^{h-h'} \rho^3 dp = \frac{\pi}{6}(h - h')(r^2 + rR + R^2)x.$$

(*) Dit en de twee volgende Voorstellen ontleend aan Jullien, *Probl. de Méeanique*.

Digitized by Google

Daar nu ρ voorgesteld kan worden door $R\left(1-\frac{p}{h}\right)$, en $\frac{r}{R}=\frac{h'}{h}$ is, zoo wordt deze vergelijking:

$$\int_0^{h-h'}\left(1-\frac{p}{h}\right)^2 dp=\frac{\pi}{6}\frac{h-h'}{R}\left(1+\frac{h'}{h}+\left(\frac{h'}{h}\right)^2\right).x$$

of $1-\frac{p}{h}=y$ stellende:

$$-h\int_1^{\frac{h'}{h}} y^2 dy=\frac{\pi}{6}.\frac{h-h'}{R}.\left(1+\frac{h'}{h}+\left(\frac{h'}{h}\right)^2\right).x,$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$\frac{h}{4}.\left(1-\left(\frac{h'}{h}\right)^4\right)=\frac{\pi}{6}\frac{h}{R}\left(1-\left(\frac{h'}{h}\right)^3\right).x$$

of

$$x=\frac{3}{2\pi}R.\frac{1-\left(\frac{h'}{h}\right)^4}{1-\left(\frac{h'}{h}\right)^3}.$$

Zal de kegel in evenwicht blijven, dan moet

$x \leqq r$ zijn, dus

$$\frac{x}{r}\leqq 1$$

$$\frac{3}{2\pi}.\frac{1-\left(\frac{h'}{h}\right)^4}{1-\left(\frac{h'}{h}\right)^3}\leqq\frac{r}{R}$$

$$\frac{3}{2\pi}.\frac{1-\left(\frac{h'}{h}\right)^4}{1-\left(\frac{h'}{h}\right)^3}\leqq\frac{h'}{h}$$

of ook: $$\left(\frac{h'}{h}\right)^3+\left(\frac{h'}{h}\right)^2+\frac{h'}{h}\geqq\frac{3}{2\pi-3},$$

welke vergelijking de gevraagde betrekking geeft.

CXLVIII. VOORSTEL.

Door L. VAN ZANTEN JZ.

Een zwaar punt is in eene homogene middenstof geplaatst, wier tegenstand evenredig is aan de tweede macht der snelheid. Als het zware punt t tijdseenheden moet vallen om de snelheid

Digitized by Google

p te verkrijgen, daarentegen t_1 tijdseenheden vertikaal moet rijzen, om de aanvangs-snelheid p te verliezen, vraagt men de betrekking tusschen t en t_1.

OPGELOST *door* L. VAN ZANTEN JZ., G. SCHOUTEN *en* A. EECEN.

OPLOSSING *van* L. VAN ZANTEN JZ.

Als k de tegenstand der middenstof is voor de eenheid van snelheid, vindt men: $\frac{dv}{dt} = g - kv^2$ . . . . . (A)

$$\frac{dv}{g - kv^2} = dt,$$

stel hierin $kv^2 = gx^2$, $dv = dx\sqrt{\frac{g}{k}}$, dan is

$$\frac{1}{\sqrt{gk}}\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\int\left(\frac{dx}{1-x} + \frac{dx}{1+x}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{gk}}\, l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\, l\,\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{k}}{\sqrt{g}-v\sqrt{k}} = t + C.$$

Voor $t = 0$ moet $v = 0$ zijn, dus $C = 0$, derhalve:

$$\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{k}}{\sqrt{g}-v\sqrt{k}} = e^{2t\sqrt{gk}}, \quad v = p, \ldots\ldots (1)$$

dan is:

$$p = \frac{e^{2t\sqrt{gk}} - 1}{e^{2t\sqrt{gk}} + 1}\sqrt{\frac{g}{k}} \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv^2 \ldots\ldots (B)$$

$$\frac{dv}{g + kv^2} = -dt,$$

weder $kv^2 = gx^2$, dan is:

$$\frac{1}{\sqrt{gk}}\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{gk}}B(tang = x) = \frac{1}{\sqrt{gk}}B\left(tang = v\sqrt{\frac{k}{g}}\right) = C - t$$

$$v\sqrt{\frac{k}{g}} = tang\,(C - t)\sqrt{gk}.$$

Voor $t = 0$ moet $v = p$, voor $t = t_1$ moet $v = 0$ zijn, dus $C = t_1$, en

$$p\sqrt{\frac{k}{g}} = tang\, t_1\sqrt{gk}, \quad p = tang\,(t_1\sqrt{gk})\sqrt{\frac{g}{k}} \ldots (3)$$

Uit (2) en (3) volgt $\frac{e^{2t\sqrt{gk}} - 1}{e^{2t\sqrt{gk}} + 1} = tang\,(t_1\sqrt{gk})$, dus

$$e^{2t\sqrt{gk}} = \frac{1 + tang\,(t_1\sqrt{gk})}{1 - tang\,(t_1\sqrt{gk})} = tang\left(\frac{\pi}{4} + t_1\sqrt{gk}\right)$$

Digitized by Google

$$2t\sqrt{gk} = l\,tang\left(\frac{\pi}{4} + t_1\sqrt{gh}\right).$$

CXLIX. VOORSTEL.

Door L. VAN ZANTEN JZ.

Twee zware punten zijn op dezelfde vertikaal geplaatst in eene middenstof, wier tegenstand evenredig is aan de snelheid. Op 't zelfde oogenblik laat men het bovenste vallen en werpt het onderste omhoog met een gegeven snelheid. Vrage naar den tijd, die er verloopt totdat zij elkander ontmoeten.

OPGELOST *door* G. SCHOUTEN, A. EEGEN *en* L. VAN ZANTEN JZ.

OPLOSSING *van* G. SCHOUTEN.

Stel dat het punt met de snelheid v_0 naar boven wordt geworpen, en zich T secunden moet bewegen, eer het in botsing komt met het tweede punt; als dan μ de wederstand is van de middenstof bij de eenheid van snelheid, dan is

$$\frac{dv}{dt} = -g - \mu v,$$

waaruit $$t = \int_{v}^{v_0} \frac{dv}{g + \mu v} = \frac{1}{\mu} l \frac{g + \mu v_0}{g + \mu v}.$$

Hieruit v opgelost, geeft:

$$v = \frac{1}{\mu}\left\{-g + (g + \mu v_0)\, e^{-\mu t}\right\};$$

v zal nul worden, als de tijd van beweging t_1 voldoet aan:

$$e^{-\mu t_1} = \frac{g}{g + \mu v_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Daar $v = \frac{dx}{dt}$ is, geeft de voorgaande vergelijking:

$$dx = \frac{1}{\mu}\left\{-g + (g + \mu v_0)\, e^{-\mu t}\right\} dt,$$

$$x = \frac{1}{\mu^2}\left\{-\mu g t + (g + \mu v_0)(1 - e^{-\mu t})\right\}; \quad (2)$$

stellen we hierin voor t de waarde t_1, dan kan het punt stijgen tot de hoogte h, die gegeven wordt door

$$h = \frac{1}{\mu^2}\left\{g l \frac{g}{g + \mu v_0} + \mu v_0\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

In geval T grooter mocht zijn dan t_1, dan zal ook het punt nog gaan dalen gedurende den tijd $T - t_1$; berekenen we dus den weg, in zekeren tijd t naar beneden afgelegd

Digitized by Google

zonder aanvangsnelheid; dan is

$$\frac{dv}{dt} = g - \mu v$$

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g - \mu v} = \frac{1}{\mu} l \frac{g}{g - \mu v};$$

waaruit $$v = \frac{g}{\mu}(1 - e^{-\mu t});$$

verder $$ds = \frac{g}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\, dt$$

$$s = \frac{g}{\mu}\left(t - \frac{1 - e^{-\mu t}}{\mu}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Stellen we nu hierin voor t de waarde $T - t_1$, dan komt

$$s = \frac{g}{\mu}\left(T - t_1 - \frac{1}{\mu} + \frac{e^{-\mu T}}{\mu} e^{\mu t_1}\right),$$

of, met het oog op (1):

$$s = \frac{1}{\mu^2}\left\{\mu g T - g(1 - e^{-\mu T}) + g l \frac{g}{g + \mu v_0} + \mu v_0 e^{-\mu T}\right\},$$

trekken we deze waarde van h af, dan vinden we voor den afstand s_1, dien het punt na verloop van T secunden bereikt heeft van het punt van uitgang:

$$x_1 = h - s = \frac{1}{\mu^2}\left\{-\mu g T + (g + \mu v_0)(1 - e^{-\mu T})\right\}. (5)$$

dezelfde formule als (2), waarin $t < t_1$ is; de weg wordt dus door formule (5) *algemeen* voorgesteld.

In den zelfden tijd T is het bovenste punt gevallen over een weg x_2, die gegeven wordt door (4):

$$s_2 = \frac{1}{\mu^2}\left\{\mu g T - g(1 - e^{-\mu t})\right\}$$

en daar op het oogenblik van botsing $s_1 + s_2 =$ de oorspronkelijke afstand a moet zijn tusschen die punten, zoo is:

$$a = \frac{1}{\mu^2} \times \mu v_0 (1 - e^{-\mu T}),$$

waaruit: $$e^{-\mu T} = 1 - \frac{\mu a}{v_0}$$

$$T = \frac{1}{\mu} l \frac{v_0}{v_0 - \mu a},$$

welke formule dus in alle gevallen den tijd voorstelt, die er verloopen moet om in botsing te komen.

Digitized by Google

GEVOLGEN. 1. Wordt $\mu = 0$, dan wordt

$$T = l\left(1 - \frac{\mu a}{v^0}\right)^{-\frac{1}{\mu}} = l\left\{\left(1 - \frac{\mu a}{v_0}\right)^{-\frac{1}{\frac{\mu a}{v_0}}}\right\}^{\frac{a}{v_0}} = l e^{\frac{a}{v_0}} = \frac{a}{v_0};$$

wat men ook onmiddellijk zou gevonden hebben, als men geen weerstand van een middenstof had aangenomen.

2. Is $$v_0 - \mu a > 0; \text{ of}$$

$$a < \frac{v_0}{\mu},$$

dan is T eindig;

voor $$a = \frac{v_0}{\mu}$$

en $$a > \frac{v_0}{\mu}$$

wordt T onmogelijk.

CL. VOORSTEL.

Door J. W. TESCH.

De vergelijking op te maken van het oppervlak, dat alle bollen, die door den oorsprong gaan en hunne middelpunten in de as hebben, rechthoekig snijdt.

OPGELOST *door* J. W. TESCH.

OPLOSSING *van* J. W. TESCH.

Stellen wij de vergelijking van den bol:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

of $$F(x, y, z) = x^2 - 2ax + y^2 + z^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wanneer wij de gevraagde vergelijking voorstellen door $f(x, y, z) = 0$, moet om aan het gestelde te voldoen:

$$\frac{dF}{dx}.\frac{df}{dx} + \frac{dF}{dy}.\frac{df}{dy} + \frac{dF}{dz}.\frac{df}{dz} = 0 \text{ zijn}, \quad . \quad . \quad (2)$$

maar $\frac{dF}{dx} = 2x - 2a$, $\frac{dF}{dy} = 2y$ en $\frac{dF}{dz} = 2z$; terwijl wij

voor $-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} = \frac{dz}{dx}\, p$ en voor $-\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}} = \frac{dz}{dy}\, q$ schrijven.

Dit alles in (2) substituerende, verkrijgt men:

$$(2x - 2a)p + 2yq - 2z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Maar volgens (1) is $2a = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}$.

Digitized by Google

Na substitutie in (3):

$$(y^2+z^2-x^2)\,p-2xyq+2xz=0.$$

Het komt er dus op aan, de laatste vergelijking te integreren.

Op de bekende wijze handelende, schrijve men:

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2}=\frac{dy}{-2xy}=\frac{dz}{-2xz}\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

Hieruit leidt men af $\frac{dy}{-2xy}=\frac{dz}{-2xz}$ of $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$

$$ly=lcz$$

$$\frac{y}{z}=\alpha\;.\;.\;(1)$$

Maar voor (a) mag men schrijven:

$$\frac{xdx}{x(y^2+z^2-x^2)}=\frac{ydy}{-2xy^2}=\frac{zdz}{-2xz^2}=\frac{xdx+ydy+zdz}{-x(x^2+y^2+z^2)}.$$

Men mag hieruit dus afleiden:

$$\frac{dz}{-2xz}=\frac{xdx+ydy+zdz}{-x(x^2+y^2+z^2)}$$

of

$$\frac{d.(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{z}$$

$$l.(x^2+y^2+z^2)=l.c'z$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{z}=\beta.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Uit (1) en (2) volgt nu, dat de vergelijking van het gevraagde oppervlak zal zijn: $\frac{x^2+y^2+z^2}{z}=\phi\left(\frac{y}{z}\right)$

of

$$x^2+y^2+z^2=z\phi\left(\frac{y}{z}\right).$$

CLI. Voorstel.

Door G. Schouten.

De meetkundige plaats van zoodanige punten, dat de som van de lengten der normalen naar eene zelfde kromme of meerdere krommen getrokken standvastig is, heeft tot raaklijn eene lijn, die met de normalen, welke in het raakpunt samenkomen, hoeken maakt, waarvan de cosinussen eene som gelijk aan nul geven.

Opgelost *door* G. Schouten.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* G. SCHOUTEN.

Zij P een punt der meetkundige plaats, en t, u, v zijne coördinaten. Zij het aantal normalen, uit dit op de gegeven krommen neergelaten n, en de coördinaten der voetpunten $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, ... $x_n\, y_n\, z_n$. Dan moeten de normaalvlakken der gegeven krommen in die punten alle door het punt P gaan. De vergelijkingen dier normaalvlakken zijn:

$$\left.\begin{array}{l}(t-x_1)\,dx_1+(u-y_1)\,dy_1+(v-z_1)\,dz_1=0,\\(t-x_2)\,dx_2+(u-y_2)\,dy_2+(v-z_2)\,dz_2=0,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(t-x_n)\,dx_n+(u-y_n)\,dy_n+(v-z_n)\,dz_n=0.\end{array}\right\}\quad(1)$$

De voorwaarde van het vraagstuk geeft:

$$\sqrt{(t-x_1)^2+(u-y_1)^2+(v-z_1)^2}+\sqrt{(t-x_2)^2+(u-y_2)^2+(v-z_2)^2}$$
$$+\ldots\ldots+\sqrt{(t-x_n)^2+(u-y_n)^2+(v-z_n)^2}=C,$$

waarin C een constante voorstelt.

Stellen we gemakshalve elk der wortelsvormen door r_1, r_2, r_3 . . . . r_n voor, dan is.

$$r_1+r_2+\ldots+r_n=C.\ldots\ldots\quad(2)$$

Deze gedifferentieerd geeft:

$$\frac{(t-x_1)(dt-dx_1)+(u-y_1)(du-dy_1)+(v-z_1)(dv-dz_1)}{r_1}+\ldots$$
$$+\frac{(t-x_n)(dt-dx_n)+(u-y_n)(dt-dy_n)+(v-z_n)(dv-dz_n)}{r_n}=0,$$

of de vergelijkingen (1) in acht nemende,

$$\left(\frac{t-x_1}{r_1}\,dt+\frac{u-y_1}{r_1}\,du+\frac{v-z_1}{r_1}\,dv\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{t-x_n}{r_n}\,dt+\frac{u-y_n}{r_n}\,dx+\frac{v-z_n}{r_n}\,dv\right)=0.\ldots\quad(3)$$

Nemen we nu de richtingen van de lijnen r_1, r_2, ... r_n naar het punt P, dan stellen

$$\frac{t-x_p}{r_p},\quad\frac{u-y_p}{r_p},\quad\frac{v-z_p}{r_p}$$

de cosinussen voor der hoeken, die r_p maakt met de coördinaat-assen, welke hoeken wij α_p, β_p, γ_p, zullen noemen; de vergelijking (3) wordt dus

$$(Cos\,\alpha_1 dt+Cos\,\beta_1 du+Cos\,\gamma_1 dv)+\ldots\ldots$$
$$+(Cos\,\alpha_n dt+Cos\,\beta_n du+Cos\,\gamma_n dv)=0,$$

of korter

Digitized by Google

$$\sum_1^n (Cos\, \alpha_p . dt + Cos\, \beta_p . du + Cos\, \gamma_p\, dv) = 0.$$

Bedenkt men nu, dat de oneindig kleinen

$$dt,\ du,\ dv$$

evenredig zijn met de cosinussen der hoeken, die de raaklijn aan de meetkundige plaats maakt met de assen, zoo zien we, dat wij hebben $\sum_1^n Cos\, V_p = 0$,

waarin V_p den hoek voorstelt, die r_p met de raaklijn maakt; waardoor de stelling bewezen is.

Aanmerking. Zijn de gegevene krommen in een plat vlak gelegen, dan liggen alle normalen en raaklijnen in het vlak.

Is het aantal normalen, dat aan de vraag voldoet, twee, dan is $Cos\, V_1 + Cos\, V_2 = 0$,

zoodat dan $V_1 + V_2 = \pi$

moet zijn, waaruit volgt, dat de raaklijn het supplement van den hoek der normalen middendoordeelt, bijgevolg, dat de normaal van de meetkundige plaats den hoek tusschen de overeenkomstige normalen middendoordeelt.

Is niet de som, maar het verschil der beide normalen constant, dan zal, zooals lichtelijk blijkt

$$Cos\, V_1 - Cos\, V_2 = 0$$

zijn, zoodat dan de raaklijn den hoek tusschen de overeenkomstige normalen middendoordeelt.

Is eindelijk elk der beide normalen constant, dan volgt uit bovenstaande ontwikkeling, dat

$$Cos\, V_1 = 0$$
$$Cos\, V_2 = 0$$

moet zijn, hetgeen niet anders beteekent, dan dat beide normalen samenvallen, en de raaklijn loodrecht op hare richting moet staan. Dit geval doet zich voor bij den cirkel, bij een stelsel van twee evenwijdige lijnen, etc.

Trekt men eindelijk slechts één normaal, dan moet

$$Cos\, V = 0$$

zijn, derhalve is dan de meetkundige plaats eene kromme, die parallel loopt met de gegevene.

CLII. Voorstel.

Door G. Schouten.

De meetkundige plaats van zoodanige punten, dat de som

der vierkanten van de lengten der normalen, naar eene kromme of meerdere krommen getrokken, standvastig is, heeft in ieder punt tot normaal-vlak een vlak gaande door het middelpunt der gemiddelde afstanden der voetpunten van alle normalen, uit dit punt op de gegevene krommen nedergelaten.

OPGELOST *door* G. SCHOUTEN.

OPLOSSING *van* G. SCHOUTEN.

Zij P een punt van de meetkundige plaats, en zijne coördinaten t, u, v. De voetpunten der loodlijnen, uit P op de gegeven krommen neergelaten, moeten zoodanig gelegen zijn, dat de normaalvlakken van de krommen in die punten door het punt P gaan. Zij het aantal normalen, uit P op de krommen neergelaten, n, en de coördinaten van de voetpunten $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, ..., $x_n\, y_n\, z_n$; dan zijn de vergelijkingen van de normaalvlakken:

$$\left.\begin{array}{l}(t-x_1)\,dx_1+(u-y_1)\,dy_1+(v-z_1)\,dz_1=0,\\(t-x_2)\,dx_2+(u-y_2)\,dy_2+(v-z_2)\,dz_2=0,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\(t-x_n)\,dx_n+(u-y_n)\,dy_n+(v-z_n)\,dz_n=0,\end{array}\right\}\quad(1)$$

welke vlakken allen door het punt P(t, u, v) gaan.

De voorwaarde, in het vraagstuk uitgedrukt, geeft:

$$\sum_1^n (t-x_p)^2+\sum_1^n (u-y_p)^2+\sum_1^n (v-z_p)^2=C,\quad(2)$$

waarin C een constante voorstelt.

De differentiatie van (2) geeft:

$$\sum_1^n (t-x_p)(dt-dx_p)+\sum_1^n (u-y_p)(du-dy_p)+\sum_1^n (v-z_p)(dv-dz_p)=0.$$

Maar de som der vergelijkingen (1) geeft:

$$\sum_1^n (t-x_p)\,dx_p+\sum_1^n (u-y_p)\,dy_p+\sum_1^n (v-z_p)\,dz_p=0,$$

waardoor de voorgaande overgaat in

$$\sum_1^n (t-x_p)\,dt+\sum_1^n (u-y_p)\,du+\sum_1^n (v-z_p)\,dv=0,$$

welke gelijke beteekenis heeft met

$$(nt-\sum_1^n x_p)\,dt+(nu-\sum_1^n y_p)\,du+(nv-\sum_1^n z_p)\,dv=0$$

of door n gedeeld,

Digitized by Google

$$\left(t - \frac{\sum_1^n x_p}{n}\right) dt + \left(u - \frac{\sum_1^n y_p}{n}\right) du + \left(v - \frac{\sum_1^n z_p}{n}\right) dv = 0.. \quad (3)$$

Nu is de vergelijking van het normaalvlak van de meetkundige plaats in het punt P(t, u, v), als ξ, η en ζ de loopende coördinaten zijn:

$$(\xi - t)\,dt + (\eta - u)\,du + (\zeta - v)\,dv = 0$$

en aan deze vergelijking voldoen de waarden (zie (3)):

$$\xi = \frac{\sum_1^n x_p}{n},$$

$$\eta = \frac{\sum_1^n y_p}{n},$$

$$\zeta = \frac{\sum_1^n z_p}{n},$$

welke juist de coördinaten zijn van het middelpunt der gemiddelde afstanden der punten $x_1 y_1 z_1, \ldots, x_n y_n z_n$, waardoor de stelling bewezen is.

Aanmerking. Liggen de gegeven krommen in één plat vlak, dan zijn de normalen de doorsneden van de normaalvlakken met dit vlak, derhalve moet ook het punt P in het vlak der krommen liggen, zoodat dan de stelling luidt:

De meetkundige plaats van zoodanige punten, dat de som der tweede machten van de lengten der normalen naar een of meer gegeven vlakke krommen getrokken, constant is, heeft in elk punt tot normaal eene lijn, gericht naar het middelpunt van de gemiddelde afstanden der voeten van alle normalen, uit dit punt naar de gegeven krommen getrokken.

CLIII. Voorstel.

Door L. Janse Bz.

Een trapezium te beschrijven, wanneer gegeven zijn de opstaande zijden en de beide diagonalen.

Opgelost *door* L. Janse Bz., J. H. Schäfer, A. Eecen *en* C. de Haas Jbz.

Oplossing *van* L. Janse Bz.

Onderstel, dat het trapezium ABCD reeds onder de opstaande

Digitized by Google

zijden $AD = a$, $BC = b$, $BD = c$ en $AC = d$ beschreven zij (zie fig. 52), en stellen wij ons voor de basis $AB = x$ in de voornoemde gegevens uittedrukken.

Trek de loodlijnen CE en DF op AB, dan hebben wij in de driehoeken ABC en ABD

$$d^2 = b^2 + x^2 - 2x.BE \quad \text{en} \quad c^2 = a^2 + x^2 - 2x.AF$$

of $2x.BE = b^2 - d^2 + x^2 \qquad 2x.AF = a^2 - c^2 + x^2$

$$4x^2.\overline{BE}^2 = (b^2 - d^2 + x^2)^2 \quad 4x^2.\overline{AF}^2 = (a^2 - c^2 + x)^2.$$

Maar in de rechthoekige driehoeken BCE en ADF, die gelijke hoogte hebben, zijn:

$$\overline{BE}^2 = b^2 - \overline{CE}^2 \quad \text{en} \quad \overline{AF}^2 = a^2 - \overline{DF}^2,$$

derhalve

$$4x^2(b^2 - \overline{CE}^2) = (b^2 - d^2 + x^2) \text{ en } 4x^2(a^2 - \overline{DF}^2) = (a^2 - c^2 + x^2)^2$$

of $\qquad -4x^2.\overline{CE}^2 = (b^2 - d^2 + x^2)^2 - 4b^2x^2$

en $\qquad -4x^2.\overline{DF}^2 = (a^2 - c^2 + x^2)^2 - 4a^2x^2.$

Daar nu de beide eerste leden dezer vergelijkingen aan elkander gelijk zijn, zullen ook de tweede leden aan elkander gelijk zijn, en men heeft

$$(b^2 - d^2 + x^2)^2 - 4b^2x^2 = (a^2 - c^2 + x^2)^2 - 4a^2x^2,$$

uit welke x moet worden opgelost.

Te dien einde hebben wij de aangeduide machtsverheffingen uittevoeren en x aftezonderen. Men verkrijgt alsdan:

$$b^4 - 2b^2d^2 + 2b^2x^2 + d^4 - 2d^2x^2 + x^4 - 4b^2x^2$$
$$= a^4 - 2a^2c^2 + 2a^2x^2 + c^4 - 2c^2x^2 + x^4 - 4a^2x^2,$$

waaruit:

$$x^2(2a^2 - 2b^2 + 2c^2 - 2d^2) = a^4 - 2a^2c^2 + c^4 - b^4 + 2b^2d^2 - d^4,$$

$$x^2 = \frac{(c^2 - a^2)^2 - (d^2 - b^2)^2}{2(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)}.$$

De waarde van x, wanneer a, b, c en d gegeven zijn, kan nu lichtelijk berekend worden.

Om deze waarde door constructie te vinden, doen wij de laatste vergelijking de volgende herleidingen ondergaan:

$$x^2 = \frac{[(c+a)(c-a)]^2 - [(d+b)(d-b)]^2}{2[(a+b)(a-b) + (c+d)(c-d)]}$$

$$= \frac{\{(c+a)(c-a) + (d+b)(d-b)\}.\{(c+a)(c-a) - (d+b)(d-b)\}}{2[(a+b)(a-b) + (c+d)(c-d)]}$$

Zijn nu a, b, c en d gegevene lijnen, dan stellen de pro-

Digitized by Google

ducten $(a+c)(a-c)$, $(b+d)(b-d)$, $(a+b)(a-b)$ en $(c+d)(c-d)$ rechthoeken voor, welke wederom ieder een vierkant vertegenwoordigen. Stellen wij die vierkanten achtereenvolgens voor door m^2, n^2, p^2, q^2, dan wordt de uitdrukking voor x^2 deze:

$$x^2 = \frac{(m^2+n^2)(m^2-n^2)}{2(p^2+q^2)}.$$

Maar, daar de som of het verschil van twee vierkanten gelijk aan een vierkant kan gedacht worden, zoo mogen wij stellen:

$$m^2+n^2=r^2, \quad m^2-n^2=s^2, \quad p^2+q^2=t^2,$$

derhalve
$$x^2 = \frac{r^2 . s^2}{2t^2},$$

$$x = \pm \frac{r.s}{t\sqrt{2}},$$

of
$$t\sqrt{2} . x = r . s$$
$$t\sqrt{2} : r = s : x.$$

Het construeren van de basis x komt dus neder op het beschrijven van vierkanten onder de lijnen $(a+c)$ en $(a-c) = m^2$, $(b+d)$ en $(b-d) = n^2$, $(a+b)$ en $(a-b) = p^2$ en $(c+d)$ en $(c-d) = q^2$; voorts op het construeren van de zijden van nieuwe vierkanten, die gelijk zijn aan de som en het verschil der twee eerste en van de zijde t van een vierkant gelijk aan de som der beide laatste vierkanten, en eindelijk op het construeren van eene vierde evenredige tot de lijn $t\sqrt{2}$ en de genoemde zijden r en s der vierkanten, waarmede het vraagstuk als opgelost te beschouwen is.

Constructie. Zijn (fig. 52*b*) a, b, c, d de gegeven opstaande zijden en diagonalen, trek eene onbepaalde rechte lijn, zet daarop uit van een punt A achtereenvolgens:

$A_1 = c+a$, $A_2 = c-a$, $A_3 = d+b$, $A_4 = d-b$,
$A_5 = a+b$, $A_6 = a-b$, $A_7 = c+d$ en $A_8 = c-d$.

Beschrijf op de lijnen A_1, A_3, A_5 en A_7 als middellijnen halve cirkels, en richt uit 2, 4, 6, 8, loodlijnen op de lijn A_7, tot zij hare overeenkomstige cirkelomtrekken ontmoeten, (namelijk de loodlijn in 2 den omtrek wiens middellijn $= a+c$, de loodlijn in 8 den omtrek wiens middellijn $= c+d$, enz.) dan heeft men:

$$AB = m, \quad AC = n, \quad AD = p, \quad AE = q.$$

Maak in den rechten hoek QPR, $P_9 = m$, $P_{10} = n$, trek

Digitized by Google

de lijn mn en beschrijf uit n met m als straal een' cirkelboog, die PQ snijdt in 11, trek de lijn $n - 11$, dan is $n - 9 = r$ en $n - 11 = s$. Maak $P_{12} = p$, en beschrijf uit 12 met q als straal een' cirkelboog, die PR in 13 snijdt, dan is $12 - 13 = t$; trek voorts de lijn $12 - 14$ loodrecht op $12 - 13$ en gelijk aan deze, dan is $13 - 14 = t\sqrt{2}$. Construeer eindelijk eene vierde evenredige tot de lijnen $GH = t\sqrt{2}$, $GI = s$, $GK = r$, dan is de lijn GL de begeerde basis van het trapezium.

CLIV. VOORSTEL.

Door D. B. WISSELINK.

Men heeft in stand gegeven twee evenwijdige lijnen AB *en* CD, *alsmede twee punten* P *en* Q. *Wordt gevraagd uit* P *en* Q *twee evenwijdige lijnen te trekken, zoodat de zijden van het parallelogram, dat ontstaat door de snijding van de evenwijdige lijnen door de uit* P *en* Q *getrokken evenwijdige lijnen, eene gegeven verhouding hebben. Men verlangt eene eenvoudige meetkundige constructie.*

OPGELOST *door* D. B. WISSELINK, A. EECEN *en* C. LELY.

OPLOSSING *van* D. B. WISSELINK.

Onderstel de figuur geconstrueerd, (zie fig. 53), zoodat vierh. FHGE het bedoelde parallelogram is, welks zijden zich verhouden als twee gegeven getallen a en b. Laat verder de lijn PQ getrokken worden, die AB en CD in R en S snijdt.

Daar AB//CD is, is: $QG : GH = QR : RS$

en dewijl PF//QH is, is: $PQ : EG = QR : GR$.

Uit deze evenredigheden volgt:

$$QG \times RS = GH \times QR \text{ en } PQ \times GR = EG \times QR.$$

Deze vergelijkingen in elkander deelende, in aanmerking genomen dat $GH : EG = a : b$, hebben we:

$$\frac{QG \times RS}{PQ \times GR} = \frac{a}{b}, \text{ waaruit: } QG : GR = a \times PQ : b \times RS.$$

Uit de laatste evenredigheid volgt de volgende

CONSTRUCTIE. Verleng PQ, zoodat zij AB en CD in R en S snijdt, construeer den cirkel die de meetk. plaats is van de toppen der driehoeken, die QR tot basis hebben en wiens opstaande zijden zich verhouden als $a \times PQ$ tot $b \times RS$, zoo $\frac{a}{b}$ de verhouding is van de zijden des parallelograms. Laat deze cirkel AB

Digitized by Google

ergens in G snijden, dan trekken we QGH en evenwijdig hieraan PEF, dan zal parallelogram FHGE het begeerde zijn. In 't algemeen zullen er twee oplossingen zijn, want de bedoelde cirkel zal in den regel AB in twee punten snijden.

OPLOSSING *van* C. LELY.

(Zie fig. 54.) Zij de gegeven verhouding $= \frac{p}{q}$. Vereenig de punten P en Q, waarvan één buiten, het andere tusschen de gegevene evenwijdige lijnen ligge, en beschrijf op PQ als middellijn een' cirkel. Laat uit het middelpunt M van dien cirkel eene loodlijn vallen op de evenwijdige lijnen, zij CL haar loodrechte afstand $= h$. Beschrijf dan uit P en Q als middelpunten met een straal $= \frac{p}{q}.h$ cirkelbogen, welke den eerst getrokken cirkel in K en K', G en G' snijden. Vereenig dan de punten G en Q, K en P, G en P, Q en K', P en G', Q en K, dan zullen de lijnen PG en QK', QK en PG' aan elkander evenwijdig loopen. De gegevene evenwijdige RS en TV mogen nu door de lijn PG in de punten A en C, door de lijn QK' in de punten B en D, door de lijn QK in de punten A' en C', door de lijn PG' in de punten B' en D' gesneden worden, dan heeft men twee parallelogrammen ABCD en A'B'C'D', welke beide aan de vraag voldoen.

BEWIJS. Trek CE evenwijdig aan GQ, dus loodrecht op BD, A'E' evenwijdig aan KP, dus loodrecht op PG', dan is

$$\triangle CED \backsim \triangle ACL \qquad \triangle A'E'B' \backsim \triangle A'L'C'$$

$$\begin{aligned} AC : CD &= CL : CE & A'C' : A'B' &= A'L' : A'E' \\ &= h : \overline{\overline{GQ}} & &= h : \overline{\overline{KP}} \\ &= h : \frac{p}{q}h & &= h : \frac{p}{q}h \\ &= q : p & A'C' : C'D' &= q : p. \end{aligned}$$

CLV. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Op de binnen-oppervlakte van een' halven bol, wiens straal $=$ R, *rusten eenige bollen en drukken zoodanig tegen elkander, dat hunne middelpunten met dat van den halven bol in hetzelfde vertikale vlak liggen. Indien men nu weet, dat zij allen hetzelfde soortelijk gewicht hebben, dat de eerste bol r en*

Digitized by Google

de overigen $\frac{r}{m}$ *tot straal hebben, vraagt men den evenwichtstoestand dier bollen te bepalen. Ter toepassing zij* $R = 60$, $r = 20$, $m = 2$ *en het aantal bollen* 3.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST *en* G. SCHOUTEN.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Noemen wij den straal des halven bols R, die van de bollen r, r_1, r_2, r_3, enz., dan is $r_1 = r_2 = r_3$ enz. $= \frac{1}{m} r$ en de afstand van hunne middelpunten O, O_1, O_2 enz. tot het middelpunt C van den halven bol $R - r$ en $R - \frac{1}{m} r$. Drukken wij het gewicht van den eersten bol door G uit, dan is dat van elk der kleine $\frac{G}{m^3}$. Zij voorts de hoek dien CO met den verticaal maakt ϕ en $OCO_1 = \alpha$, $O_1CO_2 = \alpha_1 = O_2CO_3 = O_3CO_4$ enz., dan maakt CO_1 den hoek $\alpha - \phi$, CO_2 den hoek $\alpha_1 + \alpha - \phi$, CO_3 den hoek $2\alpha_1 + \alpha - \phi$, CO_n den hoek $(n-1)\alpha_1 + \alpha - \phi$ met de vertikaal. Indien wij dan de kracht in O door k voorstellen, die met de krachten $k_1, k_2, k_3 \ldots k_n$ in $O_1, O_2, O_3 \ldots O_n$ evenwicht moet maken, dan is blijkbaar

$$k = G(R - r) \, Sin\, \phi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

$$k_1 = \frac{G}{m_3}\left(R - \frac{1}{m} r\right) Sin\,(\alpha - \phi) = \frac{G}{m^4}(mR - r)\, Sin\,(\alpha - \phi),$$

$$k_2 = \frac{G}{m^4}(mR - r)\, Sin\,(\alpha_1 + \alpha - \phi) = \frac{G}{m^4}(mR - r) \times$$
$$\times [Sin\,\alpha_1\, Cos\,(\alpha - \phi) + Cos\,\alpha_1\, Sin\,(\alpha - \phi)],$$

$$k_3 = \frac{G}{m^4}(mR - r)\{Sin\,2\alpha_1\, Cos\,(\alpha - \phi) + Cos\,2\alpha_1\, Sin\,(\alpha - \phi)\},$$

$$k_4 = \frac{G}{m^4}(mR - r)\{Sin\,3\alpha_1 Cos(\alpha - \phi) + Cos\,3\alpha_1 Sin(\alpha - \phi)\} \text{ enz.},$$

$$k_n = \frac{G}{m^4}(mR - r)\{Sin(n-1)\alpha_1 Cos(\alpha - \phi) + Cos(n-1)\alpha_1 Sin(\alpha - \phi)\}.$$

Wij hebben alzoo de vergelijking, na door G gedeeld te hebben:

$$(R - r)\, Sin\,\phi = \frac{1}{m^4}(mR - r)\,[\{1 + Cos\,\alpha_1 + Cos\,2\alpha_1$$
$$+ Cos\,3\alpha_1 + \ldots + Cos\,(n-1)\,\alpha_1\}\, Sin\,(\alpha - \phi)$$

Digitized by Google

$+\{Sin\,\alpha_1+Sin2\alpha_1+Sin3\alpha_1+\ldots+Sin(n-1)\alpha_1\}\,Cos(\alpha-\phi)]$
of na door $Cos\,\phi$ gedeeld te hebben:

$$\frac{m^4(R-r)\,tg\,\phi}{mR-r}$$

$$=[1+Cos\alpha_1+Cos2\alpha_1+Cos3\alpha_1+\ldots Cos(n-1)\alpha_1](Sin\alpha-Cos\alpha\,tg\phi)$$
$$+\{Sin\alpha_1+Sin2\alpha_1+Sin3\alpha_1+\ldots+Sin(n-1)\alpha_1\}(Cos\alpha+Sin\alpha\,tg\phi).$$

Nu is

$$Cos\alpha_1+Cos2\alpha_1+Cos3\alpha_1+\ldots Cos(n-1)\alpha_1=-\tfrac{1}{2}+\frac{Sin(n-\frac{1}{2})\alpha_1}{2\,Sin\,\frac{1}{2}\alpha_1}$$

en

$$Sin\alpha_1+Sin2\alpha_1+Sin3\alpha_1+\ldots Sin(n-1)\alpha_1=\frac{Cos\frac{1}{2}\alpha_1-Cos(n-\frac{1}{2})\alpha_1}{2\,Sin\,\frac{1}{2}\alpha_1},$$

daardoor wordt

$$\frac{2m^4(R-r)Sin\frac{1}{2}\alpha_1 tg\phi}{mR-r}=\{Sin\tfrac{1}{2}\alpha_1+Sin(n-\tfrac{1}{2})\alpha_1\}(Sin\alpha-Cos\alpha\,tg\phi)$$
$$+\{Cos\tfrac{1}{2}\alpha_1-Cos(n-\tfrac{1}{2})\alpha_1\}(Cos\,\alpha+Sin\,\alpha\,tg\,\phi)$$
$$=Cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\alpha_1)-Cos\{\alpha+(n-\tfrac{1}{2})\alpha_1\}$$
$$+\{Sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\alpha_1)-Sin[\alpha+(n-\tfrac{1}{2})\alpha_1]\}tg\,\phi,$$

zoodat men eindelijk vindt

$$tg\,\phi=\frac{(mR-r)\{Cos(\alpha-\frac{1}{2}\alpha_1)-Cos\{\alpha+(n-\frac{1}{2})\alpha_1\}}{2m^4(R-r)Sin\frac{1}{2}\alpha_1-(mR-r)\{Sin(\alpha-\frac{1}{2}\alpha_1)-Sin[\alpha+(n-\frac{1}{2})\alpha_1]\}},$$

terwijl men uit de driehoeken COO_1 en CO_1O_2 gemakkelijk vindt:

$$Sin\,\alpha=\frac{2r\sqrt{R\,[m\,(R-r)-r]}}{(R-r)\,(mR-r)}$$

en

$$Sin\,\alpha_1=\frac{2r\sqrt{mR\,(mR-2r)}}{(mR-r)^2}.$$

Stelt men $R=60$, $r=20$, $m=2$ en $n=2$, dan wordt $Sin\,\alpha=\frac{3}{5}=0{,}6$ en $Sin\,\alpha_1=\frac{4}{25}\sqrt{6}=0{,}391918$, dus $\alpha=36^\circ\,52'$ en $\alpha_1=23^\circ\,4'$, zoodat $\alpha-\frac{1}{2}\alpha_1=25^\circ\,20'$ en $\alpha+1\frac{1}{2}\alpha_1=71^\circ\,28'$ is. Wij hebben dan:

$$tg\,\phi=\frac{5\,(Cos\,25^\circ 20'-Cos\,71^\circ 28')}{64\,Sin\,11^\circ 32'-5\,(Sin\,25^\circ 20'-Sin\,71^\circ 28')}$$
$$=\frac{5\,(0{,}90383-0{,}31786)}{64\times 0{,}19994-5\,(0{,}42788-0{,}94814)}=0{,}22895,$$

dat is ten naastenbij $\phi=12^\circ\,54'$.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* G. SCHOUTEN.

Zij MAC de doorsnede, die de middelpunten der kleinere bollen bevat. De ligging van elk dezer bollen is bepaald door den hoek, dien de lijn, welke zijn middelpunt met dat des halven bols verbindt, met den horizon maakt; de grootte van dien hoek zullen wij voorstellen door θ met een index, die aangeeft tot welken bol zij behoort; b. v. θ_1 voor den eersten, θ_2 voor den tweeden, θ_p voor den p^{en} bol van de reeks.

Evenzoo stellen wij de letter A_p bij het middelpunt van den p^{en} bol, en noemen zijn straal r_p.

De middelpunten A_p en A_{p+1} van twee opvolgende bollen vormen met het middelpunt M des halven bols de hoekpunten van een driehoek, waarvan de hoek aan M gelijk $\theta_{p+1} - \theta_p$ is; die aan het middelpunt A_p zal door A_p, die aan het punt A_{p+1} door A'_p worden voorgesteld.

Verder zullen wij de bollen allen homogeen onderstellen, en de grootte en de stof, waaruit zij bestaan, willekeurig laten; het gewicht van den p^{en} bol zij P_p.

In de onderstelling, dat elke bol slechts in aanraking komt met den onmiddelijk voorgaanden en volgenden, en er geen wrijving wordt in acht genomen, is elke bol aan de werking van slechts vier krachten onderworpen, die allen door zijn middelpunt gericht zijn; dit stelsel voor den p^{en} bol b. v. bestaat uit:

1°. den weêrstand W_p van den halven bol;
2°. zijn gewicht P_p;
3°. de normale drukking N_{p-1} van den voorgaanden;
4°. die des volgenden, welke wij, omdat zij gelijk, doch tegengesteld is aan die, welke hij zelf op den volgenden uitoefent, N_p zullen noemen.

Zal het stelsel bollen in evenwicht zijn, dan moet elke bol onder de werking van het viertal krachten op zich zelven in evenwicht zijn, en dit zal plaats hebben, als de som der ontbondenen volgens eene willekeurige as nul is; tot as kiezen wij de lijn, die loodrecht op W staat, ten einde deze kracht te elimineeren.

Door op te merken, dat P_p met de as den hoek $= \theta_p$ maakt, N_{p-1} een hoek $=$ het complement van A'_{p-1}, en N_p een hoek $=$ het complement van A_p, hebben wij onmiddellijk de

Digitized by Google

volgende evenwichts-voorwaarden:

$$\left.\begin{array}{l} N_1 \, Sin\, A_1 = P_1 \, Cos\, \theta_1 , \\ N_2 \, Sin\, A_2 = P_2 \, Cos\, \theta_2 + N_1 \, Sin\, A_1' , \\ N_3 \, Sin\, A_3 = P_3 \, Cos\, \theta_3 + N_2 \, Sin\, A_2' , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_p \, Sin\, A_p = P_p \, Cos\, \theta_p + N_{p-1} \, Sin\, A'_{p-1} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_n \, Sin\, A_n = P_n \, Cos\, \theta_n + N_{n-1} \, Sin\, A'_{n-1} = 0 , \end{array}\right\} \quad . \; (1)$$

als het aantal bollen n bedraagt.

Elimineert men uit (1) achtereenvolgens $N_1, N_2, \ldots N_{p-1}$ dan komt er:

$$N_2 \, Sin\, A_2 \, Sin\, A_1 = P_2 \, Cos\, \theta_2 \, Sin\, A_1 + P_1 \, Cos\, \theta_1 \, Sin\, A_1' ,$$

$$N_3 \, Sin\, A_3 \, Sin\, A_2 \, Sin\, A_1 = P_3 \, Cos\, \theta_3 \, Sin\, A_2 \, Sin\, A_1$$
$$+ P_2 \, Cos\, \theta_2 \, Sin\, A_1 \, Sin\, A_2' + P_1 \, Cos\, \theta_1 \, Sin\, A_1' \, Sin\, A_2' ;$$

. . . . . .

Uit den symmetrieschen vorm van elk der vergelijkingen (1) besluit men, dat na eliminatie van N_{p-1} moet komen:

$$N_p \prod_{q=1}^{q=p} Sin\, A_q = \sum_{q=1}^{q=p} \left(P_q \, Cos\, \theta_q . \prod_{s=1}^{s=q-1} Sin\, A_s . \prod_{t=q}^{t=p-1} Sin\, A_t' \right) ;$$

waarin $\prod_{s=1}^{s=n} a_s$ voorstelt het gedurig produkt $a_1 \, a_2 \, a_3 \ldots\ldots a_n$.

Dat deze formule, die voor $p = 1$ en $p = 2$ geldt, ook voor alle p geldt, blijkt ook, wanneer wij op haar de methode van Bernoulli toepassen, door namelijk van p op $p + 1$ overtegaan. Volgens (1) toch is:

$$N_{p+1} \, Sin\, A_{p+1} = P_{p+1} \, Cos\, \theta_{p+1} + N_p \, Sin\, A_p' ;$$

waaruit door vermenigvuldiging met $\prod_{q=1}^{q=p} Sin\, A_q$ volgt:

$$N_{p+1} \prod_{q=1}^{q=p+1} Sin A_q = P_{p+1} Cos \theta_{p+1} . \prod_{q=1}^{q=p} Sin A_q + N_p . \prod_{q=1}^{q=p} Sin A_q . Sin A_p' ;$$

substitueert men hierin voor N_p de aangenomen waarde, dan vindt men weer die formule terug, als men daarin p door $p + 1$ vervangt.

Wij hebben dus gevonden, dat na eliminatie van N_{n-1} zal komen:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \left(P_p \, Cos\, \theta_p . \prod_{q=1}^{q=p-1} Sin\, A_q . \prod_{s=p}^{s=n-1} Sin\, A_s' \right) = 0 , \quad . \; (2)$$

welke formule impliciet de oplossing bevat van ons vraagstuk;

Digitized by Google

immers als wij θ_1 als de onbekende aannemen, zijn alle overige grootheden bekend; want in den driehoek MA_pA_{p+1} zijn de zijden bekend:

$$MA_p = R - r_p,$$
$$MA_{p+1} = R - r_{p+1},$$
$$A_pA_{p+1} = r_p + r_{p+1},$$

zoodat

$$\left.\begin{aligned} Sin\, A_p &= \frac{2\sqrt{R.r_p.r_{p+1}.(R - r_p - r_{p+1})}}{(r_p + r_{p+1})(R - r_p)}; \\ Sin\, A_p' &= \frac{2\sqrt{R.r_p.r_{p+1}.(R - r_p - r_{p+1})}}{(r_p + r_{p+1})(R - r_{p+1})}; \\ Sin\,(\theta_{p+1} - \theta_p) &= \frac{2\sqrt{R.r_p.r_{p+1}.(R - r_p - r_{p+1})}}{(R - r_p)(R - r_{p+1})}; \\ \text{terwijl} \\ \theta_p = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) + (\theta_3 - \theta_2) + \ldots + (\theta_p - \theta_{p-1}). \end{aligned}\right\} . \quad (3)$$

Neemt men de gegevens, zooals zij in het vraagstuk bedoeld worden, dan is:

$$\frac{1}{m^3} P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = P_n, \quad \text{stel} = P,$$

$$r_1 = r, \quad \text{en} \quad r_2 = r_3 = \ldots = r_n = \frac{r}{m};$$

$A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = A_2' = A_3' = \ldots = A'_{n-1}$, stel $= A$; brengt men deze waarden in rekening bij (2), dan wordt zij na deeling door P, en als de eerste bol vóór het teeken Σ wordt gebracht:

$$m^3\, Cos\, \theta_1\, Sin\, A_1'\, Sin^{n-2} A + \sum_{p=2}^{p=n} (Cos\, \theta_p\, Sin\, A_1\, Sin^{n-2} A) = 0,$$

of, na deeling door $Sin^{n-2} A$,

$$m^3\, Cos\, \theta_1 . Sin\, A_1' + Sin\, A_1 \sum_{p=2}^{p=n} Cos\, \theta_p = 0;$$

welke vergelijking ook onmiddellijk gevonden wordt uit het stelsel (1), als daar $A_p' = A_p$ wordt genomen.

Omdat volgens (3)

$$\frac{Sin\, A_1'}{Sin\, A_1} = \frac{R - r}{R - \frac{r}{m}} \text{ is,}$$

wordt deze vergelijking ook:

Digitized by Google

$$m^4 . \frac{R - r}{mR - r} \, Cos\, \theta_1 + \sum_{p=2}^{p=n} Cos\, \theta_p = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

Stelt men hierin:

$R = 60$, $r = 20$, $m = 2$ en $n = 3$, dan is volgens (3):

$$Sin\,(\theta_2 - \theta_1) = 0.6, \quad Sin\,(\theta_3 - \theta_2) = 0.4\sqrt{6}$$
$$Cos\,(\theta_2 - \theta_1) = 0.8, \quad Cos\,(\theta_3 - \theta_2) = 0.2,$$

zoodat (2a) in dit bijzondere geval wordt:

$$6.4\, Cos\, \theta_1 + Cos\, \theta_2 + Cos\, \theta_3 = 0,$$

of verder herleidende:

$$tg^2 \theta_1 + 120\, tg\, \theta_1 - \frac{1682}{3} = 0,$$

waaruit gevonden wordt:

$$tg\, \theta_1 = 4.5032\overline{3}\ldots.$$
$$\theta_1 = 77^\circ 28' 47'',6.$$

De lijn, die het middelpunt des grootsten bols met dat des halven vereenigt, heeft dus een helling ten opzichte van den horizon van $77^\circ 28' 47'',6$, of ten opzichte van de verticaal van $12^\circ 31' 12'',4$.

CLVI. Voorstel. (*)

Door C. J. Matthes.

Eenigerhande driehoek is beschreven wederkeerig gekoppeld tot eene gegeven kegelsnede. Te bewijzen: dat van eene kegelsnede, welke de zijden van dien driehoek aanraakt, en het middelpunt van de gegevene kegelsnede tot een brandpunt heeft, de tweede as eene standvastige waarde zal hebben.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

(Zie fig. 55.) De wederkeerige der gegeven kegelsnede met opzicht tot haar middelpunt is eene gelijkvormige kegelsnede, waarbij de hoofdassen verwisseld zijn. Voor de wederkeerige van den een of anderen gekoppelden driehoek vindt men wederom een driehoek weêrkeerig gekoppeld met opzicht tot de weêrkeerige kegelsnede. De weêrkeerigen van de kegelsneden die de zijden van den oorspronkelijken gekoppelden driehoek aanraken en tevens tot brandpunt hebben het middelpunt der gegeven kegelsnede, zijn cirkels omgeschreven aan

(*) Dit voorstel en de twee volgende zijn ontleend aan Ferrers *Nieuwere Meetkunde*, Voorbeelden 47, 48 en 49.

Digitized by Google

de weêrkeerige gekoppelde driehoeken. Denken we ons nu van deze laatsten twee geheel willekeurig. In de figuur is voorgesteld de weêrkeerige kegelsnede en zijn daarenboven aangenomen één hoekpunt A, A_1 en de *richting* van ééne zijde uit dat hoekpunt AC, A_1C_1, voor twee gekoppelde driehoeken, dan zijn deze bepaald; de constructie geeft ons daarvoor ABC en $A_1B_1C_1$. De poollijnen van A en A_1, te weten DE en D_1E_1, snijden elkaâr in U, dat derhalve de pool is van AA_1, zoodat de lijnen UF en UG, die de doorsnijdingspunten van AA_1 met de kegelsnede verbinden met U, noodzakelijk raaklijnen zijn en AUV en A_1UV_1 wederom gekoppelde driehoeken. Nu zijn B en C zoowel als V en U punten, waarin DE harmonisch verdeeld is; evenzoo B_1 en C_1, alsmede V' en U ten aanzien van D_1E_1. Wij hebben dus, als P en P_1 de middens van DE en D_1E_1 zijn, en bijgevolg het doorsnijdingspunt O van AP met A_1P_1 het middelpunt der kegelsnede is, hetwelk wederom, vereenigd met U, FG in Q middendoordeelt:

$$PE^2 = PB \times PC = PV \times PU$$

en

$$P_1E_1^2 = P_1B_1 \times P_1C_1 = P_1V_1 \times P_1U.$$

Het punt O ligt dus zoowel op de richting van de gemeenschappelijke koorde der cirkels om ABC en AUV, als op die der cirkels om $A_1B_1C_1$ en A_1UV_1; de raaklijnen derhalve uit O tot het eerste paar cirkels zijn even lang, en insgelijks die tot het tweede paar. Maar dit niet alleen, zij zijn onderling even groot. Immers wij hebben dat FG in A en V, en tevens in A_1 en V_1 harmonisch verdeeld is, zoodat $QA \times QV = QA_1 \times QV_1$, derhalve Q op de richting der gemeenschappelijke koorde van de cirkels om AUV en A_1UV_1 gelegen is, en mitsdien ook het punt O. Aangezien dus $c^2 - \rho^2 =$ standvastig blijkt (zie FERRERS, bl. 111), is het gestelde bewezen.

CLVII. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Te bewijzen, dat twee ellipsen, die een gemeenschappelijk brandpunt hebben, elkander in niet meer dan twee punten kunnen snijden.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES *en* A. EECEN.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES:

De weêrkeerigen van twee confocale ellipsen tot derzelver gemeenschappelijk brandpunt zijn twee cirkels, die, daar zij

Digitized by Google

beide dat punt moeten bevatten, elkaâr noodwendig snijden, waaruit volgt dat zij slechts twee gemeenschappelijke raaklijnen kunnen hebben, en dus de ellipsen slechts twee doorsnijdingspunten.

CLVIII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Denkt men zich een stelsel van kegelsneden, die allen door vier gegeven punten gaan, dan zijn er vier bepaalde rechte lijnen te vinden, zóó dat de koorde op elke van haar door eene willekeurige kegelsnede van het stelsel begrensd in één der punten een rechten hoek onderspant. Vrage naar het bewijs.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

De weêrkeerige van eene der kegelsneden door de punten A, B, C, D, ten opzichte van één dier punten, D bijv., is eene parabel die den weêrkeerigen driehoek A'B'C' aanraakt. De koorden der oorspronkelijke kegelsnede die in het punt D rechte hoeken onderspannen, snijden elkaâr (zie Ferrers, bl. 117) in één punt, de pool van de richtlijn der parabel. Hetzelfde geldt van andere kegelsneden die door de punten A, B, C, D gaan. Van al die parabels hebben nu (zie Ferrers, bl. 110, § 123) de richtlijnen één punt gemeen, het orthocentrum van den weêrkeerigen driehoek A'B'C', welks poollijn dus eene der verlangde lijnen is. Door nu op dezelfde wijs te werk te gaan ten aanzien van de punten C, B en A, komen er nog drie zulke lijnen te voorschijn; zij kunnen allen gemakkelijk geconstrueerd worden.

CLIX. Voorstel. (*)

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij de middellijn AB *eens cirkels in* A' *en* B' *harmonisch gesneden: trekt men dan uit de punten* A' *en* B' *lijnen* A'E *en* B'E *welke samenkomen in een punt* E *in den omtrek des cirkels, en den cirkel respectivelijk snijden in* D *en in* G, *en vereenigt men eindelijk de punten* D *en* G, *dan staat* DG *loodrecht op* AB *en men heeft* B'E : B'G = A'E : A'D. *Vrage naar het bewijs.*

Opgelost *door* A. Eecen, C. de Haas Jbz. *en* J. J. Teding van Berkhout.

(*) Dit en het volgende voorstel zijn zonder bewijs medegedeeld in het werkje vermeld bij N°. 92.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* A. EECEN.

(Zie fig. 56.) Vereenigt men A′ met G en richt men vervolgens in A′ op AB een loodlijn op, dan zijn, zooals bekend is, A′G, A′C, A′E en A′B′ harmonische stralen. A′C en A′B staan loodrecht op elkander, dus de beide andere stralen maken gelijke hoeken met AC, dus $\angle$ CA′G = $\angle$ EA′C = $\angle$ DA′H; waaruit verder volgt, dat $\angle$GA′A = $\angle$DA′A is, dus A′G = A′D, waaruit onmiddellijk blijkt, dat DG loodrecht op AB staat.

Verder heeft men, (zie de figuur) B′E : B′G = A′E : A′G (zie Voorstel 93 van dit Deel), doch daar A′G = A′D is, zoo volgt hieruit: B′E : B′G = A′E : A′D.

CLX. VOORSTEL.

Door J. J. TEDING VAN BERKHOUT.

Indien door een punt C *in de middellijn eens cirkels (buiten het middelpunt), of in hare verlengde, eene lijn getrokken wordt, welke den omtrek des cirkels snijde in* D *en* E *en in het punt* D *eene loodlijn op* CD *opgericht wordt, welke de middellijn in* F *en den omtrek des cirkels in* G *snijdt, dan is* CD : CE = DF : FG. *Vrage naar het bewijs.*

OPGELOST *door* A. EECEN, C. DE HAAS J.Bz. *en* J. J. TEDING VAN BERKHOUT.

OPLOSSING *van* A. EECEN.

(Zie fig. 57.) Zij C het gegeven punt in de middellijn, CE de snijlijn en DG in D loodrecht op CE. Vereenigt men nu E met G, dan zal deze lijn blijkbaar door het middelpunt M gaan. Trek nu de lijn EH loodrecht op CE, dan heeft men uit de gelijkvormige driehoeken CDF en CEH:

$$CD : CE = DF : EH \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zooals duidelijk uit de figuur zichtbaar is, zijn de driehoeken EMH en MFG gelijk en gelijkvormig, en wel met EH en FG als gelijkstandige zijden. De vergelijking (1) verandert dus in de volgende: CD : CE = DF : FG. Wat te bewijzen was.

CLXI. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Een vlak en eene lijn zijn monodimetrisch met de verhouding 1, $\frac{1}{2}$, 1 *gegeven; men vraagt, een vlak te construeren, dat door de gegevene lijn gaat en loodrecht op het gegeven vlak staat.*

OPGELOST *door* W. VAN HAARST *en* C. LELY.

Digitized by Google

OPLOSSING VAN W. VAN HAARST.

(Zie fig. 58.) Bij de assenverhouding 1, $\frac{1}{2}$, 1 moeten de assen onder de hoeken XOZ = 97°11′ en XOY = YOZ = 131°25′ elkander ontmoeten, zoodat het verlengde van OY den hoek XOZ middendoordeelt. Zij nu AA_1A_2 het gegevene vlak en BC de gegevene lijn, waarvan dus BC_1 de projectie op het vlak XOY is. Indien men dan uit eenig punt der lijn eene loodlijn op het vlak neerlaat, dan zal het vlak, dat door de gegevene lijn en de loodlijn gebracht kan worden, blijkbaar het gevraagde vlak zijn. Bovendien is het klaar dat de bedoelde loodlijn evenwijdig moet zijn met de loodlijn, die men uit den oorsprong op het vlak kan neerlaten, waarom wij beginnen met deze te construeren. Daartoe slaan wij het vlak AOA_1 om AO op het vlak van teekening neer, hetwelk verkregen wordt door Oa_1 loodrecht op AO en $Oa_1 = 2OA_1$ te nemen, dan is Aa_1 de neergeslagen doorgang AA_1. Laten wij vervolgens uit O eene loodlijn Od op Aa_1 neer, dan zal men, door dD evenwijdig aan a_1A_1 te trekken, het voetpunt D en dus DO die loodlijn zelf in perspectief bekomen, terwijl dan A_2D de loodlijn wordt, welke men uit A_2 op AA_1 kan neerlaten en waarin dus het voetpunt van de loodlijn OS moet zijn gelegen. Construeren wij op gelijke wijze de uit A_3 op AA_2 neergelatene loodlijn A_1E, waarbij men de op het papier neergeslagene doorgang Aa_2 verkrijgt, door Oa_2 loodrecht op OX te zetten en $Oa_2 = OA_2$ te nemen. Het snijpunt S van A_2D en A_1E is dan het voetpunt en bijgevolg OS de loodlijn zelve. De lijn GQ door het punt P van de lijn CB evenwijdig met OS getrokken, staat dus mede loodrecht op het gegevene vlak AA_1A_2. Trekt men voorts uit de horizontale projectie P_1 van het punt P de lijn P_1Q evenwijdig met DO, de projectie van OS, dan is Q het punt waarin de loodlijn GQ het vlak XOY ontmoet. Dit punt en het punt B zijn alzoo punten van den doorgang IV van het gevraagde vlak met het vlak XOY en daar C het punt is, waar de gegevene lijn BC het vlak YOZ snijdt, zoo moet FV de doorgang van het gevraagde vlak daarmede zijn, terwijl MN die met het vlak XOZ is.

CLXII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Bij dezelfde perspectief als in het vorig voorstel uit een ge-

Digitized by Google

geven punt eene loodlijn op eene gegevene lijn te laten vallen.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST *en* C. LELY.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

(Zie fig. 59.) Laat P het gegevene punt en BC de gegevene lijn zijn, die in C door het vlak YOZ en in B door het vlak XOY gaat, zoodat BC_1 hare projectie op het laatste vlak is. Om dan het vlak te vinden, dat door BC en het punt P gebracht kan worden, nemen wij eenig punt D in de lijn BC en trekken door hare projectie D_1 en die van het punt P, dat is door P_1, de lijn EF_1, welke dan de projectie is van de lijn EF, die door P gaande, BC in D snijdt. Het bedoelde vlak is dan AA_1A_2, waarvan AA_1 door B en E, A_1A_2 door C en AA_2 door F moet gaan. Om nu in dit vlak uit P eene loodlijn op BC neer te kunnen laten, zullen wij het vlak AA_1A_2 met de lijn BC en het punt P om den doorgang Aa op het vlak van teekening moeten neerslaan, nadat dit eerst met den doorgang AA_1 om de as AO zelf is geschied. Dit laatste doen wij even als in het vorige voorstel en construeeren even als daar het standvlak A_2IO. Trekken wij nu door P de lijn GH evenwijdig aan A_2I en vervolgens HG_1 evenwijdig aan OI, dan is GHG_1 mede een vlak dat loodrecht door AA_1 gaat. Nu komt blijkbaar H in h en dus P_1 in p_1 te liggen, daar Hh en P_1p_1 evenwijdig aan aA_1 getrokken zijn. Door dan op de gewone wijze $mp_1 = PP_1$ en $hp = hm$ te nemen, zal de ligging p van het tweemaal neergeslagen punt P gevonden zijn.

Om vervolgens de ligging van de lijn BC na het neerslaan te bepalen, merken wij op, dat het punt B in b komt, terwijl wij, door c_1C_1 evenwijdig aan aA_1 te trekken, de plaats van c_1 vinden. Trekken wij voorts, even als boven, c_1c loodrecht door aA en $c_1n = C_1C$ loodrecht op deze, dan hebben wij slechts $cs = ns$ te maken, om het punt c en alzoo de geheele lijn bc te verkrijgen. Door nu uit p eene loodlijn op bc neer te laten, wordt het voetpunt q en diens hoogte qt boven het vlak XOY bekend. Is dan $c_1t_1 = qt$ genomen en t_1Q evenwijdig aan BC_1 getrokken, zoo wordt PQ de gevraagde loodlijn.

CLXIII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

VAN SCHOOTEN *heeft eenige reeksen van samengestelde getallen gegeven, waarbij de geheelen met de éénheid en de tellers*

Digitized by Google

en de noemers respectivelijk met gelijke verschillen opklimmen, en die, tot ongebruikelijke breuken herleid, de eigenschap hebben, dat indien de teller en de noemer de verhouding van de rechthoekszijden eens driehoeks voorstellen, de hypotenuse een geheel getal wordt. Men vraagt eene formule, waaruit men soovele zulke reeksen kan afleiden, als men goedvindt.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Stellen wij $x^2+y^2=z^2$, dan is $x^2=z^2-y^2=(z+y)(z-y)$ en nemen wij hierin $z+y=2p^2$ en $z-y=2q^2$, dan wordt $x^2=4p^2q^2$ een kwadraat en $z=p^2+q^2$ en $y=p^2-q^2$. Om dan bedoelde reeksen te verkrijgen, zal men geschikte waarden voor $\frac{p^2-q^2}{2pq}$ moeten vinden. Stellen wij hierin $q=1$, dan is $\frac{p^2-q^2}{2pq}=\frac{p^2-1}{2p}=\frac{(p+1)(p-1)}{2p}$ . . (a)

en nu zal het er op aankomen, om aan p zulke waarden te geven, dat $2p$ op den eersten term des tellers p geeft, want dan zullen bij de samengestelde getallen, waaruit de reeks moet bestaan, de geheelen met de eenheid kunnen opklimmen. Nu bereikt men in dit geval gemakkelijk dat doel en wel op twee wijzen, namelijk: door $p=2m$ en door $p=2m\pm1$ te stellen. Is $p=2m$, dan wordt de breuk

$$\frac{(2m+1)(2m-1)}{4m}=m-\frac{1}{4m},$$

of wel, m door $n+1$ te vervangen, $n+\frac{4n+3}{4(n+1)}$. Voor $n=0, 1, 2, 3, 4$ enz. ontstaat de reeks $^3/_4$, $1\,^7/_8$, $2\,^{11}/_{12}$, $3\,^{15}/_{16}$, $4\,^{19}/_{20}$ enz., waarin de tellers zoowel als de noemers met 4 opklimmen. Stellen wij $p=2m+1$, dan wordt de algemeene term $m+\frac{m}{2m+1}=m\left(1+\frac{1}{2m+1}\right)$

en deze geeft de reeks voor $m=1, 2, 3, 4, 5$ enz., $1\,^1/_3$, $2\,^2/_5$, $3\,^3/_7$, $4\,^4/_9$, $5\,^5/_{11}$ enz. Voor $p=2m-1$ komt men natuurlijk op dezelfde reeks.

Nemen wij in den oorspronkelijken vorm $q=2$, dan wordt hij $\frac{p^2-4}{4p}=\frac{(p+2)(p-2)}{4p}$. Hierdoor zal men weder twee

Digitized by Google

reeksen bekomen, door $p = 4m + 1$ en $p = 4m - 1$ te nemen. In het eerste geval wordt de vorm:

$$\frac{(4m-1)(4m+3)}{4(4m+1)} = m + \frac{4m-3}{4(4m+1)}$$

en in het tweede: $\frac{(4m+1)(4m-3)}{4(4m-1)} = m - 1 + \frac{12m-7}{4(4m-1)}$

of door in deze n voor $(m-1)$ te schrijven: $n + \frac{12n+5}{4(4n+3)}$.

Wij hebben dan voor $m = 1, 2, 3, 4, 5$ enz. $1\,{}^{1}/_{20}$, $2\,{}^{5}/_{36}$, $3\,{}^{9}/_{52}$, $4\,{}^{13}/_{68}$, $5\,{}^{17}/_{84}$ enz., en voor $n = 0, 1, 2, 3, 4$ enz. ${}^{5}/_{12}$, $1\,{}^{17}/_{28}$, $2\,{}^{29}/_{44}$, $3\,{}^{41}/_{60}$, $4\,{}^{53}/_{76}$ enz.

Door in den vorm (a) $q = 3$ te stellen, wordt hij:

$$\frac{(p+3)(p-3)}{6p},$$

welke voor $p = 6m + 1$ in

$$\frac{2(3m-1)(3m+2)}{3(6m+1)} = m + \frac{3m-4}{3(6m+1)}$$

en voor $p = 6m - 1$ in

$$\frac{2(3m+1)(3m-2)}{3(6m-1)} = m - 1 + \frac{15m-7}{3(6m-1)} = n + \frac{15n+8}{3(6n+5)}$$

overgaat en waaruit voor $m = 1, 2, 3, 4, 5$ enz. de reeks ${}^{19}/_{21}$, $2\,{}^{2}/_{39}$, $3\,{}^{5}/_{57}$, $4\,{}^{8}/_{75}$, $5\,{}^{11}/_{93}$ enz. en voor $n = 0, 1, 2, 3, 4$ enz. de reeks ${}^{8}/_{15}$, $1\,{}^{23}/_{33}$, $2\,{}^{38}/_{51}$, $3\,{}^{53}/_{69}$, $5\,{}^{68}/_{87}$ enz. ontstaan.

Nu is het gemakkelijk uit het vorige de algemeene vormen af te leiden, waarin alle genoemde reeksen begrepen zijn. Immers, stellen wij in den vorm $\frac{p^2 - q^2}{2pq}$, $p = 2mq + 1$ en $p = 2mq - 1$, dan vinden wij voor de eerste waarde:

$$\frac{4m^2q^2 + 4mq + 1 - q^2}{2q(2mq+1)} = m + \frac{2mq + 1 - q^2}{2q(2mq+1)} \quad . \text{ (b)}$$

en voor de tweede:

$$\frac{4m^2q^2 - 4mq + 1 - q^2}{2q(2mq-1)} = m - 1 + \frac{(2mq-1)(2q-1) - q^2}{2q(2mq-1)}$$

$$= n + \frac{(2nq + 2q - 1)(2q-1) - q^2}{2q(2nq + 2q - 1)} \quad . \; . \; . \; . \text{ (c)}$$

De vormen (b) en (c) stellen ons alzoo in staat zooveel reeksen te vinden als wij goedvinden. Voor $q = 1$, 2 en 3

Digitized by Google

komen de bovengevondene te voorschijn. Nemen wij $q = 4$, dan wordt (b): $m + \frac{8m - 15}{8(8m + 1)}$ en (c): $n + \frac{8n + 33}{8(8n + 7)}$. Deze geven de reeksen $^{33}/_{56}$, $1\,^{89}/_{120}$, $2\,^{145}/_{184}$, $3\,^{201}/_{248}$, $4\,^{257}/_{312}$ enz. en $^{65}/_{72}$, $2\,^{1}/_{136}$, $3\,^{9}/_{200}$, $4\,^{17}/_{264}$, $5\,^{25}/_{328}$ enz., waarbij de tellers met 8 en de noemers met 64 opklimmen.

Tot laatste voorbeeld zij $q = 5$, dan hebben wij de beide vormen $m + \frac{5m - 12}{5(10m + 1)}$ en $n + \frac{45n + 28}{5(10n + 9)}$, die de reeksen $^{48}/_{55}$, $1\,^{103}/_{105}$, $3\,^{3}/_{155}$, $4\,^{8}/_{205}$, $5\,^{13}/_{255}$ enz. en $^{28}/_{45}$, $1\,^{73}/_{95}$, $2\,^{118}/_{145}$, $3\,^{163}/_{195}$, $4\,^{208}/_{245}$ enz. geven.

Het is even gemakkelijk reeksen te verkrijgen, waardoor men getallen voor de hypothenusa en een der rechthoekszijden verkrijgt, want dan moet $\frac{z}{x} = \frac{p^2 + q^2}{2pq}$ zijn. Stelt men derhalve, even als boven, $p = 2mq + 1$ en $p = 2mq - 1$, dan vindt men:

$$m + \frac{2mq + 1 + q^2}{2q(2mq + 1)} \quad \text{en} \quad n + \frac{(2nq + 2q - 1)(2q - 1) + q^2}{2q(2nq + 2q - 1)}.$$

Is nu $q = 1$, dan geven de vormen

$$m + \frac{m + 1}{2m + 1} \quad \text{en} \quad n + \frac{n + 1}{2n + 1}$$

dezelfde reeks, namelijk $1\,^{2}/_{3}$, $2\,^{3}/_{5}$, $3\,^{4}/_{7}$, $4\,^{5}/_{9}$, $5\,^{6}/_{11}$ enz.

Is echter $q = 2$, dan hebben wij

$$m + \frac{4m + 5}{4(4m + 1)} \quad \text{en} \quad n + \frac{12n + 13}{4(4n + 3)},$$

de beide reeksen $1\,^{9}/_{20}$, $2\,^{13}/_{36}$, $3\,^{17}/_{52}$, $4\,^{21}/_{68}$, $5\,^{25}/_{84}$ enz. en $^{13}/_{12}$, $1\,^{25}/_{28}$, $2\,^{37}/_{44}$, $3\,^{49}/_{60}$, $4\,^{61}/_{76}$ enz.

Geheel andere reeksen kan men nog verkrijgen door $\frac{z}{y} = \frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2}$ te nemen, want dan kan men dezen schrijven $1 + \frac{2q^2}{p^2 - q^2}$. Voor $q = 1, 2, 3$ enz. wordt hij $1 + \frac{2}{p^2 - 1}$, $1 + \frac{8}{p^2 - 4}$, $1 + \frac{18}{p^2 - 9}$ enz. en deze geven de reeksen $1\,^{2}/_{3}$, $1\,^{2}/_{8}$, $1\,^{2}/_{15}$, $1\,^{2}/_{24}$, $1\,^{2}/_{35}$ enz., $1\,^{8}/_{5}$, $1\,^{8}/_{12}$, $1\,^{8}/_{21}$, $1\,^{8}/_{32}$, $1\,^{8}/_{45}$ enz. en $1\,^{18}/_{7}$, $1\,^{18}/_{16}$, $1\,^{18}/_{27}$, $1\,^{18}/_{40}$, $1\,^{18}/_{53}$ enz. Ook van deze soort kan men derhalve zoo veel reeksen vinden als men verkiest.

Digitized by Google

Aanteekening. Van Schooten deelt deze reeksen mede in de Zesde Afdeeling van het *Vijfde Boek der Mathematische Oefeningen*, in 1660 te *Amsterdam* uitgegeven, en zegt dat de twee reeksen, voor de onderstelling $q = 1$ en $p = 2m$ of $= 2m + 1$, hier medegedeeld, zijn gegeven door Stifel in zijne verklaring van de Algebra van Christoffel Rudolf en zes andere daarenboven door Simon Jacobs van Coburg, en dat deze verklaard had nog meerdere te kunnen geven, maar de wijze van opsporing niet leert. Van Schooten deelt daarop mede eene wijze van opsporing van Nicolaas Huberts van Persijn, welke uit de bekende reeksen schijnt afgeleid, en niet zeer duidelijk voorgesteld, gelijke uitkomsten voor bijzondere onderstellingen met de hier gegevene algemeene methode oplevert.

Red.

CLXIV. Voorstel. (*)

Door L. van Zanten Jz.

Een stoffelijk punt wordt met eene snelheid q in de richting OX *geworpen, en aangetrokken met eene kracht, evenwijdig aan den afstand, door een punt, dat zich eenparig beweegt in de richting* OY, *welke loodrecht is op de richting* OX. *Vrage naar de ligging van het stoffelijk punt, als zijne beweging evenwijdig wordt aan* OY?

Opgelost *door* L. van Zanten Jz. *en* H. A. Lorentz.

Oplossing *van* L. van Zanten Jz.

Nemen wij OX en OY als coördinaten-assen. Laat bij den aanvang der beweging het aantrekkende punt op een afstand a van den oorsprong zich bevinden, en eene snelheid β' hebben, dan zijn na t tijdseenheden zijne coördinaten: $\xi = 0$, $\eta = \beta' t + a$. Zijn op hetzelfde tijdstip de coördinaten van het aangetrokken punt x en y, dan is hun afstand:

$$r = \sqrt{\{(\eta - y)^2 + x^2\}}.$$

Zij de aantrekking op de eenheid van afstand u^2, dan vindt men voor de ontbondenen der aantrekking in de richting der x en der y: $u^2 r \times -\frac{x}{r} = -u^2 x$ en $u^2 r \times \frac{\eta - y}{r} = u^2(\eta - y)$,

derhalve
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -u^2 x. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

(*) Dit en het volgend voorstel is ontleend aan Jullien, *Problèmes de Mécanique*.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u^2(a + \beta' t - y). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{2dx}{dt} \times \frac{d^2x}{dt^2} = -2u^2x\frac{du}{dt},$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \beta^2 - u^2x^2,$$

omdat voor $t = 0$, $x = 0$ en $\frac{dx}{dt} = \beta$ is.

$$\frac{udx}{\sqrt{(\beta^2 - u^2x^2)}} = \pm udt, \quad (t = 0, \quad x = 0),$$

$$Bg\ Sin\frac{ux}{\beta} = \pm ut, \quad x = \frac{\beta}{u}\ Sin\ ut. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Stel in (2): $y = A\ Sin\ ut + B\ Cos\ ut$,
dan vindt men:

$$A = \int u(a + \beta' t)\ Cos\ ut\ dt, \quad B = \int u(a + \beta' t)\ Sin\ ut\ dt,$$

$$A = (a + \beta' t)\ Sin\ ut + \frac{\beta'}{u}\ Cos\ ut + A_1,$$

$$B = (a + \beta' t)\ Cos\ ut - \frac{\beta'}{u}\ Sin\ ut + B_1,$$

dus $\quad y = (a + \beta' t) + A_1\ Sin\ ut + B_1\ Cos\ ut \quad . \quad . \quad . \quad (4)$

of $\quad y = a + \beta' t - \frac{\beta'}{u}\ Sin\ ut - a\ Cos\ ut,$

omdat voor $t = 0$, y en $\frac{dy}{dt} = 0$ zijn.

Zal nu de beweging evenwijdig aan OY worden, dan moet de raaklijn aan de baan loodrecht op OX staan, en dus:

$$\frac{dy}{dx} = \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nu is: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{\beta' - \beta'\ Cos\ ut + au\ Sin\ ut}{\beta\ Cos\ ut},$

welke waarde alleen aan (5) kan voldoen, ingeval $Cos\ ut = 0$ is. Hieruit volgt $t = \frac{\pi}{2u}$, $x_1 = \frac{\beta}{u}$,

$$y_1 = a + \beta' \times \frac{\pi}{2u} - \frac{\beta'}{u} = a + \frac{\beta'}{2u}(\pi - 2).$$

CLXV. VOORSTEL.

Door L. VAN ZANTEN JZ.

Een projectiel beschrijft eene parabel. De meetkundige

Digitized by Google

plaats der snijpunten van twee raaklijnen aan twee punten der baan, waar de snelheden een standvastig product hebben, is een cirkel, die het brandpunt der parabel tot middelpunt heeft. Men vraagt het bewijs.

Opgelost *door* L. van Zanten Jz., C. Lely, C. de Haas *en* H. A. Lorentz.

Oplossing *van* L. van Zanten Jz.

Nemen wij de X-as horizontaal en de Y-as vertikaal naar beneden aan, dan zal de beweging van het projectiel in de richting der x eenparig, die in de richting der y eenparig versnellend zijn; wij hebben dus:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

en voor de parabel: $x^2=2py \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

dus: $x\frac{dx}{dt}=p\frac{dy}{dt}, \quad x\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=p\frac{d^2y}{dt^2},$

hierin de waarden uit (1) en (2) gesubstitueerd:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=pg, \quad \frac{dx}{dt}=\sqrt{pg} \quad \ldots\ldots (4)$$

Nu is:

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}=\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)}\sqrt{pg}=\sqrt{\frac{g}{p}(p^2+x^2)}. \quad (5)$$

Laten nu (x_1, y_1) en (x_2, y_2) punten zijn, die aan de voorwaarde voldoen, dat $v_1 \times v_2 = C$ (constant) is. Dan volgt uit (5) en (3), als (x, y) het snijpunt der bedoelde raaklijnen is:

$$\sqrt{\frac{g}{p}(p^2+x_1^2)}\sqrt{\frac{g}{p}(p^2+x_2^2)}=c$$

of $$p^4+p^2(x_1^2+x_2^2)+x_1^2x_2^2=\frac{p^2c^2}{g^2} \quad \ldots (6)$$

$$xx_1=p(y+y_1) \qquad x_1(x_1+x_2)=2p(y+y_1)$$

$$xx_2=p(y+y_2) \qquad x_1^2+x_1x_2=2py+x_1^2$$

$$x(x_1-x_2)=p(y_1-y_2)=\tfrac{1}{2}(x_1^2-x_2^2) \qquad x_1x_2=2py \quad \ldots (7)$$

$$2x=x_1+x_2 \qquad x_1^2+x_2^2=4x-4py. \quad (8)$$

De waarden uit (7) en (8) in (6) gesubstitueerd geven,

Digitized by Google

$$p^4 + 4p^2(x^2 - py) + 4p^2y^2 = \frac{p^2c^2}{g^2}$$

$$x^2 + y^2 - py = \tfrac{1}{4}\left(\frac{c^2}{g^2} - p^2\right),$$

zijnde de vergelijking eens cirkels, die zijn middelpunt heeft op de Y-as op een afstand $\frac{1}{2}p$ van den oorsprong, dus in het brandpunt der parabel.

Oplossing *van* H. A. Lorentz.

De snelheid, die het projectiel in eenig punt der parabel heeft, zoo als bekend is:

$$v = \frac{a}{Sin\,\varphi},$$

waarin a, de horizontale component der snelheid, dus voor ieder punt dezelfde grootheid, is en ϕ den hoek voorstelt, dien de raaklijn aan de parabel met de as maakt. Beschouwen wij dus twee punten der parabel, die op de in het vraagstuk aangewezen manier bij elkander behooren, dan is

voor het eerste punt $\quad v_1 = \dfrac{a}{Sin\,\phi_1}$

en voor het tweede punt $\quad v_2 = \dfrac{a}{Sin\,\phi_2}$

en de voorwaarde $v_1 v_2 = p$, waarin p een constante is, kan nu vervangen worden door:

$$\frac{a^2}{Sin\,\varphi_1\ Sin\,\varphi_2} = p,$$

of $$Sin\,\phi_1\ Sin\,\phi_2 = \frac{a^2}{p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(Zie fig. 60.) Zij nu F het brandpunt der parabel, T de top, dus TE $\perp$ FT de raaklijn aan den top. Laat verder CA en DB twee bij elkaâr behoorende raaklijnen zijn, waarvoor de voorwaarde (1) geldt; vereenigt men dan F met de punten A en B waar die raaklijnen TE snijden, dan staan FA en FB loodrecht op de raaklijnen.

Hieruit volgt dat, wanneer de raaklijnen elkaâr in P snijden, om den vierhoek FAPB een cirkel kan beschreven worden en dat FP een middellijn van dien cirkel is. Nu is klaarblijkelijk

$$\angle APF = \angle ABF \quad \text{en} \quad \angle FAP = 90^\circ = \angle FTB;$$

dus zijn de driehoeken APF en TBF gelijkvormig, waaruit volgt:

Digitized by Google

$$PF : BF = AF : FT,$$

dus:
$$PF = \frac{AF \times BF}{FT} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Nu is echter $\angle FAT = \phi_1$ en $\angle FBT = \phi_2$, dus

$$AF = \frac{TF}{Sin\,\varphi_1}, \quad BF = \frac{TF}{Sin\,\varphi_2}.$$

Hierdoor gaat (2) over in:

$$PF = \frac{TF}{Sin\,\varphi_1\,Sin\,\phi_2},$$

of (1) in aanmerking genomen:

$$PF = \frac{p.TF}{a^2}.$$

Daar hierin geen grootheden voorkomen, die van den bijzonderen stand der raaklijnen afhangen, is PF constant, en dus de meetkundige plaats van P een cirkel, met F tot middelpunt. Wij hebben in het bovenstaande de twee punten der baan aan verschillende kanten van de as genomen; maar ook, wanneer zij aan dezelfde zijde liggen, gaat de redeneering door en vindt men denzelfden cirkel.

CLXVI. VOORSTEL.

Door J. H. SCHÄFER.

De verhouding van het aantal der onderlinge snijpunten van de verlengde diagonalen en zijden eens veelhoeks binnen, — *en het aantal der onderlinge snijpunten van de verlengde diagonalen en zijden,* buiten — *zijn omtrek, (mits de veelhoek geene inspringende hoeken hebbe) is die van* 1 : 2. *Men vraagt dit in het algemeen voor den n-hoek te bewijzen en, ter toelichting, bij den regelmatigen zes-hoek aantetoonen.*

OPGELOST *door* J. H. SCHÄFER.

OPLOSSING *van* J. H. SCHÄFER.

1. Als bekend wordt aangenomen:

a. dat p willekeurige lijnen, gelegen in een plat vlak, zich in

$$\tfrac{1}{2}p.(p-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

punten snijden;

b. dat elk hoekpunt van een n-hoek, [waarin de $(n-3)$ diagonalen en de twee aangrenzende zijden (in 't geheel $(n-1) = p$ lijnen) te zamen komen en verlengd zijnde, zich snijden,] naar aanleiding van (α), als een $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$-voudig punt moet beschouwd worden en dit aantal *opgeloste*

Digitized by Google

enkelvoudige punten voor een n-hoek alzoo bedraagt,

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

punten;

c. dat van een n-hoek het getal zijden en diagonalen bedraagt $\tfrac{1}{2}n(n-1) = p$ lijnen, die, verlengd zijnde, zich dus zullen snijden in

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)\{n(n-1)-2\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma)$$

punten en

d. dat bijgevolg het aantal snijpunten, waarin deze verlengde diagonalen *en* zijden zich *binnen* en *buiten* den omtrek eens n-hoek snijden, zal zijn:

$$(\gamma)-(\beta) = 3.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \quad . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

2. Dit vooropgesteld, zal het er slechts op aankomen in 't algemeen te bewijzen, dat het getal S dier punten, die *binnen* den n- hoek liggen (en alleen door de onderlinge snijding der diagonalen kunnen ontstaan) moet bedragen:

$$S = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\epsilon)$$

want is dit zoo, dan is het getal der *buiten* den omtrek gelegen punten

$$(\delta)-(\epsilon) = 2.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \quad . \; . \; . \; . \quad (\zeta)$$

en zal daarmede de gestelde verhouding van *binnen*- en *buiten*-punten $= 1:2$, bewezen zijn.

3. Om dit in 't algemeen aantetoonen, zij hiertoe (fig. 61) een gedeelte van een n-hoek, waarvan de uitspringende hoekpunten door A_1, A_2, A_3 enz. A_{n-2}, A_{n-1} en A_n worden voorgesteld; dan is het duidelijk dat uit elk der beide eerste hoekpunten A_1 en A_2, $(n-3)$ diagonalen naar de overige hoekpunten zullen kunnen getrokken worden en dit getal bij en uit elk der volgende hoekpunten A_3, A_4 enz. A_{n-3} en A_{n-2}, naar al de overige getrokken, achtereenvolgens met 1 diagonaal verminderen zal, en die laatste diagonaal zal zijn, de lijn die de hoekpunten A_{n-2} en A_n verbindt.

4. Nu zal men terstond ontdekken dat de $(n-3)$ diagonalen, die uit A_1 naar de overige hoekpunten A_3 tot en met A_{n-1}, getrokken zijn, door die uit A_2 naar A_4 tot en met A_n, achtereenvolgens gesneden worden in de volgende reeks van punten, als:

Digitized by Google

A_1A_3, door A_2A_4. . . . . in 1 punt.
A_1A_3 en A_1A_4, door A_2A_5. . . . . » 2 punten.
A_1A_3, A_1A_4 en A_1A_5, door A_2A_6 . . . . » 3 »
enz.
A_1A_3 tot en met A_1A_{n-4}, door A_2A_{n-3} » $(n-6)$ »
A_1A_3 » » » A_1A_{n-3}, » A_2A_{n-2} » $(n-5)$ »
A_1A_3 » » » A_1A_{n-2}, » A_2A_{n-1} » $(n-4)$ »
en eindelijk:
A_1A_3 » » » A_1A_{n-1}, » A_2A_{n-1} » $(n-3)$ » (*)

Het aantal snijpunten dezer $(n-3)$ diagonalen uit A_1 door de $(n-3)$ uit A_2 bedraagt dus, (omdat de verkregen reeks uit $(n-3)$ termen bestaat), $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$. . . . . (A) punten.

5. Let men nu in fig. 61 op, dat door het trekken der diagonalen A_1 en A_2, er van het hoekpunt A_4 af tot en met het hoekpunt A_{n-1}, telkens een koppel van twee diagonalen bijeenkomt en dat het getal der diagonalen, die nu uit A_3 tot en met A_n kunnen getrokken worden, bedraagt $(n-4)$, dan zal het aantal snijpunten der diagonalen uit A_1 en A_2, gesneden door die uit A_3, alsnu bedragen:

$$2(1+2+\text{enz.}+(n-3)+(n-4))=\tfrac{2}{2}(n-3)(n-4).\text{(B)}$$

Evenzoo zal men vinden dat dit getal snijpunten, ontstaan door de diagonalen die uit A_1, A_2 en A_3 getrokken zijn en door de $(n-5)$ diagonalen die men alsnu uit A_4 naar A_6 tot en met A_n moet trekken, gesneden worden, daarbij (zie de fig. 61) opmerkende dat er nu van het snijpunt A_5 af tot en met A_{n-1} telkens een koppel van drie diagonalen bijeenkomt, bedraagt:

$$3(1+2+\text{enz.}+(n-4)+(n-5))=\tfrac{3}{2}(n-4)(n-5).\text{(C)}$$

Aldus voort redeneerende, zal men voor de volgende snijpunten vinden als:

(*) 't Is duidelijk dat het aantal snijpunten met dat der getrokken diagonalen A_1A_3, A_1A_4 enz. tot en met A_1A_{n-s}, overeenkomt en (men lette er op) twee eenheden minder bedraagt dan het cijfer van den laatsten index van de laatste letter A der laatst getrokken diagonaal. Is die laatst getrokken diagonaal dus $A_1A_{(n-s)}$, dan zal bijgevolg het aantal hiertoe behoorende snijpunten in 't algemeen zijn $n-(s+2)$. Is nu $s=4$, 3, 2 of 1, dan zijn ten slotte de vier laatste aantallen snijpunten van A_1A_3 tot en met $A_1A_{(n-s)}$ door $A_2A_{n-(s+1)}$, $(n-6)$, $(n-5)$, $(n-4)$ en $(n-3)$.

Digitized by Google

Voor de diagonalen getrokken uit A_1, A_2, A_3 en A_4, gesneden door de $(n-6)$ uit A_5 naar A_7 tot en met A_n,

$$4(1+2+\text{enz.}+(n-5)+(n-6))=\tfrac{4}{2}(n-5)(n-6);(D)$$

Voor die getrokken uit A_1, A_2, A_3, A_4 en A_5 door de $(n-7)$ uit A_6 naar A_8 tot en met A_n,

$$5(1+2+\text{enz.}+(n-6)+(n-7))=\tfrac{5}{2}(n-6)(n-7).(E)$$

enz.

in welke waarden (A), (B) . . . (E) de wet van opvolging allerduidelijkst is en niet minder, dat de laatste som dezer snijpunten zal verkregen worden door de snijding der $(n-3)$ diagonalen die bij het hoekpunt A_{n-1} te zamen komen en der laatste en eenig overblijvende diagonaal die de hoekpunten A_{n-2} en A_n verbindt, dit getal punten of de laatste term der reeks zal zijn $(n-3)$; voorts het getal termen dier reeks insgelijks zal bedragen $(n-3)$ en ten slotte het gezamenlijk getal *binnen* snijpunten zal verkregen worden door het sommeren dier termen.

6. Men kan zich de moeite getroosten en die som regtstreeks afleiden uit de verkregen termen (A), (B), (C) enz., doch opgemerkt hebbende dat de laatste term er van is $(n-3)$ en dus vermoedelijk, en als werkelijk het geval is, de laatste termen eenvoudiger zullen zijn, vange men die reeks liever aan te beginnen met dien term $(n-3)$.

Die laatste termen komen terstond door de volgende beschouwing voor den dag; immers wanneer van de volgende drie rijen grootheden, als:

1e. rij	$(n-3)$,	$(n-4)$,	$(n-5)$,	enz.
2e. »	$\frac{A_1}{A_2}$,	$\frac{A_1A_2}{A_3}$,	$\frac{A_1A_2A_3}{A_4}$,	»
3e. »	$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$,	$\frac{2}{2}(n-3)(n-4)$,	$\frac{3}{2}(n-4)(n-5)$	»

van elke groep van drie dezer grootheden de letters A der 2de rij, die boven de dwarsstreep geplaatst zijn, de diagonalen voorstellen, die uit de hoekpunten, door die letters aangeduid, naar al de overige kunnen getrokken worden — en de letters die onder de strepen staan, het aantal diagonalen (in de 1ste rij vermeld), waardoor de eersten gesneden worden; voorts die der 3de rij het aantal der door die snijding gevonden punten, dan zal het dadelijk in 't oog vallen, hoe elke dezer laatste grootheden of termen der reeks (A), (B), (C),

Digitized by Google

enz., uit de twee grootheden die er boven geplaatst zijn, is af te leiden en dat het algemeen schéma dezer groepen zal zijn:

$$(n-x) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{A_1 A_2 \ldots\ldots A_{(x-2)}}{A_{x-1}} \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{(x-2)}{2}(n-(x-1))(n-x) \ldots\ldots (3)$$

6. Uit hetgeen in de paragrafen 4 en 5 hierboven, omtrent het van $(n-3)$ diagonalen af telkens verminderen met 1 tot op eene enkele diagonaal gezegd is, zal het nu duidelijk zijn, dat om de achtereenvolgende termen, beginnende met den laatsten term der reeks (A), (B), (C) enz., te verkrijgen, men slechts in (1) van 't bovenstaand schéma, achtereenvolgens $(n-x) = 1, 2, 3$ enz. behoeft te stellen, en de hierdoor verkregen waarden van $x = (n-1), (n-2), (n-3)$ enz. achtereenvolgens in (3) van 't schéma moet substitueren.

Zulks doende, verkrijgt men de volgende meer eenvoudige reeks als:

$$(n-3),\quad 3(n-4),\quad 6(n-5),\quad 10(n-6) \text{ enz. } . (R)$$

in welke waarden de wet van opvolging weder terstond in 't oog valt.

Men zal zich gemakkelijk overtuigen dat die reeks is van den 3den rang, hebbende tot:

1°. eersten term. . . . . $a = (n-3)$,
2°. » » der 1ste Versch. . . $A = (2n-9)$,
3°. » » » 2de » . . . . $B = (n-9)$ en
4°. gelijke termen » 3de » . . . . $C = -3$.

Substituerende deze waarden in de bekende formule voor de som S van x termen (hier $= (n-3)$) eener hoogere reeks, dan komt er:

$$S = \frac{(n-3)}{1}.(n-3) + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \;.\; 2}(2n-9)$$
$$+ \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3}.(n-9)$$
$$- \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4}.3.$$

Door verdrijving der breuken, werkelijke vermenigvuldiging

Digitized by Google

en vereeniging der gelijkslachtige termen, wordt hieruit gemakkelijk gevonden:

$$24S = n^4 - 6n^3 + 4n^2 - 6n$$

en hieruit wederom even gemakkelijk afgeleid:

$$S = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4},$$

hetgeen, blijkens hetgeen in paragraaf 2 vermeld is, slechts moest worden geconstateerd, om het gestelde in 't onderhavig voorstel buiten twijfel te stellen; en welke waarde voor S, doch langs veel omslachtiger weg, ook zou verkregen zijn door het sommeren der termen (A), (B), (C) enz. der eerst verkregen reeks.

8. Het voorgedragene op een regelmatigen zeshoek toepassende, vindt men:

1°. door formule (γ) voor de gezamenlijke snijpunten . . . . . 105 punten.

2°. door formule (β) voor de 6 *tien*voudige hoekpunten, ontstaan door de 5 lijnen die zich in elk der 6 hoekpunten snijden . . . . . 60 »

dus:

3°. voor de *binnen-* en *buiten*punten te zamen 45 »

en naar aanleiding der bewezen verhouding voor een zeshoek, *regelmatig* of *niet*, gevende:

15 *binnen-* en
30 *buiten*punten.

en in fig. 62, voorstellende de verlengde zijden en diagonalen eens regelmatigen zeshoeks ABCDEF, gevonden worden, indien men in aanmerking neemt dat daarbij moet beschouwd worden:

1°. het middelpunt O des veelhoeks, waarin zich de 3 diagonaal-middellijnen snijden als een drievoudig punt;

2°. de punten, waarin zich de 3 groepen, elke van 3 evenwijdige lijnen (elke groep ontstaan door 2 overstaande evenwijdige zijden en tusschen gelegen diagonaal-middellijn) zich snijden, als 3 op oneindigen afstand gelegen drievoudige punten en die alzoo te zamen als 9 afzonderlijke punten moeten geteld worden, en

3°. elke der 3 groepen van 2 evenwijdige diagonalen, (elke groep ontstaan door verbinding der uiteinden van 2

Digitized by Google

tegenoverstaande evenwijdige zijden) zich op oneindigen afstand te snijden en alzoo nog 3 afzonderlijke punten te geven.

Men verkrijgt dan met behulp der fig. voor:

a. Binnenpunten:

voor het drievoudig middelpunt	3 punten.
voor de punten gelegen op den omtrek van den binnen-zeshoek *abcdef*	12 »
te zamen	15 »

b. Buitenpunten:

voor de 3 in 2°. vermelde en op oneindigen afstand gelegen drievoudige punten	9 punten.
voor de 3 in 3°. vermelde en op oneindigen afstand gelegen enkele punten	3 »
voor de symmetriek gelegen punten A′	12 »
» » » » » B′	6 »
te zamen	30 »

Overeenstemmende met de vooropgestelde en bewezen verhouding van 1 : 2 dier punten.

CLXVII. VOORSTEL.

Door J. C. EGER.

De middellijn 2r eens cirkels is in twee deelen gedeeld, die tot elkander in rede staan als p:q. Op elk dezer deelen, als middellijn genomen, is weder een cirkel beschreven en aan deze beide laatstgenoemde cirkels eene gemeenschappelijke raaklijn getrokken, die den grooten cirkel in twee punten snijdt. Men vraagt de lengte dezer koorde te berekenen, uitgedrukt in den straal des grooten cirkels.

OPGELOST *door* J. C. EGER, C. LELY *en* G. J. D. MOUNIER.

OPLOSSING *van* J. C. EGER *en* G. J. D. MOUNIER.

In fig. 63 zijn M, K en L de middelpunten van den grooten en de beide kleine cirkels. Trekt men nu uit een punt A in de verlengde van de middellijn BD gemeenschappelijke raaklijnen tot de twee kleinere cirkels, de eene boven, de andere beneden de middellijn, dan zullen deze raaklijnen gelijke richting ten opzichte van de middellijn BD en gelijke lengte hebben, omdat de middelpunten der beide aangeraakte cirkels op de middellijn van den grooten cirkel liggen. Wij behoeven dus slechts de lengte van ééne dezer raaklijnen te bepalen, of wel

Digitized by Google

de lengte van dat gedeelte, hetwelk binnen den omtrek des grooten cirkels zal liggen, de lengte van de koorde HE.

Zij nu $BM = r$, $BK : CL = p : q$ (p en q zijn getallen), dan is: $BK = \frac{pr}{p+q}$, $CL = \frac{qr}{p+q}$.

Trekt men uit G evenwijdig aan ABD eene lijn welke CF snijde in N, dan is:

$$AK : GK = GN : FN = KL : FL - LN = KL : FL - GK,$$

derhalve: $$AK = \frac{BK \,.\, KL}{FL - BK} = \frac{\frac{pr}{p+q} \,.\, r}{\frac{qr}{p+q} - \frac{pr}{p+q}} = \frac{pr}{q-p}.$$

Nu vindt men wijders:

$$AB = AK - BK = \frac{2p^2 r}{q^2 - p^2},$$

$$\square AG = \square AK - \square KG = \frac{4p^2 q r^2}{(q^2 - p^2)^2}; \quad AG = \frac{2pr}{q^2 - p^2}\sqrt{pq},$$

$$AM = AB + BM = \frac{(p^2 + q^2) r}{q^2 - p^2}.$$

Trekt men MO evenwijdig aan KG, dan is:

$$AO = \frac{AM \,.\, AG}{AK} = 2r \,.\, \frac{(p^2 + q^2)\sqrt{pq}}{(q^2 - p^2)(p+q)}.$$

Nu is $AO : MO = AG : GK$, derhalve $MO = r \,.\, \frac{p^2 + q^2}{(p+q)^2}$, en eindelijk $EH = 2EO =$ (daar $\square EO = \square EM - \square MO$)

$$= 2r\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p^2 + q^2}{(p+q)^2}\right)^2\right]}.$$

Er is nog eene derde gemeenschappelijke raaklijn der twee cirkels BGC en CFD, welke in C loodrecht staat op ABD: de lengte van de koorde, voor zooverre die raaklijn binnen den cirkel valt, daar het vierkant op de halve lengte gelijk is aan den rechthoek onder de middellijnen der twee kleinere cirkels BC en CD, is $= \frac{4\sqrt{pq}}{p+q} \,.\, r$.

CLXVIII. Voorstel.

Door J. W. Tesch.

In een gegeven driehoek ABC *eene lijn te trekken, die* AB

Digitized by Google

in D *en* AC *in* E *snijde, zoo dat de stukken* BD, CE *en* DE *gelijk zijn of eene gegeven verhouding hebben.*

OPGELOST *door* J. W. TESCH, C. LELY *en* H. A. LORENTZ.

OPLOSSING *van* J. W. TESCH.

Laat gegeven zijn, dat tusschen de stukken BD $= x$, CE $= y$ en DE $= z$ de verhouding moet bestaan

$$x : y : z = p : q : r,$$

waarin p, q, r drie gegeven lijnen of getallen voorstellen.

(Zie fig. 64.) Neem AG $= \frac{p}{q} b$ en beschrijf uit G met GH $= \frac{r}{q} b$ tot straal een cirkelboog, snijdende CB in H. Trek GH en GC, vervolgens BF // GH; FE // GA en ED // BF, dan zijn BD, DE en EC de gevraagde stukken.

Immers: $\quad CF : CG = BF : GH$

en $\quad CF : CG = CE : CA,$

bijgevolg $\quad CE : \underset{\overline{DE}}{BF} = CA : GH,$

$$y : z = b : \frac{r}{q} b$$

of $\quad y : z = q : r \ldots\ldots\ldots (1)$

Verder: $\quad CE : CA = EF : AG$

of $\quad y : z = b : \frac{p}{q} b,$

$$z : y = p : q \ldots\ldots\ldots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$z : y : z = p : q : r.$$

AANMERKINGEN. 1°. Daar de lijn GH in het algemeen CB in twee punten zal snijden, zijn er ook twee oplossingen. Voor het tweede geval kunnen echter de punten D en E op het verlengde van BA en CA komen te liggen.

2°. Wordt $p = q = r$, dan wordt AG $=$ GH $=$ AC.

3°. Is $p : q : r = a : b : c$, dan wordt AG $= \frac{a}{b} \cdot b = a$ en GH $= \frac{c}{b} \cdot b = c$.

CLXIX. VOORSTEL.

Door J. W. TESCH.

Wordt gevraagd een meetkundig bewijs der stelling, voorko-

Digitized by Google

mende bij Chasles, Traité de Geométrie Supérieure, *p.* 488: »*de lijn, die de middelpunten der diagonalen van een vierhoek om een' cirkel beschreven vereenigt, gaat door het middelpunt van den cirkel.*

Opgelost *door* J. W. Tesch.

Oplossing *van* J. W. Tesch.

(Zie fig. 65.) Zij E het midden van AC en F dat van BD. Vereenig E met O en F met O, dan zullen wij moeten aantoonen dat EOF eene rechte lijn is.

Nu is, omdat $AB + CD = AD + BC$, ook

$\triangle ABO + \triangle CDO = \triangle ADO + \triangle BCO = \frac{1}{2}$ vierhoek . . . (1)

Maar tevens:

$\frac{1}{2}$ vierhoek $= \frac{1}{2} \triangle ABC + \frac{1}{2} \triangle ADC = \triangle ABE + \triangle CED$. . (2)

Uit (1) en (2) volgt:

$$\triangle ABO - \triangle ABE = \triangle CED - \triangle COD.$$

Deze uitdrukking is gemakkelijk te herleiden tot:

$$\triangle BOE - \triangle AOE = \triangle DOE - \triangle COE \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Maar $\triangle AOE = \triangle COE$ (omdat $AE = CE$)

bijgevolg $\triangle OBE = \triangle OED$,

tevens $\triangle OBF = \triangle OFD$ (omdat $BF = DF$)

vierh. BEOF = vierh. DEOF.

Daar nu BED een driehoek is en F het midden van BD, moet noodzakelijk EOF eene rechte lijn vormen.

CLXX. Voorstel.

Door A. Eecen.

Men vraagt het zwaartepunt te bepalen van een afgeknotten kegel, wanneer de specifieke massa der verschillende punten evenredig is aan den afstand, waarop zij van het grondvlak verwijderd zijn.

Opgelost *door* J. M. Heijbroek, A. Eecen *en* C. Lelij.

Oplossing *van* J. M. Heijbroek.

Noemt men de coördinaten van een punt der beschrijvende lijn x en y, en de dichtheid in de laag die door het punt gaat $= z$, dan is volgens eene bekende formule voor elk onwentelingslichaam, welke ook de betrekking tusschen x en y zij, indien Z het zwaartepunt is,

$$OZ = \frac{\int y^2 z x dx}{\int y^2 z dx};$$

Digitized by Google

nu is volgens de onderstelling de dichtheid z evenredig aan x, waardoor men heeft: $OZ = \frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 x dx}$.

Voor den kegel is de beschrijvende lijn eene rechte lijn; stel de hoogte van den geheelen kegel $= h'$ en den halven tophoek $= \alpha$, alsmede de hoogte van den afgeknotten kegel $= h$, dan is: $y = (h' - x) tg\, \alpha$ en $y^2 = (h' - x)^2 tg^2 \alpha$; deze waarde, in de bovenstaande formule gevoegd, geeft na herleiding:

$$OZ = \frac{\int (h' - x)^2 x^2 dx}{\int (h' - x)^2 x dx};$$

van deze breuk teller en noemer integrerende tusschen de grenzen $x = 0$ en $x = h$ en in aanmerking nemende dat

$$h' = \frac{Rh}{R - r},$$

waar R de straal van het grondvlak, r de straal van de doorsnede op een afstand $h' - h$ van het grondvlak, vindt men na herleiding voor de plaats van het zwaartepunt:

$$OZ = {}^2/_5 \frac{R^2 + 3Rr + 6r^2}{R^2 + 2Rr + 3r^2} h.$$

CLXXI. Voorstel.

Door A. Eecen.

In eene parabel zijn koorden getrokken, zoo dat de inhouden der afgesneden stukken constant zijn. Men vraagt de meetkundige plaats van de middelpunten dier koorden.

Opgelost *door* A. Eecen, C. Lelij *en* G. de Vries.

Oplossing *van* A. Eecen.

Zij de vergelijking der parabel $y^2 = 2px$ en stelle men de coördinaten van de twee eindpunten eener koorde in de parabel getrokken (x_1, y_1) en (x_2, y_2), dan is de inhoud van het parabolisch segment tusschen die twee eindpunten begrepen

$$= \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}, \text{ stel } = q^3 \quad \ldots\ldots (1)$$

De coördinaten van het middelpunt der koorde zijn:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{4p}, \\ Y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Digitized by Google

Elimineert men nu uit (1) en (2) y_1 en y_2, dan verkrijgt men de vergelijking der gezochte plaats.

Nu is: $\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{4}(y_1 + y_2)^2 = \frac{1}{4}(y_2 - y_1)^2$, derhalve substituerende:

$$2pX - Y^2 = \tfrac{1}{4}q^2\sqrt[3]{144p^2},$$
$$Y^2 = 2pX - \tfrac{1}{2}q^2\sqrt[3]{18p^2}.$$

En de meetkundige plaats is dus eene parabel. Neemt men: $X' = X - \frac{q^2}{4p}\sqrt[3]{18p^2}$, dan verkrijgt men, bij deze verschuiving van de as der ordinaten, voor de vergelijking der parabel:

$$Y^2 = 2pX'.$$

CLXXII. VOORSTEL.

Door J. W. TESCH.

Wordt gevraagd de meetkundige plaats van het snijpunt der twee raaklijnen, getrokken aan eene centrale kegelsnede zoo dat deze raaklijnen respectivelijk met de beide assen der kegelsnede gelijke hoeken maken.

OPGELOST *door* H. A. LORENTZ, J. W. TESCH *en* G. J. D. MOUNIER.

OPLOSSING *van* H. A. LORENTZ.

Laat de vergelijking der gegeven kegelsnede op hare assen zijn:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en zij c de lineaire excentriciteit.

Voor de vergelijking van eene raaklijn aan de kegelsnede vindt men gemakkelijk, wanneer α de hoek is, dien de uit het middelpunt op de raaklijn neergelaten loodlijn met de x-as maakt:

$$x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Sin} \alpha = \pm \sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Wij kunnen nu in twee richtingen eene raaklijn trekken, die met de y-as den zelfden hoek maakt als (1) met de x-as. Voor de eerste richting moeten wij in (1) in plaats van α schrijven $90° - \alpha$, en verkrijgen dan de vergelijking der tweede raaklijn:

$$x \operatorname{Sin} \alpha + y \operatorname{Cos} \alpha = \pm \sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Voor de tweede der genoemde richtingen daarentegen moeten wij in (1) in plaats van α schrijven $90° + \alpha$, waardoor wij voor de vergelijking der nieuwe raaklijn verkrijgen:

$$-x \operatorname{Sin} \alpha + y \operatorname{Cos} \alpha = \pm \sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha} \quad . \; . \; (3)$$

Digitized by Google

Wij zullen eerst de meetkundige plaats van het snijpunt van (1) en (2), daarna die van het snijpunt van (1) en (3) zoeken.

I. Om het eerste te doen, moeten wij uit (1) en (2) α elimineeren. Verhef daartoe beide vergelijkingen tot de tweede macht en tel ze bij elkander op; dit geeft:

$$x^2 + y^2 + 2xy \, Sin\, 2\alpha = 2a^2 - c^2,$$

dus:
$$Sin\, 2\alpha = \frac{2a^2 - c^2 - x^2 - y^2}{2xy} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Door vervolgens (1) tot de tweede macht te verheffen en met 2 te vermenigvuldigen, verkrijgen wij:

$$2x^2 \, Cos^2 \alpha + 2y^2 \, Sin^2 \alpha + 4xy \, Sin\, \alpha \, Cos\, \alpha = 2a^2 - 2c^2 \, Sin^2 \alpha$$

of:

$$x^2(1 + Cos\, 2\alpha) + (y^2 + c^2)(1 - Cos\, 2\alpha) + 2xy \, Sin\, 2\alpha = 2a^2. \quad (5)$$

Uit (4) volgt echter:

$$Cos\, 2\alpha = \frac{1}{2xy} \sqrt{4x^2y^2 - \{2a^2 - c^2 - x^2 - y^2\}^2}.$$

Substitueert men nu de waarden van $Sin\, 2\alpha$ en $Cos\, 2\alpha$ in (5), dan komt er na vermenigvuldiging met $2xy$:

$$x^2[2xy + \sqrt{4x^2y^2 - (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2}]$$
$$+ (y^2 + c^2)[2xy - \sqrt{4x^2y^2 - (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2}]$$
$$+ 2xy(2a^2 - c^2 - x^2 - y^2) = 4a^2xy$$

of: $(x^2 - y^2 - c^2)\sqrt{4x^2y^2 - (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2} = 0.$

Wij kunnen deze vergelijking splitsen in de twee volgende:

$$\sqrt{4x^2y^2 - (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2} = 0. \; . \; . \quad (6)$$

en
$$x^2 - y^2 - c^2 = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Uit de vergelijking (6) volgt:

$$4x^2y^2 = (2a^2 - c^2 - x^2 - y^2)^2$$
$$\pm 2xy = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2$$
$$(x \pm y)^2 = 2a^2 - c^2, \quad x \pm y = \pm\sqrt{2a^2 - c^2}.$$

Derhalve stelt (6) vier rechte lijnen voor, die, zooals men gemakkelijk vindt, juist de vier raaklijnen zijn, die hoeken van 45° met de assen maken.

Hoe wij deze hier vinden, is gemakkelijk te begrijpen, want voor $\alpha = 45°$ of 135° vallen (1) en (2) samen en kan elk punt van (1) als het snijpunt worden aangemerkt.

De vergelijking (7) stelt de eigenlijke meetkundige plaats voor, namelijk een gelijkzijdige hyperbel met het zelfde

Digitized by Google

middelpunt als de gegeven kegelsnede en hare brandpunten tot toppen.

II. Om de meetkundige plaats van het snijpunt van (1) en (3) te bepalen, tellen wij weer de vierkanten van beide vergelijkingen bij elkander op en vinden dan dadelijk:

$$x^2 + y^2 = 2a^2 - c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

dus een cirkel voor de meetkundige plaats. Dit is trouwens een bekend resultaat, want de lijnen (1) en (3) staan loodrecht op elkander.

CLXXIII. Voorstel. (*)

Door G. Schouten.

Zij ϕ eene functie van $2n$ veranderlijken $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, $u_1, u_2 \ldots u_n$ homogeen en van den tweeden graad ten opzichte van de laatste n dezer veranderlijken; als men stelt

$$\frac{d\phi}{du_1} = p_1, \quad \frac{d\phi}{du_2} = p_2 \ldots\ldots\ldots \frac{d\phi}{du_n} = p_n$$

en men ϕ uitdrukt in functie van $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, dan zal men hebben, welk ook het geheele getal k zij,

$$\frac{d\phi}{dp_k} = u_k, \quad \frac{d\phi}{dx_k} = -\left(\frac{d\phi}{dx_k}\right),$$

waarin $\frac{d\phi}{dx_k}$ de afgeleide voorstelt van ϕ ten opzichte van x_k, als ϕ uitgedrukt is in de oorspronkelijke veranderlijken $x_1 \ldots x_n$, $u_1 \ldots v_n$.

Opgelost *door* G. Schouten.

Oplossing *van* G. Schouten.

De functie ϕ kunnen wij voorstellen door:

$$\phi = u_1 (A_1^1 u_1 + A_2^1 u_2 + \ldots\ldots + A_n^1 u_n)$$
$$+ u_2 (A_1^2 u_1 + \ldots\ldots + A_n^2 u_n) + \ldots\ldots + u_n (A_1^n u_1 + \ldots\ldots + A_n^n u_n),$$

waarin A_p^k alleen functie van $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ is.

Volgens opgaaf is:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d\phi}{du_1} = p_1 = (A_1^1 u_1 + \ldots\ldots + A_n^1 u_n) + (A_1^1 u_1 + A_1^2 u_1 + \ldots\ldots + A_1^n u_n) \\
\frac{d\phi}{du_2} = p_2 = (A_1^2 u_1 + \ldots\ldots + A_n^2 u_n) + (A_2^1 u_1 + A_2^2 u_2 + \ldots\ldots + A_2^n u_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\phi}{du_n} = p_n = (A_1^n u_1 + \ldots\ldots + A_n^n u_n) + (A_n^1 u_1 + A_n^2 u_2 + \ldots\ldots + A_n^n u_n)
\end{array}\right\} (1)$$

(*) Dit en het volgend voorstel zijn zonder oplossing opgegeven in Bertrand, *Calcul Différentiel*.

Digitized by Google

Uit deze vergelijkingen volgt onmiddelijk, dat

$$\phi = \tfrac{1}{2}(p_1 u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_n u_n), \quad \ldots \quad (2)$$

zoodat $\frac{d\phi}{dp_k}$ kan voorgesteld worden door:

$$\frac{d\phi}{dp_k} = \tfrac{1}{2}\left(p_1 \frac{du_1}{dp_k} + p_2 \frac{du_2}{dp_k} + \ldots + p_n \frac{du_n}{dp_k} + u_k\right),$$

waarin u moet beschouwd worden als functie van $p_1, p_2, \ldots p_n$, door oplossing uit (1) te verkrijgen.

In deze uitdrukking p vervangende door $\frac{d\phi}{du}$, wordt zij

$$\frac{d\phi}{dp_k} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{du_1}\frac{du_1}{dp_k} + \frac{d\phi}{du_2}\frac{du_2}{dp_k} + \ldots + \frac{d\phi}{du_n}\frac{du_n}{dp_k} + u_k\right),$$

waarvoor nu kan geschreven worden:

$$\frac{d\phi}{dp_k} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dp_k} + u_k\right),$$

welke geeft:

$$\frac{d\phi}{dp_k} = u_k,$$

waardoor het eerste gedeelte der opgaaf bewezen is.

Om het tweede gedeelte te bewijzen, differentiëeren we (2) ten opzichte van x_k, dan is volgens de opgaaf:

$$2\left(\frac{d\phi}{dx_k}\right) = u_1 \frac{dp_1}{dx_k} + u_2 \frac{dp_2}{dx_k} + \ldots + u_n \frac{dp_n}{dx_k}, \quad \ldots \quad (3)$$

$$2\frac{d\phi}{dx_k} = p_1 \frac{du_1}{dx_k} + p_2 \frac{du_2}{dx_k} + \ldots + p_n \frac{du_n}{dx_k}. \quad \ldots \quad (4)$$

Hier moet, in $\frac{dp}{dx_k}$, p beschouwd worden als eene functie van $x_1, x_2, \ldots x_n$, $u_1, u_2, \ldots u_n$, en, in $\frac{du}{dx_k}$, u als functie van $x_1, x_2, \ldots x_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$, welke functies gegeven worden door (1).

De vergelijkingen (1) dus differentiëerende ten opzichte van x_k, daarbij beurtelings u en p als constant nemende, verkrijgen wij de volgende betrekkingen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dp_1}{dx_k} = \left(\frac{dA_1^1}{dx_k} u_1 + \ldots + \frac{dA_n^1}{dx_k} u_n\right) + \left(\frac{dA_1^1}{dx_k} u_1 + \ldots + \frac{dA_1^n}{dx_k} u_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dp_n}{dx_k} = \left(\frac{dA_1^n}{dx_k} u_1 + \ldots + \frac{dA_n^n}{dx_k} u_n\right) + \left(\frac{dA_n^1}{dx_k} u_1 + \ldots + \frac{dA_n^n}{dx_k} u_n\right) \end{array}\right\} (5)$$

Digitized by Google

en

$$\left.\begin{array}{l}
0=\left(\frac{dA_1^1}{dx_k}u_1+\ldots+\frac{dA_n^1}{dx_k}u_n\right)+\left(\frac{dA_1^1}{dx_k}u_1+\ldots+\frac{dA_1^n}{dx_k}u_n\right)\\
+\left(A_1^1\frac{du_1}{dx_k}+\ldots+A_n^1\frac{du_n}{dx_k}\right)+\left(A_1^1\frac{du_1}{dx_k}+\ldots+A_1^n\frac{du_n}{dx_k}\right)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0=\left(\frac{dA_1^n}{dx_k}u_1+\ldots+\frac{dA_n^n}{dx_k}u_n\right)+\left(\frac{dA_n^1}{dx_k}u_1+\ldots+\frac{dA_n^n}{dx_k}u_n\right)\\
+\left(A_1^n\frac{du_n}{dx_k}+\ldots+A_n^n\frac{du_n}{dx_k}\right)+\left(A_n^1\frac{du_1}{dx_k}+\ldots+A_n^n\frac{du_n}{dx_k}\right)
\end{array}\right\}(6)$$

Substitueert men nu in (3) voor $\frac{dp}{dx_k}$ haar waarde in (5), en in (4) voor p haar waarde in (1), dan komt er:

$$2\left(\frac{d\Phi}{dx_k}\right)=u_1\left(\frac{dA_1^1}{dx_k}u_1+\ldots+\frac{dA_n^1}{dx_k}u_n\right)+u_1\left(\frac{dA_1^1}{dx_k}u_1+\ldots+\frac{dA_1^n}{dx_k}u_n\right)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+u_n\left(\frac{dA_1^n}{dx_k}u_1+\ldots+\frac{dA_n^n}{dx_k}u_n\right)+u_n\left(\frac{dA_n^1}{dx_k}u_1+\ldots+\frac{dA_n^n}{dx_k}\right),$$

$$2\frac{d\Phi}{dx_k}=\frac{du_1}{dx_k}(A_1^1u_1+\ldots+A_n^1u_n)+\frac{du_1}{dx_k}(A_1^1u_1+\ldots+A_1^nu_n)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{du_n}{dx_k}(A_1^nu_1+\ldots+A_n^nu_n)+\frac{du_n}{dx_k}(A_n^1u_1+\ldots+A_n^nu_n).$$

Deze twee vergelijkingen opgeteld, geeft voor de som der eerste leden: $2\left\{\frac{d\Phi}{dx_k}+\left(\frac{d\Phi}{dx_k}\right)\right\}$,

en voor de som der tweede leden dezelfde uitdrukking, als die men verkrijgt, door de som te nemen van de vergelijkingen (6) na de eerste met u_1, de tweede met u_2,.... vermenigvuldigd te hebben; daar deze laatste som nul is, zoo is het ook de eerste, zoodat $2\left\{\frac{d\Phi}{dx_k}+\left(\frac{d\Phi}{dx_k}\right)\right\}=0$,

of $$\frac{d\Phi}{dx_k}=-\left(\frac{d\Phi}{dx_k}\right),$$

waardoor het tweede gedeelte bewezen is.

CLXXIV. VOORSTEL.

Door G. SCHOUTEN.

Men geeft in een plat vlak twee willekeurige kromme lijnen,

Digitized by Google

en verbindt door rechte lijnen de punten van die kromme lijnen, voor welke de raaklijnen evenwijdig zijn. Uit een vast punt trekt men rechte lijnen gelijk en evenwijdig aan de aldus bepaalde lijnen; te bewijzen, dat de boog van de kromme lijn, welke de meetkundige plaats is van hare uiteinden, de som of het verschil is der overeenkomstige bogen der gegeven kromme lijnen.

OPGELOST *door* G. SCHOUTEN *en* C. LELIJ.

OPLOSSING *van* G. SCHOUTEN.

MEETKUNDIGE OPLOSSING.

De verbindingslijnen kunnen elkander buiten, maar ook binnen de beide krommen snijden. (Zie fig. 66.)

Zij O het snijpunt van twee verbindingslijnen, bepaald door twee paar oneindig dicht bij elkaar gelegen punten AB en *ab* op elk der gegeven krommen. Laten AT en *at* het eene paar evenwijdige raaklijnen, en BT en *bt* het andere paar voorstellen.

Daar de bogen AB en *ab* oneindig klein worden ondersteld, kunnen wij hen vervangen door de koorden AB en *ab*, wanneer wij ons bepalen tot het zoeken van de grens, waartoe hun som of hunne verhouding nadert, als beide nul worden. Trekken we nu uit *b* de lijn *b*C, gelijk en evenwijdig aan *a*A, dan is BC de koorde van den overeenkomstigen boog der meetkundige plaats. Wij zullen dus moeten bewijzen, dat

$$\text{gr. } (AB \pm ab) = \text{gr. } BC,$$

waartoe ons de opmerking voert, dat de limiet van de richting, zoowel van AB als *ab*, is de richting van de raaklijn AT; bij de grens alzoo vallen de lijnen AB en AC samen, zoodat onmiddelijk volgt, dat

$$\text{gr. boog } AB \pm \text{gr. boog } ab = \text{gr. boog } BC,$$

waar het bovenste of onderste teeken genomen moet worden, naar gelang de richtingen, waarin de bogen gesteld worden, tegengesteld of gelijk zijn, m. a. w. naar gelang de gegeven krommen hare gelijknamige of ongelijknamige zijden naar elkaâr toekeeren.

Deze betrekking, geldende voor elk paar bogen, zal ook gelden voor de som van de bogen, waardoor de stelling bewezen is.

Digitized by Google

ANALYTISCH BEWIJS.

Stel
$$OA = \rho_1,$$
$$Oa = \rho_2,$$
$$\angle O = d\omega,$$
$$\text{boog } AB = ds_1,$$
$$\text{boog } ab = ds_2,$$
$$\text{boog } BC = d\sigma,$$
dan gelden de betrekkingen:
$$\left.\begin{aligned} ds_1^2 &= (\rho_1 d\omega)^2 + d\rho_1^2, \\ ds_2^2 &= (\rho_2 d\omega)^2 + d\rho_2^2, \\ d\sigma^2 &= \{(\rho_1 + \rho_2)\, d\omega\}^2 + \{d(\rho_1 + \rho_2)\}^2 \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$
waarbij ρ_1 en ρ_2 hetzelfde of het tegengestelde teeken hebben als zij in denzelfden of tegengestelden zin gesteld worden.

De uitdrukking dat OA met de raaklijn denzelfden hoek maakt als Oa, geeft de betrekking:
$$\left.\begin{aligned} \rho_1 \frac{d\omega}{d\rho_1} &= \rho_2 \frac{d\omega}{d\rho_2} \\ \text{of:} \quad \rho_1\, d\rho_2 &= \rho_2\, d\rho_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$
De beide eerste van (1) met elkaar vermenigvuldigende, geeft:
$$(ds_1 ds_2)^2 = (\rho_1\rho_2 d\omega^2)^2 + (d\rho_1 d\rho_2)^2 + d\omega^2 (\rho_1^2 d\rho_2^2 + \rho_2^2 d\rho_1^2).$$
Maar volgens (2) is:
$$\rho_1^2 d\rho_2^2 + \rho_2^2 d\rho_1^2 = 2\rho_1^2 d\rho_2^2 = 2\rho_1 d\rho_2 \times \rho_2 d\rho_1,$$
dus: $$(ds_1 ds_2)^2 = (\rho_1\rho_2 d\omega^2)^2 + (d\rho_1 d\rho_2)^2 + 2\rho_1\rho_2 d\rho_1 d\rho_2 d\omega^2$$
$$= (\rho_1\rho_2 d\omega^2 + d\rho_1 d\rho_2)^2,$$
dus: $$ds_1 ds_2 = \rho_1\rho_2 d\omega^2 + d\rho_1 d\rho_2.$$
Eindelijk is:
$$\begin{aligned} (ds_1 + ds_2)^2 &= ds_1^2 + ds_2^2 + 2ds_1 ds_2 \\ &= (\rho_1 d\omega)^2 + d\rho_1^2 + (\rho_2 d\omega)^2 + d\rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 d\omega^2 + 2d\rho_1 d\rho_2 \\ &= (\rho_1 d\omega + \rho_2 d\omega)^2 + (d\rho_1 + d\rho_2)^2 \\ &= \{(\rho_1 + \rho_2)\, d\omega\}^2 + \{d(\rho_1 + \rho_2)\}^2, \end{aligned}$$
dus:
$$ds_1 + ds_2 = d\sigma.$$
Hierin hebben ds_1 en ds_2 hetzelfde of het tegengestelde teeken, naar gelang ρ_1 en ρ_2 dit hebben. Wij komen dus tot hetzelfde besluit als boven.

CLXXV. VOORSTEL.

Door J. M. HEIJBROEK.

Men heeft, zooals bekend is, wanneer V *de vergrootende*

Digitized by Google

breedte voor eene geographische breedte φ, *a den straal des aequators, ae de excentriciteit van den aard-meridiaan beteekent, bij eene bolvormige aarde* $V = a \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$ *en bij eene afgeplatte aarde* $V = a(1 - e^2) \int \frac{Sin\,\varphi d\varphi}{1 - e^2\,Sin^2\,\varphi}$. *Zoo men nu in plaats van de geographische* φ *de geocentrische breedte* φ' *gebruikt, heeft men zeer nabij* $V = a \int \frac{d\varphi'}{Cos\,\varphi'}$, *bij eene afgeplatte aarde.*

OPGELOST *door* J. M. HEIJBROCK *en* C. LELIJ.

OPLOSSING *van* J. M. HEIJBROCK.

Volgens de theorie der wassende kaarten, is het oneindig kleine rechthoekje *mnpq* op de spheroïde gelijkvormig met het overeenstemmend rechthoekje MNPQ op de kaart, derhalve (zie fig. 67) $PN : pn = MN : mn$; hierin is

$PN =$ de differentiaal der vergrootende Breedte $= dV$,
$pn =$ de differentiaal des meridiaans $= dS$,
$MN =$ de differentiaal des Equators $= dE$,
$mn =$ de differentiaal des parallels $= dP$.

Wij hebben dus: $dV : dS = dE : dP$,
maar de omtrekken van cirkels zijn evenredig aan hunne stralen, dus: $dV : dS = AB : CD$,

$dV : dS = a : x$, of zooals bekend is:

$$dV : -dx \sqrt{\left\{1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right\}} = a : x; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

het negatieve teeken van dx duidt hier aan, dat men den oorsprong der bogen S in den Equator aanneemt, waardoor eene aangroeijing van S eene vermindering van x ten gevolge heeft.

Wanneer men de vergelijking der Ellips: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ differentieert, dan verkrijgt men na herleiding:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} \text{ en dus } \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}$$

of stellende: $b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1 - e^2)$:

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{x^2(1 - e^2)}{a^2 - x^2} \text{ en } 1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2};$$

Digitized by Google

deze waarde gevoegd in (1), geeft:

$$\frac{dV : -dx\sqrt{\left(\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}\right)} = a : x}{dV = -\frac{a\,dx}{x}\sqrt{\left(\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}\right)},} \quad \ldots\ldots (2)$$

hierin moet nu x uitgedrukt worden in functie van de geocentrische breedte ϕ'.

Neemt men het middelpunt der Ellips tot pool en de groote as tot oorsprong der hoeken, dan is de poolvergelijking der ellips, zooals bekend is:

$$Z = \frac{ab}{\sqrt{(b^2\,Cos^2\,\phi' + a^2\,Sin^2\,\phi')}}.$$

Hierin voegende $Z = x\,Sec\,\phi'$, komt er na herleiding:

$$x = \frac{a\sqrt{(1-e^2)}}{\sqrt{(Sec^2\,\phi' - e^2)}},$$

deze vergelijking differentierende, verkrijgt men:

$$dx = -\frac{a\,Sin\,\phi'\sqrt{(1-e^2)}}{Cos^3\phi'\{Sec^2\phi'-e^2\}^{\frac{3}{2}}}d\phi', \text{ maar } \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{(Sec^2\phi'-e^2)}}{\sqrt{(1-e^2)}},$$

$$\text{derhalve } -\frac{adx}{x} = \frac{a\,Sin\,\phi'\,d\phi'}{Cos^2\,\phi'\,\{Sec^2\,\phi'-e^2\}} \quad \ldots (3)$$

Ter bekoming van den factor onder het wortelteeken in (2), heeft men achtereenvolgens:

$$x^2 = \frac{a^2\,(1-e^2)}{Sec^2\,\phi'-e^2}; \quad a^2 - x^2 = \frac{a^2\,tang^2\,\phi'}{Sec^2\,\phi'-e^2};$$

$$e^2x^2 = \frac{a^2\,e^2(1-e^2)}{Sec^2\,\phi'-e^2}; \quad a^2 - e^2x^2 = \frac{a^2\{Sec^2\phi'-2e^2+e^4\}}{Sec^2\,\phi'-e^2}$$

$$\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2} = \frac{Sec^2\,\phi'-2e^2+e^4}{tang^2\,\phi'} \quad \ldots\ldots (4)$$

De gevondene waarden van (3) en (4) in (2) voegende, is:

$$dV = \frac{a\,Sin\,\phi'\,d\phi'}{Cos^3\,\phi'\,\{Sec^2\,\phi'-e^2\}} \times \frac{\sqrt{(Sec^2\,\phi'-2e^2+e^4)}}{tang\,\phi'}$$

$$\text{of} \qquad dV = \frac{a\sqrt{\{Sec^2\,\phi'-2e^2+e^4\}}}{Cos^2\,\phi'\{Sec^2\,\phi'-e^2\}}\,d\phi',$$

waaruit:

$$dV = a\,Sec^2\phi'\,d\phi'\,\{Sec^2\phi'-2e^2+e^4\}^{\frac{1}{2}} \times \{Sec^2\phi'-e^2\}^{-1}; \quad (5)$$

nu is, wanneer men de vierde en hoogere machten van e verwaarloost:

Digitized by Google

$$\left\{Sec^2\,\phi' - 2e^2 + e^4\right\}^{\frac{1}{2}} = Sec\,\phi' - e^2\,Cos\,\phi',$$
$$\left\{Sec^2\,\phi' - e^2\right\}^{-1} = Cos^2\,\phi' + e^2\,Cos^4\,\phi',$$
$$\left\{Sec^2\,\phi' - 2e^2 + e^4\right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{Sec^2\,\phi' - e^2\right\}^{-1} = Cos\,\phi',$$

dit in (5) voegende, komt er:

$$dV = a\,Sec\,\phi'\,d\phi' \text{ en dus } V = a\int\frac{d\phi'}{Cos\,\phi'}.$$

Men komt tot hetzelfde besluit door in de vergelijking:

$$V = a(1 - e^2)\int\frac{Sec\,\phi\,d\phi}{1 - e^2\,Sin^2\,\phi}$$

ϕ in ϕ' om te zetten met behulp van de betrekking:

$$tang\,\phi = \frac{a^2}{b^2}\,tang\,\phi'.$$

CLXXVI. Voorstel. (*)

Door C. J. Matthes.

Eene parabel is een' driehoek omschreven, zoodat de raaklijn in een hoekpunt evenwijdig loopt met de overstaande zijde. Men vraagt, aan te toonen, dat de vierkantswortels van de lengten der loodlijnen uit de drie hoekpunten des driehoeks op eene willekeurige raaklijn aan de kromme neêrgelaten, termen zijn eener rekenkundige reeks.

Opgelost *door* C. J. Matthes, C. Lelij *en* G. de Vries.

Oplossing *van* C. Lelij.

Elke kegelsnede, die den assendriehoek ABC omschreven is, zal tot tangentiale vergelijking hebben:

$$L^2p^2 + M^2q^2 + N^2r^2 - 2LMpq - 2LNpr - 2MNqr = 0\ .\ (1)$$

De raaklijn in een der hoekpunten, bijv. in punt A, zal tot vergelijking hebben:

$$p = 0, \qquad Mq - Nr = 0.$$

Opdat deze raaklijn evenwijdig zij aan de overstaande zijde BC, moet haar vergelijking den vorm krijgen:

$$p = 0, \qquad q = r.$$

Hieruit volgt dus: $M = N$, waardoor de kegelsnede tot vergelijking verkrijgt:

$$L^2p^2 + M^2(q - r)^2 - 2LMp(q + r) = 0\ .\ .\ .\ (2)$$

Opdat de kegelsnede een parabel worde, moet zij de lijn op oneindigen afstand aanraken, dus de vergelijking dier lijn moet

(*) Dit en de volgende twee voorstellen zijn ontleend aan Ferrers *Nieuwere Meetkunde*, Voorbeelden 50, 51 en 52.

Digitized by Google

aan haar vergelijking voldoen. Nu is de vergelijking der lijn op oneindigen afstand: $p = q = r$. Substitueeren wij dit in (2), dan krijgen wij tot betrekking tusschen L en M:

$$L^2 - 4LM = 0 \quad \text{of} \quad L = 4M,$$

waardoor de vergelijking der verlangde parabel wordt:

$$16p^2 + (q - r)^2 - 8p(q + r) = 0,$$

of: $$4p - (q + r) = 2\sqrt{qr},$$

of: $$4p = q + r + 2\sqrt{qr},$$

of: $$2\sqrt{p} = \sqrt{q} + \sqrt{r},$$

of: $$\sqrt{q} - \sqrt{p} = \sqrt{p} - \sqrt{r}.$$

Hieruit ziet men, dat (voor het geval dat de raaklijn in A evenwijdig is aan de overstaande zijde) $p^{\frac{1}{2}}$ rekenkundig middenevenredige is tusschen $q^{\frac{1}{2}}$ en $r^{\frac{1}{2}}$, dus dat $q^{\frac{1}{2}}$, $p^{\frac{1}{2}}$, $r^{\frac{1}{2}}$, termen zijn eener rekenkundige reeks.

Daar nu p, q, r voorstellen de lengten der loodlijnen, uit A, B en C respectievelijk op een willekeurige raaklijn aan de kegelsnede neergelaten, is de stelling bewezen.

Oplossing *van* G. de Vries, *op andere wijze.*

Als $y^2 = 2px$ de vergelijking der parabel is en $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ de coördinaten van de hoekpunten van den ingeschreven driehoek, dan is de vergelijking van de raaklijn aan $(\alpha\beta)$:

$$y\beta = p(x + \alpha)$$

en die van de lijn door $(\alpha_1\beta_1)$ en $(\alpha_2\beta_2)$:

$$y - \beta_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2}(x - \alpha_1);$$

uit de evenwijdigheid dezer lijnen volgt:

$$p(\alpha_1 - \alpha_2) = \beta(\beta_1 - \beta_2).$$

Deze vergelijking met $\beta_1^2 = 2p\alpha_1$ en $\beta_2^2 = 2p\alpha_2$ geeft door eliminatie van α_1 en α_2:

$$\beta_1^2 - \beta_2^2 = 2\beta(\beta_1 - \beta_2),$$

waaruit: $$\beta' + \beta_2 = 2\beta,$$

of: $$\beta_2 = 2\beta - \beta_1 = \beta + (\beta - \beta_1) \quad . \quad . \quad (1)$$

De vergelijking van de raaklijn aan een willekeurig punt der parabel (a, b) is: $by = p(x + a)$,

$$px + ap - bq = 0,$$

dus de lengten der loodlijnen uit $\alpha\beta$; $\alpha_1\beta_1$ en $\alpha_2\beta_2$ op deze lijn neergelaten, bedragen respectievelijk:

$$\frac{p\alpha + ap - b\beta}{\sqrt{b^2 + p^2}}, \quad \frac{p\alpha_1 + ap - b\beta_1}{\sqrt{b^2 + p^2}}, \quad \frac{p\alpha_2 + ap - b\beta_2}{\sqrt{b^2 + p^2}},$$

Digitized by Google

waarvoor geschreven kan worden:

$$\frac{\beta^2 + b^2 - 2b\beta}{2\sqrt{b^2+p^2}}, \quad \frac{\beta_{,}^2 + b^2 - 2b\beta_{,}}{2\sqrt{b^2+p^2}}, \quad \frac{\beta_{,,}^2 + b^2 - 2b\beta_{,,}}{2\sqrt{b^2+p^2}},$$

(omdat $(\alpha\beta)$, $(\alpha_{,}\beta_{,})$, $(\alpha_{,,}\beta_{,,})$ en (ab) allen punten zijn op de parabel gelegen en dus voldoen aan $y^2 = 2px$),
en eindelijk voor de vierkantswortels der bedoelde lengten:

$$\frac{b-\beta}{\sqrt[4]{4b^2+4p^2}}, \quad \frac{b-\beta_{,}}{\sqrt[4]{4b^2+4p^2}}; \quad \frac{b-\beta_{,,}}{\sqrt[4]{4b^2+4p^2}},$$

welke na invoering van de waarde voor $\beta_{,,}$ onder (1) gevonden, overgaan in:

$$\frac{(b-\beta)}{\sqrt[4]{4b^2+4p^2}}, \quad \frac{(b-\beta)+(\beta-\beta_{,})}{\sqrt[4]{4b^2+4p^2}}, \quad \frac{(b-\beta)-(\beta-\beta_{,})}{\sqrt[4]{4b^2+4p^2}},$$

waaromtrent geldt het gestelde.

CLXXVII. Voorstel.

Door C. J. Matthes:

Eene kegelsnede is een' driehoek omschreven, in dier voege, dat de raaklijn in elk hoekpunt evenwijdig loopt met de overstaande zijde. Aan te toonen, dat, als p, q, r de loodlijnen zijn uit de hoekpunten op eene willekeurige raaklijn neêrgelaten, alsdan $\pm p^{\frac{1}{2}} \pm q^{\frac{1}{2}} \pm r^{\frac{1}{2}} = 0.$

Opgelost *door* C. J. Matthes, C. Lelij *en* G. de Vries.

Oplossing *van* C. Lelij.

Neem den gegeven driehoek ABC als assendriehoek aan, dan zal de tangentiale vergelijking van een kegelsnede, dezen driehoek omschreven, zijn:

$$L^2p^2 + M^2q^2 + N^2r^2 - 2LMpq - 2LNpr - 2MNqr = 0.$$

De raaklijnen in de punten A, B en C zullen tot vergelijkingen hebben:

$$p = 0,\ Mq - Nr = 0,\ \text{in A},$$
$$q = 0,\ Nr - Lp = 0,\ \text{in B},$$
$$r = 0,\ Mq - Lp = 0,\ \text{in C},$$

opdat deze raaklijnen respectievelijk evenwijdig worden met de lijnen BC, NC en AB, zal:

$$M = N,$$
$$N = L,$$

$M = L$, of $M = N = L$ moeten zijn, waardoor de vergelijking der kegelsnede wordt:

$$p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2qr = 0,$$

of:

$$(p - q - r)^2 = 4qr,$$

Digitized by Google

of: $$p - q - r = \pm 2\sqrt{qr},$$

of: $$p = q + r \pm 2\sqrt{qr}$$
$$\pm p^{\frac{1}{2}} = \pm (q^{\frac{1}{2}} \pm r^{\frac{1}{2}})$$
$$\pm p^{\frac{1}{2}} \pm q^{\frac{1}{2}} \pm r^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Daar nu p, q, r voorstellen de lengten der loodlijnen, respectievelijk neêrgelaten uit de punten A, B en C op eene willekeurige raaklijn, is de stelling bewezen.

CLXXVIII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Te bewijzen, dat de tangentiale vergelijking van het middelpunt der in het vorige voorstel vermelde kegelsnede is

$$p + q + r = 0.$$

Opgelost *door* C. J. Matthes, C. Lelij *en* G. de Vries.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

In het algemeen is de tangentiale vergelijking van het middelpunt (zie Ferrers, bl. 129, § 139):

$$(u + v' + w')p + (u' + v + w')q + (u' + v' + w)r = 0;$$

maar in ons geval is $u = v = w = u' = v' = w' = 1$, zoodat zij hier overgaat in: $p + q + r = 0$.

Oplossing *van* C. Lelij.

Zij (Fig. 68) ABC de gegeven driehoek en DF, EF, DE de raaklijnen aan de kegelsnede in de punten A, B en C, dan is dus EF // AC en FD // BC en DE // AB.

Nu zal het middelpunt liggen op de lijn die het snijpunt van twee raaklijnen verbindt met het midden der koorde, door die raaklijnen onderspannen. Dus is het middelpunt het onderlinge snijpunt der lijnen EG, DH en FK.

Daar echter ABCD, ACBF en ABCE, parallelogrammen zijn, zullen de lijnen EG, FK en HE door de punten A, C en B gaan.

Het middelpunt is dus het snijpunt der zwaartelijnen, is dus het zwaartepunt, waarvan de vergelijking is: $p+q+r=0$, (zie Ferrers, bl. 124).

CLXXIX. Voorstel. (*)

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij de middellijn AB *eens cirkels in de punten* C *en* D

(*) Dit en het volgend voorstel zijn zonder bewijs opgegeven in het werkje vermeld bij N°. 92.

Digitized by Google

harmonisch gedeeld, in het middelpunt E *eene loodlijn op* AB *opgericht, en door* C *eene lijn getrokken, welke die loodlijn buiten den omtrek des cirkels snijde in* F. *Trekt men nu door* D *eene lijn, welke den omtrek des cirkels ontmoete in* G *en* H, *en uit* G *eene lijn* GK *aan dezelfde zijde van* DG *als* F *is van de middellijn* AB, *zoodat de hoek* DGK *gelijk zij aan hoek* CFE, *en welke lijn* GK *de lijn* CF, *verlengd, snijde in* M *en den cirkel-omtrek in* L, *dan is*

$$GM : ML = GD : DH.$$

Men vraagt, dit te bewijzen.

Opgelost *door* H. A. Lorentz *en* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* H. A. Lorentz.

(Zie fig. 69). Men verlenge FC en late uit D op deze lijn eene loodlijn vallen, welke den cirkel snijde in G en in H; trekke uit H eene lijn, evenwijdig aan EF, welke de middellijn in Q en den cirkel in R snijde; trekke uit R eene koorde RL in den cirkel evenwijdig aan FC, en uit het punt L door G eene lijn LGK, dan is:

$$\angle DGK = \angle LGH = \angle HRL = \angle CFE.$$

Men richte nu in C op AB eene loodlijn op, welke GH ontmoete in P, dan is GH in P en D harmonisch gesneden en men heeft:

$$\left.\begin{array}{l} HQ : PC = HD : PD, \\ HR : PC = 2HD : PD. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Maar daar GH in P en in D harmonisch gesneden is, heeft men ook rechthoek onder GH en PD gelijk aan tweemaal den rechthoek onder HD en GP, dat is:

$$\left.\begin{array}{l} 2HD : PD = GH : GP \\ GP : PH = GD : DH; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

en

derhalve: $HR : PC = GH : GP,$

en R, C, G liggen in eene rechte lijn, waaruit volgt:

$$GC : CR = GP : PH,$$

en derhalve: $GC : CR = GD : DH.$

Maar: $GM : ML = GC : CR,$

derhalve: $GM : ML = GD : DH.$

CLXXX. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij in een punt C *in het verlengde van de middellijn* AB *eens cirkels eene loodlijn opgericht, en uit eenig punt* D *in*

Digitized by Google

deze eene lijn getrokken, welke den cirkel-omtrek snijde in E *en in* F, *dan is de rechthoek onder* ED *en* DF *gelijk aan den rechthoek onder* AC *en* CB *gevoegd bij het vierkant op* CD.

Wordt gevraagd het bewijs.

Opgelost *door* G. de Vries, C. Lelij, G. J. D. Mounier *en* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* G. de Vries.

Vereenig het punt D met B (zie fig. 70), noem het punt waar deze lijn den cirkelomtrek snijdt G, en vereenig de punten A en G, dan is:

$$\square\, BD = \square\, BC + \square\, CD,$$

maar wegens de gelijkvormigheid der driehoeken BCD en AGB is: $BD : BC = BA : BG$,

of: $BD \,.\, BG = BC \,.\, BA$,

Wij hebben derhalve:

$$BD.(BD - BG) = BC.(BC - BA) + \square\, CD,$$
$$BD \,.\, GD = BC.AC + \square\, CD.$$

Maar volgens eene eigenschap der snijlijnen eens cirkels is:

$$BD.GD = DF.DE,$$

derhalve: $\text{rechth.}\, DF.DE = \text{rechth.}\, BC.AC + \square\, CD.$

CLXXXI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Door een punt in het vlak van eene gegeven parabel zijn lijnen en in de punten, waarin deze de parabel snijden, raaklijnen getrokken. Men vraagt naar de vergelijking der meetkundige plaats van de voetpunten der loodlijnen, die uit het eerstgenoemde punt op die raaklijnen zijn nedergelaten.

Opgelost *door* W. H. Wisselink *en* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. H. Wisselink.

De meetkundige plaats dier voetpunten is blijkbaar eene voetpuntskromme (podaire, Fusspunktcurve). Zij 't gegeven punt a, b en de parabel $y^2 = 2px$.

De vergelijking van de raaklijn in 't punt $x_1\, y_1$ aan de parabel is: $yy_1 = p(x + x_1)$,

of: $$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{px_1}{y_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De vergelijking der loodlijn uit (a, b) op die raaklijn is:

$$y - b = -\frac{y_1}{p}(x - a) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Digitized by Google

't Snijpunt van (1) en (2) is derhalve de meetkundige plaats, zoodat dus x_1 en y_1 moeten geëlimineerd worden; maar 't punt $x_1 y_1$ is een punt op de parabel, dus is ook:

$$y_1^2 = 2px_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De onbepaalde grootheden x_1 en y_1 elimineerende tusschen (1), (2) en (3), krijgen wij gemakkelijk voor de gevraagde vergelijking:

$$2x(x-a)^2 + 2y(x-a)(y-b) + p(y-b)^2 = 0.$$

Aanmerkingen. 1. Wordt voor het gegeven punt het brandpunt aangenomen, dan is $a = \frac{1}{2}p$ en $b = 0$, zoodat alsdan de vergelijking wordt: $x(x - \frac{1}{2}p)^2 + xy^2 = 0$,

of: $x = 0$ en $(x + \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = 0$.

Alsdan is de raaklijn aan den top der parabel met het brandpunt als geïsoleerd punt de meetkundige plaats.

2. Wordt voor het gegeven punt de top der parabel genomen, dan is $a = b = 0$ en de vergelijking:

$$2x^3 + 2xy^2 + py^2 = 0,$$

of:

$$y = \pm x \sqrt{-\frac{2x}{2x+p}},$$

zijnde eene *cissoïde*, die links van de y-as ligt.

CLXXXII. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Op twee gegeven lijnen OA, OB, *uit het punt* O *getrokken, worden cirkels beschreven, welke elkander onder een' bepaalden hoek snijden en behalve het punt* O *nog een tweede punt gemeen hebben; de vergelijking van de meetkundige plaats van dit tweede punt wordt gevraagd.*

(*De bepaling van die plaats uit geometrische beschouwingen werd gevraagd in Voorstel* 33 *van het vorige Deel.*)

Opgelost *door* W. H. Wisselink *en* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. H. Wisselink

Zij $OA = 2a$, $OB = 2b$, de hoek tusschen die twee lijnen α en de hoek, waaronder de twee cirkels elkaâr snijden $= \beta$. Nemen we een rechthoekig coördinaten-stelsel met O als oorsprong en OA als x-as aan, dan kunnen wij voor de vergelijking van den cirkel op $2a$ nemen:

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2ny = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en voor dien op $2b$: $x^2 - 2mx + y^2 - 2py = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

waarin n, m en p onbekenden voorstellen. De richtings-

Digitized by Google

constanten van de raaklijnen in den oorsprong zijn respectievelijk $-\frac{a}{n}$ en $-\frac{m}{p}$. Dus is:

$$tang\,\beta = \frac{-\frac{a}{n}+\frac{m}{p}}{1+\frac{am}{np}} = \frac{mn-ap}{am+np}.$$

Daar de cirkel op $2b$ moet gaan door 't punt B, waarvan de coördinaten zijn $2b\,Cos\,\alpha$, $2b\,Sin\,\alpha$, moet tusschen m en p van (2) de betrekking $b - m\,Cos\,\alpha - p\,Sin\,\alpha = 0$ bestaan.

Elimineeren we nu n, m en p tusschen de vier vergelijkingen:

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2ny = 0\,; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$x^2 - 2mx + y^2 - 2py = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$b - m\,Cos\,\alpha - p\,Sin\,\alpha = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$tang\,\beta = \frac{mn-ap}{am+np} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Daartoe hebben wij uit (3):

$$p = \frac{b - m\,Cos\,\alpha}{Sin\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Deze waarde in (2) substitueerende, vinden wij:

$$m = \frac{(x^2+y^2)\,Sin\,\alpha - 2by}{2\,(x\,Sin\,\alpha - y\,Cos\,\alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

en door (5): $$p = \frac{2bx - (x^2+y^2)\,Cos\,\alpha}{2\,(x\,Sin\,\alpha - y\,Cos\,\alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

en uit (1): $$n = \frac{x^2+y^2-2ax}{2y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Substitueeren we de waarden van (6), (7) en (8) in vergelijking (4), dan vinden we na eene tamelijk uitvoerige bewerking voor de gevraagde vergelijking:

$$x^2 + y^2 - 2\left(a + \frac{b\,Sin\,\beta}{Sin\,(\alpha+\beta)}\right)x$$
$$-2\left(\frac{b\,Cos\,\beta}{Sin\,(\alpha+\beta)} - a\,Cot\,(\alpha+\beta)\right)y + \frac{4ab\,Sin\,\beta}{Sin\,(\alpha+\beta)} = 0,$$

zijnde de vergelijking van een cirkel, waarvan de coördinaten van 't middelpunt zijn:

$$a + \frac{b\,Sin\,\beta}{Sin\,(\alpha+\beta)} \quad \text{en} \quad \frac{b\,Cos\,\beta}{Sin\,(\alpha+\beta)} - a\,Cot\,(\alpha+\beta).$$

Digitized by Google

CLXXXIII. Voorstel.

Door J. M. Heijbroek.

Men vraagt naar den kromte-straal van de kromme lijn, wier vergelijking, bij gebruik van rechthoekige coördinaten, is:

$$y^4 + x^2y^2 = a^2x^2.$$

Opgelost *door* W. H. Wisselink, W. Kapteijn *en* J. M. Heijbroek.

Oplossing *van* W. H. Wisselink.

Door eene geringe beproeving vindt men, dat de poolvergelijking der gegeven kromme zeer eenvoudig, nam. (na herleiding) is: $r^4 = a^2r^2\,Cot^2\,\phi$.

Hieraan wordt voldaan door:

$$r^2 = 0 \text{ en } r^2 = a^2\,Cot^2\,\phi.$$

De oorsprong is derhalve een *dubbel* punt.

Volgens eene bekende formule is de kromte-straal ρ:

$$\rho = \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\phi^2}}.$$

Wij vinden nu: $r = \pm a\,Cot\,\phi$,

$$\frac{dr}{d\phi} = \mp\frac{a}{Sin^2\phi} \text{ en } \frac{d^2r}{d\phi^2} = \pm\frac{2a\,Cos\,\phi}{Sin^3\phi},$$

(waarin de bovenste teekens bij elkaâr hooren).

Derhalve is:

$$r\frac{d^2r}{d\phi^2} = \pm a\,Cot\,\phi \times \pm\frac{2a\,Cos\,\phi}{Sin^3\,\phi} = \frac{2a^2\,Cos^2\,\phi}{Sin^4\,\phi}.$$

Wij hebben dus:

$$\rho = \frac{\left(a^2\,Cot^2\,\phi + \frac{a^2}{Sin^4\,\phi}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2\,Cot^2\,\phi + \frac{2a^2}{Sin^4\,\phi} - \frac{2a^2\,Cos^2\,\phi}{Sin^4\,\phi}},$$

of $$\rho = a\frac{(1 + Sin^2\,\phi\,Cos^2\,\phi)^{\frac{3}{2}}}{Sin^4\,\phi\,(2 + Cos^2\,\phi)}.$$

Hierin $Sin^2\,\phi = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$, en $Cos^2\,\phi = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ nemende, vinden wij voor den gevraagden kromte-straal:

$$\rho = a\frac{(x^4 + 3x^2y^2 + y^4)^{\frac{3}{2}}}{y^4(3x^2 + 2y^2)}.$$

Digitized by Google

CLXXXIV. Voorstel.

Door J. M. Heybrock.

De kromme lijn, wier pool-vergelijking is $z = a \, Sec \, \phi \, Sec \, 2\phi$, *bestaat uit drie afzonderlijke deelen, die met de bolle zijde naar de pool zijn gekeerd. Als men de drie toppen dezer kromme lijn door rechte lijnen vereenigt, ontstaat een rechtlijnige driehoek; men vraagt den vlakken inhoud van dezen driehoek uit te drukken in den standvastigen term der vergelijking.*

Opgelost *door* J. M. Heybrock, W. H. Wisselink *en* W. Kapteyn.

Oplossing *van* J. M. Heybrock.

Wanneer men de figuur construeert, ziet men dat de toppen der kromme lijn die punten zijn, waarvoor de waarde van z een minimum is. Ter bepaling van dat minimum heeft men uit de vergelijking $z = a \, Sec \, \phi \, Sec \, 2\phi$:

$$\frac{dz}{d\phi} = a . \frac{Sin \, \phi \, (1 - 6 \, Cos^2 \, \phi)}{Cos^2 \, \phi \, Cos^2 \, 2\phi} = 0.$$

Aan deze vergelijking voldoen de waarden van ϕ:

$$\phi_1 = 0,$$
$$Cos \, \phi_2 = + \sqrt{1/6},$$
$$Cos \, \phi_3 = - \sqrt{1/6},$$

waarmede overeenstemmen de waarden van z:

$$z_1 = a,$$
$$z_2 = + \tfrac{3}{2} a \sqrt{6},$$
$$z_3 = - \tfrac{3}{2} a \sqrt{6}.$$

Vereenigt men de punten A, B en C door rechte lijnen, dan wordt gevraagd de inhoud van den driehoek ABC.

De driehoek APB, zijnde P de oorsprong, is gelijkbeenig en de lijn AB staat in D loodrecht op den oorsprong der hoeken PX; men heeft nu in den rechthoekigen driehoek APD:

$$AD = AP \times Sin \angle APD = \tfrac{3}{2} a \sqrt{6} \times \sqrt{5/6} = \tfrac{3}{2} a \sqrt{5},$$
$$PD = AP \times Cos \angle APD = \tfrac{3}{2} a \sqrt{6} \times \sqrt{1/6} = \tfrac{3}{2} a,$$
$$CD = PC + PD = \tfrac{5}{2} a;$$

Inhoud driehoek: $ABC = CD \times AD = \tfrac{15}{4} a^2 \sqrt{5}$.

CLXXXV. Voorstel.

Door J. M. Heybrock.

Men vraagt naar de vergelijking en den vorm der kromme lijn, die ontstaat, wanneer men bij de gewone constructie der

Digitized by Google

cissoïde in plaats van den voortbrengenden cirkel eene hyperbel stelt.

Opgelost *door* J. M. Heybrock.

Oplossing *van* J. M. Heybrock.

Laat AOIKO'N de gegeven hyperbel zijn, met L als middelpunt, $OO' = 2a$ als eerste as en $VW = 2b$ als tweede as, dan wordt de gevraagde kromme lijn op de volgende wijze geconstrueerd:

Men trekt langs een der toppen der hyperbel, bijv. O', eene raaklijn DE, en uit den anderen top O lijnen OC naar die raaklijn, die achteruit verlengd zijnde, den tak AOI der hyperbel ergens in punten A snijden; men maakt vervolgens van de raaklijn af naar denzelfden tak van de hyperbel toe de stukken $CP = OA$, dan vormen de punten P de gevraagde kromme lijn. De vergelijking dezer kromme lijn, die men de hyperbolische cissoïde zou kunnen noemen, wordt op de volgende wijze opgemaakt. Laat uit P en A loodlijnen PM en AB op de x-as neder, stel $OM = x$ en $PM = y$; omdat $CP = AO$ is $OC = AP$ en $OO' = MP$ en dus $OB = 2a + x$. Dewijl A een punt der hyperbel is, bestaat er tusschen AB en OB de betrekking

$$AB^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{2a.OB + OB^2\right\},$$

hierin de waarde van OB voegende, krijgt men:

$$AB^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{2a + x\right\}\left\{4a + x\right\}.$$

De gelijkvormige driehoeken OPM en OAB geven:

$$OM^2 : PM^2 = OB^2 : AB^2$$

$$x^2 : y^2 = (2a + x)^2 : \frac{b^2}{a^2}(2a + x)(4a + x)$$

waaruit:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{\frac{4a + x}{2a + x}}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

welke de gevraagde vergelijking is.

Differentieert men deze vergelijking ten opzichte van x, dan komt er:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{b}{a}\left\{\frac{8a^2 + 5ax + x^2}{(2a + x)\sqrt{(4a + x)(2a + x)}}\right\}.$$

De vergelijking (1) leert ons onder anderen het volgende: De kromme lijn is aan wederzijden der x-as op dezelfde wijze

Digitized by Google

gelegen; zij bestaat uit takken RR′, SS′, die aan beide zijden tot in het oneindige voortloopen; de kromme lijn snijdt de x-as in het punt O onder hoeken, waarvan de tangens gelijk is aan $\pm \frac{b}{a} \sqrt{2}$; voor $x = \pm \infty$ maakt de kromme lijn met de x-as hoeken welker tangens $= \pm \frac{b}{a}$ en loopt dus evenwijdig met de asymptoten der voortbrengende hyperbel; de kromme lijn heeft een asymptoot, namelijk de raaklijn DE.

CLXXXVI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Indien men aan de hoekpunten eens bolvormigen driehoeks de raaklijnen trekt, welke de standhoeken vormen, dan zullen deze elkander twee aan twee snijden. Beschouwt men de snijpunten als de hoekpunten van een driehoek, dan begeert men de zijden en den inhoud van dezen driehoek in de koorden en den straal des bols uit te drukken.

Opgelost *door* W. Kapteyn *en* W. van Haarst.

Oplossing *van* W. Kapteyn.

Noemen wij 1°. de zijden van den bolvormigen driehoek ABC, (zie fig. 71), a, b, c, nl. a de zijde tegenover hoek A enz.;

2°. den straal van den bol r;

3°. de koorden BC, AC en AB resp. u, v, w;

4°. de lijnen $CP = BP = h$,

$AQ = CQ = k$,

$BR = AR = l$,

5°. de zijden van den gevraagden driehoek $PQ = x$, $QR = y$, $RP = z$,

dan is bekend, dat:

$$Sin\, a = \frac{u}{2r^2} \sqrt{4r^2 - u^2}, \qquad Cos\, a = \frac{1}{2r^2}(2r^2 - u^2),$$

$$Sin\, b = \frac{v}{2r^2} \sqrt{4r^2 - v^2}, \qquad Cos\, b = \frac{1}{2r^2}(2r^2 - v^2),$$

$$Sin\, c = \frac{w}{2r^2} \sqrt{4r^2 - w^2}, \qquad Cos\, c = \frac{1}{2r^2}(2r^2 - w^2).$$

Dit gesubstitueerd in de formule:

Digitized by Google

$$Cos\,A = \frac{Cos\,a - Cos\,b\,Cos\,c}{Sin\,b\,Sin\,c}.$$

geeft: $$Cos\,A = \frac{2r^2(-u^2+v^2+w^2)-v^2w^2}{vw\sqrt{4r^2-v^2}\sqrt{4r^2-w^2}}.$$

Op dezelfde wijze vinden wij verder:

$$Cos\,B = \frac{2r^2(u^2-v^2+w^2)-u^2w^2}{uw\sqrt{4r^2-u^2}\sqrt{4r^2-w^2}},$$

$$Cos\,C = \frac{2r^2(u^2+v^2-w^2)-u^2v^2}{uv\sqrt{4r^2-u^2}\sqrt{4r^2-w^2}}.$$

Bovendien volgt uit driehoek MAQ de waarde van k: immers $\angle MAN = \angle AQN$, $Cos\,MAN = \frac{v}{2r}$, dus:

$$k = AQ = \frac{AN}{Sin\,AQN} = \frac{rv}{\sqrt{4r^2-v^2}}.$$

Eveneens is: $$h = \frac{ru}{\sqrt{4r^2-u^2}},$$

$$l = \frac{rw}{\sqrt{4r^2-w^2}}.$$

Verder weten wij: $$x^2 = h^2 + k^2 - 2kh\,Cos\,C,$$
$$y^2 = k^2 + l^2 - 2kl\,Cos\,A,$$
$$z^2 = h^2 + l^2 - 2hl\,Cos\,B.$$

Substitueeren wij bovenstaande waarden, dan is:

$$x = \frac{2r^2w}{\sqrt{4r^2-u^2}\sqrt{4r^2-v^2}},$$

$$y = \frac{2r^2u}{\sqrt{4r^2-v^2}\sqrt{4r^2-w^2}},$$

$$z = \frac{2r^2v}{\sqrt{4r^2-u^2}\sqrt{4r^2-w^2}}.$$

Stellen wij nu kortheidshalve:

$$\sqrt{4r^2-u^2} = \alpha,$$

$$\sqrt{4r^2-v^2} = \beta,$$

$$\sqrt{4r^2-w^2} = \gamma,$$

dan is: $$\frac{x}{2} = \frac{r^2w\gamma}{\alpha\beta\gamma}, \quad \frac{y}{2} = \frac{r^2u\alpha}{\alpha\beta\gamma}, \quad \frac{z}{2} = \frac{r^2v\beta}{\alpha\beta\gamma},$$

waaruit: $$s = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = \frac{r^2(\alpha u + \beta v + \gamma w)}{\alpha\beta\gamma},$$

Digitized by Google

$$s - x = \frac{r^2(\alpha u + \beta v - \gamma w)}{\alpha\beta\gamma},$$

$$s - y = \frac{r^2(-\alpha u + \beta v + \gamma w)}{\alpha\beta\gamma},$$

$$s - z = \frac{r^2(\alpha u - \beta v + \gamma w)}{\alpha\beta\gamma}.$$

De inhoud van den driehoek is dus:

$$= \frac{r^4}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\sqrt{4\alpha^2\beta^2u^2v^2 - (\alpha^2u^2 + \beta^2v^2 - \gamma^2w^2)^2}$$

$$= \frac{r^4\sqrt{4u^2v^2(4r^2-u^2)(4r^2-v^2) - \{4r^2(u^2+v^2-w^2) - (u^4+v^4-w^4)\}^2}}{(4r^2-u^2)(4r^2-v^2)(4r^2-w^2)}.$$

CLXXXVII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Aan de uiteinden van een draad zonder gewicht, loopende zonder wrijving over een vaste schijf, zijn twee gewichten g en G verbonden, waarvan het eerste zich vrij over eene massieve in een vertikaal vlak geplaatste parabel, en het andere over eene door het brandpunt gaande rechte lijn kan bewegen. Indien men nu aanneemt, dat de as der parabel horizontaal ligt en de schijf in het brandpunt is bevestigd, vraagt men hoelang het koord, waaraan het gewicht g hangt, moet genomen worden, opdat er evenwicht zij.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST *en* J. J. BRUTEL DE LA RIVIÈRE.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Zij O (zie fig. 72) het brandpunt en AO de parameter der parabel, dan is hare vergelijking op rechthoekige assen:

$$y^2 = 2px + p^2,$$

en dus hare poolvergelijking:

$$z^2 \, Sin^2\phi = 2pz \, Cos\,\phi + p^2,$$

of wel: $$z^2(1 - Cos^2\phi) = 2pz \, Cos\,\phi + p^2,$$

dat is:

$$z^2 = z^2 \, Cos^2\phi + 2pz \, Cos\,\phi + p^2 \quad \text{of} \quad z = z \, Cos\,\phi + p. \quad \text{(a)}$$

Nemen wij nu aan dat het gewicht g aan het koord OP $= z$ in het punt P met het gewicht G, dat op de rechte lijn BO hangt, in evenwicht is en ontbinden wij de kracht g in twee krachten loodrecht op en in de richting van de raaklijn aan het punt P, dan is blijkbaar, indien wij de laatste k noemen:

$$k = g\,(Cos\,(\psi + \phi) = g\,(Cos\,\psi \, Cos\,\phi - Sin\,\psi \, Sin\,\phi);$$

waarin ψ den hoek voorstelt, dien de voerstraal met de raak-

Digitized by Google

lijn maakt. Substitueert men hierin de bekende waarden van $Cos\,\psi$ en $Sin\,\psi$, dan vindt men:

$$k = g\frac{Cos\,\phi - z\,Sin\,\phi.\frac{d\phi}{dz}}{\sqrt{\left\{1+\left(z\frac{d\phi}{dz}\right)^2\right\}}}.$$

Door nu (a) te differentieeren, verkrijgt men:

$$dz = Cos\,\phi\,dz - z\,Sin\,\phi\,d\phi,$$

dus:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{Cos\,\phi - 1}{z\,Sin\,\phi}.$$

Wij hebben dan: $Cos\,\phi - z\,Sin\,\phi\,\frac{d\phi}{dz} = 1$

$$\sqrt{\left\{1+\left(z\frac{d\phi}{dz}\right)^2\right\}} = \frac{\sqrt{2(1-Cos\,\phi)}}{Sin\,\phi},$$

en derhalve:

$$k = \frac{g\,Sin\,\phi}{\sqrt{2(1-Cos\,\phi)}}.$$

Dewijl nu de kracht, welke aan het andere einde van het koord werkt, $G.Sin\,\alpha$ is, indien G het gewicht en α de helling der lijn met een horizontaal vlak voorstelt, zoo moet

$$\frac{g\,Sin\,\phi}{\sqrt{2(1-Cos\,\phi)}} = G\,Sin\,\alpha \quad \text{zijn.}$$

Daaruit volgt:

$$g^2\,Sin^2\,\phi = g^2(1-Cos^2\,\phi) = 2G^2\,Sin^2\,\alpha(1-Cos\,\phi)$$

of:

$$g^2(1+Cos\,\phi) = 2G^2\,Sin^2\,\alpha,$$

waaruit:

$$Cos\,\phi = \frac{2G^2\,Sin^2\,\alpha - g^2}{g^2}. \quad \text{en} \quad 1 - Cos\,\phi = \frac{2(g^2 - G^2\,Sin\,\alpha)}{g^2}.$$

Door middel van (a) vindt men dan:

$$z = \frac{p}{1-Cos\,\phi} = \frac{pg^2}{2(g^2 - G^2\,Sin^2\,\alpha)}.$$

Zijn de gewichten gelijk, dan is $z = \frac{p}{2\,Cos^2\,\alpha}$ en voor $\alpha = 45°$ wordt $z = p$.

CLXXXVIII. Voorstel. (*)

Door L. van Zanten Jzn.

Terwijl eene komeet eene parabolische baan beschrijft, onder-

(*) Dit en het volgend voorstel zijn ontleend aan Jullien, *Probl. de Mécanique.*

Digitized by Google

stelt men een veranderlijken cirkel, die steeds door de zon, de komeet en den top der parabel gaat. Bewijs, dat het middelpunt van den cirkel eene eenparige beweging heeft.

Opgelost *door* W. Kapteyn, L. van Zanten Jzn. *en* J. J. Brutel de la Rivière.

Oplossing *van* W. Kapteyn.

Zij C (fig. 73) de stand van de komeet op een willekeurig oogenblik, A de top en B het brandpunt van hare parabolische loopbaan: dan zal het middelpunt van den cirkel, die door A, B en C gaat, moeten liggen in het snijpunt van de twee loodlijnen DM en EM, opgerigt uit het midden der lijnen AB en BC. Daar van de punten A, B en C, C alleen veranderlijk is, zal het punt M, bij de beweging van C, zich langs de rechte lijn DM moeten verplaatsen.

Zij $MD = u$, de parameter der parabel p, de ware anomalie θ, de voerstraal r en de lijn BF evenwijdig aan EM, dan is:

$$MD = MF + FD,$$

$$MD = \frac{EB}{Cos\ FBD} + BD\ tg\ FBD,$$

$$u = \frac{\frac{1}{2}r}{Cos\ (\theta - 90)} + \tfrac{1}{2}p\ tg\ (\theta - 90),$$

$$u = \frac{2r - p\ Cos\ \theta}{4\ Sin\ \theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Verder is bekend:

$$r = \frac{p}{1 + Cos\ \theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en

$$t = c\,(tg\ \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{3}tg^3\ \tfrac{1}{2}\theta), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarin t de tijd en c eene bekende constante voorstelt.

De berekening van $\frac{du}{dt}$ is nu:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Uit (1) volgt:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{p + 2\,Sin\ \theta\,\frac{dr}{d\theta} - 2r\ Cos\ \theta}{4\,Sin^2\ \theta};$$

hierin gesubstitueerd

$$r = \frac{p}{1 + Cos\ \theta} \quad \text{en} \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{p\ Sin\ \theta}{(1 + Cos\ \theta)^2},$$

Digitized by Google

wordt: $$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{3p}{4(1 + Cos\,\vartheta)^2}.$$

Uit (3) volgt: $$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{c}{2Cos^4\,\frac{1}{2}\vartheta} = \frac{2c}{(1 + Cos\,\vartheta)^2},$$

zoodat: $$\frac{du}{dt} = \frac{3p}{8c} = \text{Const.}$$

CLXXXIX. VOORSTEL.

Door L. VAN ZANTEN JZN.

Een kleine bol van gegevene elasticiteit wordt in eene gegevene richting opgeworpen boven een hellend vlak, dat door het aanvangspunt der beweging gaat, en loopt springende over het vlak. Men vraagt den hoek van invallen en van terugkaatsing te bepalen.

OPGELOST *door* J. J. BRUTEL DE LA RIVIÈRE *en* L. VAN ZANTEN JZN.

OPLOSSING *van* J. J. BRUTEL DE LA RIVIÈRE.

Zij OX (fig. 74) het hellende vlak, makende met den horizontaal OA een hoek i. Zij v de aanvankelijk medegedeelde snelheid, makende met OX een hoek α_0. Zij verder g de versnelling der zwaartekracht en Ox en Oy de coördinaten-assen, die loodrecht op elkaâr staan, dan zijn de bewegings-vergelijkingen van de bol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\,Sin\,i \quad \text{en} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g\,Cos\,i,$$

waaruit volgt: $$\frac{dx}{dt} = -gt\,Sin\,i + v\,Cos\,\alpha_0,$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt\,Cos\,i + v\,Sin\,\alpha_0$$

en $$y = -\tfrac{1}{2}gt^2\,Cos\,i + vt\,Sin\,\alpha_0.$$

Is B het punt, waar de bol het vlak voor de eerste maal treft, dan is dus daarvoor:

$$y = 0 = -\tfrac{1}{2}gt\,Cos\,i + v\,Sin\,\alpha_0.$$

Substitueert men de hieruit voortvloeiende waarde van t in $\frac{dx}{dt}$ en $\frac{dy}{dt}$, dan wordt dus:

$$Tg\,OBC = Tg\beta_1 = -\frac{dy}{dx} = \frac{Sin\,\alpha_0\,Cos\,i}{-2Sin\alpha_0 Sin\,i + Cos\alpha_0 Cos\,i} = \frac{Tg\,\alpha_0}{-2Tg\alpha_0 Tg\,i + 1}.$$

Zij verder e de elasticiteit van den bol, dan wordt dus na

Digitized by Google

de botsing de snelheid loodrecht op OX e maal grooter en dus:

$$Tg\ DBx = Tg\ \alpha_1 = e\ Tg\ \beta_1 = \frac{e\,Tg\,\alpha_0}{-2\,Tg\,\alpha_0\ Tg\,i + 1};$$

evenzoo:

$$Tg\ \alpha_2 = e\ Tg\ \beta_2 = \frac{e^2\ Tg\ \alpha_0}{1 - 2\,Tg\,i\ Tg\,\alpha_0(1+e)} = \frac{e^2\ tg\ \alpha_0}{1-2(1+e)\,tg\,i\,tg\,\alpha_0}$$

en dus:

$$Tg\ \alpha_n = e\ Tg\ \beta_n = \frac{e^n\ Tg\ \alpha_0}{1 - 2(1 + e + \ldots e^{n-1})\ tg\,i\ tg\ \alpha_0}$$

$$= \frac{(1-e)\,e^n\ Tg\ \alpha_0}{(1-e) - 2(1-e^n)\,tg\,i\,tg\ \alpha_0}.$$

CXC. Voorstel. (*)

Door C. J. Matthes.

Drie kegelsneden zijn beschreven, die elk twee zijden van een driehoek in de hoekpunten aanraken en tevens door één zelfde punt gaan. Te bewijzen, dat de ontmoetingspunten der raaklijnen in dat gemeenschappelijk punt met de zijden, die derzelver respective kegelsneden snijden, op eene zelfde rechte lijn gelegen zijn, en dat de raaklijnen, welke aan die kegelsneden, twee aan twee, gemeen zijn, behalve de zijden deze in dezelfde drie punten ontmoeten.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

De tangentiale vergelijking eener kegelsnede is:

$$up^2 + vq^2 + wr^2 + 2u'qr + 2v'rp + 2w'pq = 0.$$

Aangezien de kegelsnede die, in de uiteinden van BC, BA en CA aanraakt, in de eerste plaats het punt B moet bevatten, heeft men, in de algemeene vergelijking $q = 0$ stellende, dat $up^2 + wr^2 + 2v'rp = 0$ een volkomen vierkant tot voorste lid moet hebben, waaruit $v' = \sqrt{uw}$. Maar de raaklijn in B moet samenvallen met BA, waarvoor $p = q = 0$; dit vordert $w = 0$ en mitsdien ook $v' = 0$. Evenzoo geeft de raking in het punt C, $v = w' = 0$, zoodat de vergelijking der kegelsnede, die BC tot koorde heeft, wordt:

$$up^2 + 2u'qr = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Die der kegelsnede door C en A is:

$$vq^2 + 2v'rp = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

(*) Dit en de volgende vijf voorstellen zijn ontleend aan Ferrer's *Nieuwere Meetkunde*, voorbeelden 53—58.

Digitized by Google

Die der kegelsnede door A en B is:

$$wr^2 + 2w'pq = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Zij nu $lp + mq + nr = 0$ de vergelijking van het snijdingspunt P. Combineert men die dan met vergelijking (1), zoo verkrijgt men de coördinaten der raaklijnen uit P aan (1), maar daar P ondersteld wordt aan den omtrek dier kegelsnede te liggen, moeten beide raaklijnen samenvallen, en derhalve zal, na eliminatie van p bijv., het voorste lid een volkomen vierkant moeten worden. Dit geeft:

$$u.\frac{(mq+nr)^2}{l^2} + 2u'qr = 0,$$

$$um^2q^2 + un^2r^2 + 2umnqr + 2u'l^2qr = 0,$$

$$(umn + u'l^2)^2 = u^2m^2n^2 + 2uu'l^2mn + u'^2l^4 = u^2m^2n^2,$$

bijgevolg: $$l^2 = -2\frac{u}{u'}mn;$$

evenzoo: $$m^2 = -2\frac{v}{v'}nl, \quad n^2 = -2\frac{w}{w'}lm,$$

zoodat: $mq - nr = q\sqrt{\frac{v}{v'}} - r\sqrt{\frac{w}{w'}} = 0$ de coördinaten q en r der raaklijn in P aan (1) doet kennen, of wel de vergelijking is van haar ontmoetingspunt met BC; terwijl men tevens voor het doorsnijdingspunt P heeft gevonden:

$$(l, m, n) :: \left(\sqrt{\frac{u}{u'}}, \sqrt{\frac{v}{v'}}, \sqrt{\frac{w}{w'}}\right).$$

Aan (2) en (3) voldoen $q = 0$ en $r = 0$, gelijk behoort, want BC is eene gemeenschappelijke raaklijn. Ten einde de andere gemeenschappelijke raaklijn te verkrijgen, combineere men de vergelijkingen (2) en (3) en elimineere daartusschen p, zoo vindt men wederom:

$$q\sqrt{\frac{v}{v'}} = r\sqrt{\frac{w}{w'}},$$

waarmede het tweede gedeelte der stelling bewezen is.

De rechte lijn door de punten op BC en CA heeft tot coördinaten: $$(p, q, r) :: \left(\sqrt{\frac{u'}{u}}, \sqrt{\frac{v'}{v}}, \sqrt{\frac{w'}{w}}\right),$$

en bevat derhalve ook het punt op AB, waarvan de vergelijking is: $$p\sqrt{\frac{u}{u'}} - q\sqrt{\frac{v}{v'}} = 0.$$

Digitized by Google

CXCI. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Een stelsel van hyperbels is een gegeven driehoek omschreven. Te bewijzen, dat, als eene der asymptoten steeds door een bepaald punt gaat, de andere altijd eene vaste kegelsnede zal aanraken, den driehoek in- of aan-geschreven.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

De algemeene tangentiale vergelijking eener kegelsnede den assendriehoek omschreven is (zie *N. M.* § 135)

$$L^2p^2 + M^2q^2 + N^2r^2 - 2MNqr - 2NLrp - 2LMpq = 0;$$

die van het middelpunt (§ 139):

$$L(L - M - N)p + M(M - N - L)q + N(N - L - M)r = 0.$$

Uit beide $\frac{p}{r}$ en $\frac{q}{r}$ opgelost, geeft voor de coördinaten der asymptoten:

$$\frac{p}{r} = \frac{P + 2NL \pm (N + L - M)\sqrt{P}}{2NL},$$

$$\frac{q}{r} = \frac{P + 2MN \mp (M + N - L)\sqrt{P}}{2MN},$$

waarin kortheidshalve

$$L^2 + M^2 + N^2 - 2MN - 2NL - 2LM = P$$

gesteld is.

Laat p_1, q_1, r_1 met het bovenste teeken de coördinaten der eene asymptoot, p_2, q_2, r_2 met het onderste teeken die der andere asymptoot voorstellen, dan blijkt gemakkelijk, dat:

$$\frac{p_1}{r_1} = \frac{P + 2NL + (N + L - M)\sqrt{P}}{2NL} = \frac{2NL}{P + 2NL - (N + L - M)\sqrt{P}} = \frac{r_2}{p_2}$$

en

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{P + 2MN - (M + N - L)\sqrt{P}}{2MN} = \frac{2MN}{P + 2MN + (M + N - L)\sqrt{P}} = \frac{r_2}{q_2}.$$

Voldoen dus p_1, q_1, r_1 aan de vergelijking van het een of ander vast punt: $lp + mq + nr = 0$, dan voldoen p_2, q_2, r_2 aan de vergelijking $\frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} = 0$, die eene ingeschreven kegelsnede voorstelt; deze wordt mitsdien door de tweede asymptoot aangeraakt.

Digitized by Google

CXCII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Eene parabel raakt eene zijde van een driehoek in haar midden aan en tevens de verlengden der twee andere zijden. Te bewijzen, dat de loodlijnen, uit de hoekpunten des driehoeks op eene willekeurige raaklijn aan de parabel nedergelaten, termen zijn eener harmonische reeks.

Opgelost *door* C. J. Matthes, G. de Vries *en* G. J. D. Mounier.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

De algemeene tangentiale vergelijking eener ingeschreven kegelsnede is: $u'qr + v'rp + w'pq = 0$, ... (a)

de voorwaarde voor een parabel:

$$u' + v' + w' = 0 \text{.. . . . . (b)}$$

De vergelijking van het midden D der zijde BC is:

$$q + r = 0 \text{ . . . . . (c)}$$

Deze gecombineerd met (a), moet, daar D een punt is der kegelsnede, twee gelijke waarden geven en wel, daar BC in D raaklijn is, $q = 0$, $r = 0$.

Daarom volgt uit $q\,[p\,(v' - w') + qu'] = 0$: $v' = w'$.

De vergelijking der kegelsnede wordt nu:

$$u'qr + pv'\,(q + r) = 0;$$

de voorwaarde voor de parabel:

$$u' + 2v' = 0.$$

Uit beide eindelijk u', v' elimineerende, krijgt men:

$$-2qr + p(q + r) = 0 \quad \text{of} \quad p\,(q + r) = 2qr,$$

waarmeê de stelling bewezen is.

CXCIII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Bewijs, dat de tangentiale vergelijking van den negenpunts-cirkel des assendriehoeks is:

$$a\,(q + r)^{\frac{1}{2}} + b\,(r + p)^{\frac{1}{2}} + c\,(p + q)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

De negenpunts-cirkel van den assendriehoek ABC gaat door $A_1B_1C_1$, de middelpunten van BC, CA, AB, en is dus omschreven om $\triangle A_1B_1C_1$. Met opzicht tot dezen driehoek is derhalve de tangentiale vergelijking (zie § 138, bl. 129):

$$ap_1^{\frac{1}{2}} + bq_1^{\frac{1}{2}} + cr_1^{\frac{1}{2}} = 0;$$

Digitized by Google

maar $p_1 = \frac{1}{2}(q+r)$, $q_1 = \frac{1}{2}(r+p)$, $r = \frac{1}{2}(p+q)$. Zij gaat derhalve over voor den oorspronkelijken driehoek in:

$$a(q+r)^{\frac{1}{2}} + b(r+p)^{\frac{1}{2}} + c(p+q)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

CXCIV. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Te bewijzen, dat de afstand tusschen de punten, wier rechthoekig tangentiale vergelijkingen zijn:
$a\xi + b\eta = 1$ *en* $a'\xi + b'\eta = 1$ *is* $\sqrt{[(a'-a)^2 + (b'-b)^2]}$.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Vereenigt men de beide punten P en P′ (zie fig. 75) door eene lijn die OX in H en OY in K snijdt, dan zullen $\frac{1}{OH}$ en $\frac{1}{OK}$ de waarden van ξ_1 en η_1 zijn, die men verkrijgt door ξ en η uit de beide vergelijkingen $a\xi + b\eta = 1$ en $a'\xi = b'\eta = 1$ op te lossen. Door derhalve de eerste van de tweede af te trekken, heeft men:

$$(a'-a)\,\xi_1 + (b'-b)\,\eta_1 = 0 \text{ of } \frac{\xi_1}{\eta_1} = -\frac{b'-b}{a'-a}.$$

De figuur geeft voorts:

$$OH : KH = AA' : PP' = (a-a)\,\xi_1 \sqrt{\left(\frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\eta_1^2}\right)}$$

$$= (a'-a)\sqrt{\left[1 + \frac{(b'-b)^2}{(a'-a)^2}\right]} = \sqrt{[(a'-a)^2 + (b'-b)^2]}.$$

CXCV. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Bewijs, dat de cosinus van den hoek tusschen de lijnen, wier rechthoekig tangentiale coördinaten zijn (ξ, η) *en* (ξ', η') *is*

$$\frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2)}}.$$

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Blijkens fig. 76 heeft men:

$$\begin{aligned} Cos\, HPH' &= Cos\,(OHK - OH'K') \\ &= Cos\, OHK . Cos\, OH'K' + Sin\, OHK\, Sin\, OH'K' \\ &= \frac{OH.OH' + OK.OK'}{HK.H'K'} \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$=\left(\frac{1}{\xi\xi'}+\frac{1}{\eta\eta'}\right):\frac{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)}}{\xi\eta}.\frac{\sqrt{(\xi'^2+\eta'^2)}}{\xi'\eta'}$$

$$=\frac{\xi\xi'+\eta\eta'}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)(\xi'^2+\eta'^2)}}.$$

CXCVI. VOORSTEL.

Door C. DE HAAS JBZ.

Een driehoek te construeeren, wanneer gegeven zijn de straal van den ingeschreven cirkel, het verschil der opstaande zijden en de tophoek.

OPGELOST *door* C. DE HAAS JBZ. *en* W. H. WISSELINK.

OPLOSSING *van* C. DE HAAS JBZ.

Zij CDE de driehoek, (fig. 77), waarvan gegeven is $\angle C=2\alpha$; de straal r van den ingeschreven cirkel MAB; en $CE-CD=2v$. Dan is bekend $AC=CB=a$. Stel nu $\frac{1}{2}(CD+CE)=x$, dan is: $CE=x+v$ en $CD=x-v$ en

$$DE=CE+CD-2a=2(x-a).$$

Nu is:

Inh. $\triangle CDE=\frac{1}{2}CD.CE.\,Sin\angle C=(x^2-v^2)\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha$

en ook: Inh. $\triangle CDE=\frac{1}{2}r(CE+CD+DE)=r(2x-a)$,

en dus: $(x^2-v^2)\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha=r(2x-a)$. . . . . (1)

of: $$x^2-\frac{2r}{Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha}x=v^2-\frac{ar}{Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha}.$$

Waaruit volgt:

$$x=\frac{r}{Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha}\pm\sqrt{\frac{v^2\,Sin^2\alpha\,Cos^2\alpha-ar\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha+r^2}{Sin^2\alpha\,Cos^2\alpha}}.$$

Nu is: $$r=BC\,tang\,\alpha=a\frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\alpha},$$

dus: $$\frac{r}{Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha}=\frac{a}{Cos^2\alpha}=a\,Sec^2\,\alpha.$$

De grootheid onder het wortelteeken kan men veranderen als volgt:

$$\frac{v^2\,Sin^2\alpha\,Cos^2\alpha-ar\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha+r^2}{Sin^2\alpha\,Cos^2\alpha}=v^2+\frac{r^2-ar\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha}{Sin^2\alpha\,Cos^2\alpha}$$

$$=v^2+\frac{r^2-r^2\,Cos^2\alpha}{Sin^2\alpha\,Cos^2\alpha}=v^2+r^2\,Sec^2\,\alpha,$$

dus: $$x=a\,Sec^2\,\alpha\pm\sqrt{v^2+r^2\,Sec^2\,\alpha}.$$

Nu is $CM=a\,Sec\,\alpha$, en trekt men MF loodrecht op CM, dan is: $CF=MC\,Sec\,\alpha=a\,Sec^2\,\alpha$,

Digitized by Google

en $MF = r\,Sec\,BMF = r\,Sec\,\alpha.$

De constructie is dus deze. Maak $\angle C$ gelijk aan den gegeven hoek; trek met den gegeven straal een cirkel MAB, die de beenen van den hoek raakt; trek MC en MF daar loodrecht op. Verleng CM en maak MG gelijk aan het halve verschil (dus $MG = v$); trek FG en maak $FH = FG$, dan is:

$$CH = CF + FH = CF + FG = CF + \sqrt{MF^2 + MG^2}$$
$$= a\,Sec^2\,\alpha + \sqrt{v^2 + r^2\,Sec\,\alpha},$$

en dus gelijk x; verder maakt men $CI = CH$, $HE = ID = v$; zoodat $CE = x + v$ en $CD = x - v$, en CED is dus de gevraagde driehoek.

Men had ook $FH_1 = FG$ kunnen maken, dan is:

$$CH_1 = CF - FG = a\,Sec^2\,\alpha - \sqrt{v^2 + r^2\,Sec\,\alpha},$$

en dus gelijk aan de tweede waarde van x; maakt men dan $CI_1 = CH_1$, $H_1E_1 = I_1D_1 = v$, zoodat $CE_1 = x + v$ en $CD_1 = x - v$ is, dan verkrijgt men een tweeden driehoek CE_1D_1; deze driehoek voldoet ook aan de gegevens; alleen de cirkel is aangeschreven.

Was namelijk gevraagd den driehoek te beschrijven, waarvan gegeven is, de tophoek, het verschil der opstaande zijden en de straal van den, over den tophoek gelegen, aangeschreven cirkel, dan zou men hier hebben: $x = \frac{1}{2}(CE_1 + CD_1)$.

Dus: $CE_1 = x + v$, $CD_1 = x - v$

en: $D_1E_1 = 2a - (CE_1 + CD_1) = 2(a - x)$,

zoodat Inh. $\triangle CE_1D_1 = (x^2 - v^2)\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha$

en ook Inh. $\triangle CE_1D_1 = \frac{1}{2}r(CE_1 + CD_1 - E_1D_1) = r(2x - a)$.

Dus: $(x^2 - v^2)\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha = r(2x - a)$.

Deze vergelijking geheel overeenkomende met (1), moet uit deze vergelijking twee waarden voor x volgen, namelijk:

$$x = \tfrac{1}{2}(CE + CD) \quad \text{en} \quad x = \tfrac{1}{2}(CE_1 + CD_1).$$

CXCVII. VOORSTEL.

Door J. H. SCHÄFER.

Met passer en liniaal een gegeven veelhoek door eene lijn, gaande door een gegeven punt van den omtrek, in twee deelen te verdeelen, die tot elkander staan als twee gegevene lijnen of wel door datzelfde punt dien veelhoek door lijnen in een gegeven aantal gelijke deelen te verdeelen.

OPGELOST *door* J. H. SCHÄFER.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* J. H. SCHÄFER.

1. Zij b. v. ABCDE, (fig. 78) een willekeurige vijfhoek, P, op de zijde AB, het gegeven punt en *M*, *N* de gegeven lijnen, dan is de constructie, die overigens geene verdere toelichting behoeft, de volgende:

1°. Verdeel de zijde AB in reden van M : N en zij Q het verdeelpunt.

2°. Verander den veelhoek in een driehoek ABC′ van gelijken inhoud en trek C′Q, dan staan de driehoeken AC′Q en QC′B tot elkander als M : N.

3°. Breng het gedeelte EC′*e* van den driehoek AC′Q binnen den veelhoek, door C′*g* evenwijdig met EQ te trekken en valt het punt *g* op 't verlengde der zijde DE, zooals hier werkelijk plaats heeft, alsdan nog *gh* = DQ te trekken en vervolgens *h* met Q te vereenigen. Het is duidelijk dat hierdoor

$$EC'e = egQ = eDhQ$$

zal worden en bijgevolg de deelen AQ*h*DEA en QBC*h*Q des veelhoeks, tot elkander zullen staan als M : N.

Even duidelijk is het, dat door het punt P′ zoodanig op DC te nemen, dat de lijnen QP′ en P*h* evenwijdig zijn en vervolgens PP′ te trekken, die lijn de gevraagde zal zijn.

2. Om tot de oplossing van het 2e gedeelte der opgave te geraken, volge men nagenoeg denzelfden weg.

Moet b. v. de vijfhoek ABCDE (fig. 79) door lijnen uit het punt P getrokken, in 3 gelijke deelen verdeeld worden, dan zou men, na den veelhoek in den driehoek NAB van gelijken inhoud te hebben veranderd, op AB het stuk A*a* = $^1/_3$e AB moeten nemen om den driehoek NA*a* gelijk $^1/_3$e veelhoek ABCDE te verkrijgen en dien driehoek op de wijze, als hierboven beschreven is, omgekeerd moeten veranderen in het daaraan gelijke deel Aa_2E van den veelhoek, voorts dit deel in het deel APa_3EA van gelijken inhoud, waarvan de zijde Pa_3 door het gegeven punt gaat en die lijn zal bijgevolg het eerste $^1/_3$e deel van den veelhoek afsnijden.

Om de lijn Pb_1 te construeeren die het overige $^2/_3$e deel PBCDa_3P van den veelhoek in twee gelijke deelen verdeelt, trekke men door den top N de lijn NN_2 evenwijdig aan AB, verlenge Pa_3, snijdende NN_2 in N_1 en neme P*b* = $^1/_3$ AB, dan

Digitized by Google

zal, de lijn N'b trekkende, die ED in b_1 snijdt, de driehoek PN'b weder $= {}^1/_3$ gedeelte des veelhoeks zijn.

Door dien driehoek letterlijk als hier boven beschreven is, te veranderen in het deel Pbb_4Da_3P en dit laatste in het deel Pb_5Da_3P des veelhoeks, zal hierdoor het gedeelte PBCDa_3P in 2 en bijgevolg de veelhoek ABCDE, door de lijnen Pa_3 en en Pb_5 getrokken uit het punt P, in 3 gelijke deelen zijn verdeeld.

Het is ten slotte duidelijk, dat, verlengende Pb_5 tot in N$_2$ en trekkende, bN$_2$ het gedeelte b_5cN$_2$ aan den driehoek P'bN$_2$ $= b$BCc van den veelhoek moet zijn, en dat na het punt c_1 bepaald te hebben, waardoor de driehoeken b_5cN$_2$ en cc_1b gelijken inhoud verkrijgen, bijgevolg — heeft men goed geconstrueerd — de lijnen bC en Bc_1 evenwijdig moeten zijn.

CXCVIII. Voorstel. (*)

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij in eenig punt C *in het verlengde van de middellijn* AB *eens cirkels eene loodlijn op die middellijn opgericht, en op die loodlijn eene lengte* CD *genomen, zijnde de zijde van een vierkant, hetwelk gelijk is aan den rechthoek onder* AC *en* CB, *en die loodlijn aan de andere zijde verlengd en* CE *genomen* $=$ CD. *Trekt men nu uit eenig punt* H *in* DE *gelegen eene lijn, welke den cirkel snijde in* F *en in* G, *dan is tweemaal de rechthoek onder* FH *en* HG *gelijk aan de som der vierkanten op* HD *en* HE. *Vrage naar het bewijs.*

Opgelost *door* W. Kapteyn, W. H. Wisselink, G. de Vries, G. J. D. Mounier *en* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* W. Kapteyn.

Trekt men uit C (fig. 80) eene raaklijn CL aan den cirkel, dan is de afstand van C tot aan het raakpunt L gelijk aan CD, want CL^2 $=$ AC.BC, evenals CD^2, volgens de onderstelling. Men kan dus het punt D gemakkelijk bepalen.

Trekt men bovendien uit H eene raaklijn HK aan den cirkel en verbindt de raakpunten L en K met het middelpunt, dan is het bewijs aldus:

(*) Dit en de twee volgende voorstellen ontleend aan het werkje vermeld bij N°. 92.

Digitized by Google

$$HD^2 = CL^2 + 2CL.CH + CH^2$$
$$HE^2 = CL^2 - 2CL.CH. + CH^2$$
$$HD^2 + HE^2 = 2(CL^2 + CH^2).$$
$$CL^2 = CM^2 - KM^2$$
$$CH^2 = -CM^2 + HM^2$$
op
$$CL^2 + CH^2 = HM^2 - KM^2$$
$$= HK^2,$$
$$= FH.HG,$$

dus: $$HD^2 + HE^2 = 2.FH.HG.$$

CXCIX. VOORSTEL.

Door J. J. TEDING VAN BERKHOUT.

Neme men in de middellijn AB *eens cirkels twee punten aan*, C *en* D, C *buiten, en* D *hetzij binnen, hetzij buiten den cirkel, zoodat het vierkant op* CD *gelijk zij aan den rechthoek onder* AC *en* CB. *Richt men nu in* C *eene loodlijn op en trekt men door* D *eene lijn, welke die loodlijn in* G *en den cirkel in* E *en in* F *snijdt, dan is het vierkant op* GD *gelijk aan den rechthoek onder* EG *en* GF. *Laat men uit* E *en* F *de loodlijnen* EH *en* FK *op de middellijn des cirkels vallen, dan is de rechthoek onder* HC *en* CK *gelijk aan het vierkant op* CD. *Vrage het bewijs.*

OPGELOST *door* W. KAPTEYN, W. H. WISSELINK, G. DE VRIES, G. J. D. MOUNIER *en* J. J. TEDING VAN BERKHOUT.

OPLOSSING *van* W. KAPTEYN.

(Fig. 81). Uit de bepaling van de punten C en D volgt, dat de afstand van C tot aan het raakpunt L gelijk is aan CD. Trekken wij nog de hulplijnen GM, ML en MN, dan is:

$$EG.GF = GN^2$$
$$= MG^2 - MN^2$$
$$= MC^2 + CG^2 - MN^2,$$

maar $$MC^2 - MN^2 = CL^2 = CD^2,$$

zoodat $$EG.GF = CG^2 + CD^2$$
$$= GD^2.$$

En evenzoo, wanneer men CL op de verlengde ABC uitzet in D′ en dan door D′ eene lijn trekt, welke de loodlijn, in C opgericht, in G′ en den cirkel in E′ en F′ snijdt, $E'G'.G'F' = G'D'^2$.

Uit het bovenstaande is bekend:

Digitized by Google

$$GD^2 = GE.GF. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Uit de gelijkvormigheid der driehoeken KDF, DHE en DCG volgt:

$$\frac{CD}{GD} = \frac{HC}{GE} = \frac{KC}{GF},$$

dus is ook:

$$\frac{CD^2}{GD^2} = \frac{HC}{GE} \cdot \frac{KC}{GF}.$$

Hieruit volgt in verband met (1)

$$CD^2 = HC.KC,$$

en evenzoo $CD'^2 = H'C.K'C$, wanneer men uit E′ en F′ de loodlijnen E′H′ en F′K′ op de middellijn laat vallen.

CC. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Trekt men in een cirkel twee koorden AB *en* CD, *die elkander snijden in* E, *vereenigt men de punten* C *en* B *en trekt uit het punt* D *eene lijn evenwijdig aan* CB, *de koorde* AB *ontmoetende in* F, *dan is de rechthoek onder* AE *en* EF *gelijk aan het vierkant op* DE. *Vrage het bewijs.*

Opgelost *door* G. de Vries, G. J. D. Mounier, W. H. Wisselink, W. Kapteyn *en* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* G. de Vries.

(Fig. 82.) Daar DF evenwijdig loopt aan BC, is $\angle EBC = \angle DFE$, dus zijn de driehoeken DFE en BCE gelijkvormig.

Vereenigt men D met A, dan wordt $\angle ADE$ door denzelfden boog als $\angle EBC$ gemeten. Dus zijn de driehoeken DAE en EBC gelijkvormig.

Daarom ook $\triangle DFE$ en $\triangle DAE$ gelijkvormig, dus:

$$FE : DE = DE : AE,$$

waaruit:

$$\square\, DE = \text{rechth. } AE.FE.$$

CCI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Een gegeven drie-vlakkige hoek wordt door vlakken gesneden, welke alle door twee gegeven punten, in twee der ribben genomen, gaan. Men vraagt naar de meetkundige plaats van het zwaartepunt der pyramide, welke daardoor ontstaat.

Digitized by Google

OPGELOST *door* W. VAN HAARST, M. BEENS *en* H. A. LORENTZ.

OPLOSSING *van* M. BEENS.

Laat PABC de drievlakkige hoek zijn en A en B de gegevene punten in twee ribben. Van een der vlakken wordt door de aantebrengen snijvlakken dus telkens een driehoek ABP afgesneden. De ontstaande pijramiden kan men alzoo beschouwen als allen ABP tot grondvlak te hebben, terwijl haar toppunt ergens in PC ligt. Het zwaartepunt eener pijramide ligt in de lijn die uit het zwaartepunt Z van het grondvlak ABP naar den top getrokken wordt, en wel op $^1/_4$ van die lijn, van Z af gerekend. Daar nu, door de draaiing van het snijvlak rond AB, elk punt van de lijn PC achtereenvolgens de top eener pijramide wordt, zoo heeft men Z ook met al die punten te verbinden, en deze verbindingslijnen, die allen in hetzelfde vlak liggen dat door PZ en PC gaat, te verdeelen in twee deelen, staande in reden van 1: 3, en de vereeniging dezer deelpunten, die de zwaartepunten der pijramiden voorstellen, levert dus eene lijn, die evenwijdig aan PC moet loopen, (omdat zij alle lijnen van Z naar PC getrokken, in dezelfde reden verdeelt,) en die de gevraagde meetkundige plaats is.

CCII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Op twee der zijden en op de loodlijn, welke op de derde zijde van een gegeven driehoek wordt nedergelaten, heeft men gelijkvormige driehoeken beschreven, naar denzelfden kant gekeerd. Men wil bewezen hebben, dat hunne toppen in eene rechte lijn liggen en tevens het punt, waar deze lijn de loodlijn des gegeven driehoeks snijdt, benevens de onderlinge afstanden dier toppen bepaald.

OPGELOST *door* W. VAN HAARST, M. BEENS, G. J. D. MOUNIER *en* H. A. LORENTZ.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Beschrijven wij (zie fig. 83) op AD, AB en AC de gelijkvormige driehoeken APD, AP_1B en AP_2C, dan willen wij eerst bewijzen, dat de toppen P, P_1 en P_2 dier driehoeken in eene rechte lijn liggen. Daartoe trekken wij PP_1, dan volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken APD en AP_1B, dat $\angle DAP = \angle BAP_1$ en bij deze gelijkheid aan beide zijden voegende

Digitized by Google

$\angle DAP_1$, $\angle PAP_1 = \angle BAD$ en dewijl, wegens de gelijkvormigheid der driehoeken AP_1B en APD, $AB : AP_1 = AD : AP$ of $AB : AD = AP_1 : AP$, zijn de driehoeken ABD en PAP_1 mede gelijkvormig, waaruit blijkt dat hoek APP_1 recht is. Trekken wij nu PP_2, dan vinden wij op gelijke wijze, dat driehoek APP_2 gelijkvormig is aan driehoek ADC, zoodat hoek APP_2 mede recht is en bijgevolg P_1P_2 eene rechte lijn, en ook de geheele driehoek P_1AP_2 gelijkvormig aan den driehoek ABC.

Noemen wij nu de hoogte AD van den driehoek ABC h, de hoogte AP van den driehoek P_1AP_2 m, dan is wegens de gelijkvormigheid dezer driehoeken:

$$\frac{PP_1}{BD} = \frac{PP_2}{CD} = \frac{AP_2}{AC} = \frac{AP}{AD},$$

waaruit volgt:

$$PP_2 = AP.\frac{CD}{AD},\ PP_1 = AP.\frac{BD}{AD},$$

of indien wij $BD = a'$, $CD = a''$ stellen:

$$PP_2 = m.\frac{a''}{h} \text{ en } PP_1 = m.\frac{a'}{h}.$$

En in den rechthoekigen driehoek APX heeft men $AX = AP\ Sec \angle PAD$, of wanneer wij voor dezen hoek ϕ stellen:

$$AX = m\ Sec\ \phi.$$

CCIII. VOORSTEL.

Door W. VAN HAARST.

Men vraagt de fraaie interpolatie-formule van LAGRANGE,

$$y = y_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$$
$$+ y_2 \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}$$
$$+ y_3 \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_3-a_n)}$$
$$+\ldots+ y_n \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}$$

te bewijzen. (Zie LOBATTO, Hoogere Algebra, § 203.)

OPGELOST *door* W. VAN HAARST *en* H. A. LORENTZ.

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Indien y_1, y_2, $y_3 \ldots y_n$ de n bijzondere waarden eener functie y voor $x = a_1$, $x = a_2$, $x = a_3 \ldots x = a_n$ voorstel-

Digitized by Google

len, dan zal men y als den algemeenen term eener reeks van de $(n-1)^e$ orde kunnen beschouwen en de waarde daarvan kunnen voorstellen door de formule:

$$\left.\begin{array}{l} y = A_1 + A_2(x-a_1) + A_3(x-a_1)(x-a_2) \\ + A_4(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots + A_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) \end{array}\right\} \text{(a)}$$

waarin de onbekende coëfficiënten A_1, A_2 enz. bepaald moeten worden door de n gegevene waarden van y, dat is, door de waarden y_1, y_2, y_3 enz., die y verkrijgt, door $x = a_1$, $x = a_2$, $x = a_3$ enz. te stellen. Wij hebben alzoo

voor $x = a_1$, $\quad y = y_1 = A_1$;

voor $x = a_2$, $\quad y = y_2 = A_1 + A_2(a_2 - a_1)$,

voor $x = a_3$,

$$y = y_3 = A_1 + A_2(a_2 - a_1) + A_3(a_3 - a_1)(a_3 - a_2),$$

voor $x = a_4$, $\quad y = y_4 = A_1 + A_2(a_4 - a_1)\ldots.$

$+ A_3(a_4 - a_1)(a_4 - a_2) + A_4(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$ enz.,

dus voor $x = a_n$,

$$\begin{aligned} y = y_n = A_1 &+ A_2(a_n - a_1) + A_3(a_n - a_1)(a_n - a_2) \\ &+ A_4(a_n - a_1)(a_n - a_2)(a_n - a_3) \\ &+ A_n(a_n - a_1)(a_n - a_2)(a_n - a_3)\ldots(a_n - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Daaruit volgt blijkbaar:

$A_1 = y_1$,

$$A_2 = \frac{y_2 - y_1}{a_2 - a_1} = \frac{y_1}{a_1 - a_2} + \frac{y_2}{a_2 - a_1},$$

$$A_3 = \frac{y_3 - y_1 - \dfrac{(y_2 - y_1)(a_3 - a_1)}{a_2 - a_1}}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} \quad \text{of}$$

$$A_3 = \frac{y_1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + \frac{y_2}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + \frac{y_3}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)},$$

$$A_4 = \frac{y_1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)} + \frac{y_2}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)}$$

$$+ \frac{y_3}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)} + \frac{y_4}{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)},$$

derhalve:

$$A_n = \frac{y_1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)} + \frac{y_2}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)\ldots(a_2 - a_n)}$$

$$+ \frac{y_3}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)\ldots(a_3 - a_n)}$$

Digitized by Google

$$+\frac{y_4}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)\ldots(a_4-a_n)}+\text{enz}\ldots$$

$$+\frac{y_n}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

Door deze waarden in (a) te substitueren, verkrijgt men:

$$y=y_1\left\{1+\frac{x-a_1}{a_1-a_2}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\right.$$

$$\left.+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}+\text{enz.}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}\right\}$$

$$+y_2\left\{\frac{x-a_1}{a_2-a_1}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}\right.$$

$$\left.+\text{enz.}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}\right\}$$

$$+y_3\left\{\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}\right.$$

$$\left.+\text{enz}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_3-a_n)}\right\}+\text{enz.}$$

Nu is: $$1+\frac{x-a_1}{a_1-a_2}=\frac{x-a_2}{a_1-a_2}.$$

Voegt men hierbij den derden term, dan komt er:

$$\frac{x-a_2}{a_1-a_2}\left(1+\frac{x-a_1}{a_1-a_3}\right)=\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}.$$

De som der vier eerste termen wordt dan:

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\left(1+\frac{x-a_2}{a_1-a_4}\right)=\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$$

en men vindt alzoo voor de som van de n termen, die den coëfficiënt van y_1 vormen:

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_n)}.$$

Nu is evenzoo van den coëfficiënt van y_2 de som der beide eerste termen: $$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\left(1+\frac{x-a_2}{a_2-a_3}\right)=\frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$

en het is gemakkelijk in te zien, welke wet daarin heerscht, en dat men alzoo verkrijgt:

$$y=y_1\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_n)}$$

$$+y_2\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_2-a_n)}$$

Digitized by Google

$$+ y_3 \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)\ldots\ldots(a_3-a_n)}$$

$$+ \text{enz.} + y_n \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

OPLOSSING *van* H. A. LORENTZ.

Het vraagstuk, dat door de interpolatie-formule van LAGRANGE is opgelost, is het volgende:

Een polynomium van den $n-1^{\text{sten}}$ graad ten opzichte van x te vinden, dat voor n gegeven waarden van x namelijk a_1, $a_2 \ldots a_n$ de gegeven waarden y_1, $y_2 \ldots y_n$ verkrijgt. Vooreerst merken wij op dat dit vraagstuk in het algemeen ééne, maar ook slechts ééne oplossing toelaat, want beschouwt men de n coëfficienten van het polynomium als onbekenden, dan verkrijgt men ter bepaling daarvan n lineaire vergelijkingen, die slechts één stelsel waarden opleveren. Hoe men derhalve ook een polynomium vindt, dat aan de vraag voldoet, dat moet altijd het eenig mogelijke zijn.

Om zulk een uitdrukking te vinden, kunnen wij eerst een polynomium $F_1(x)$ zoeken van den $n-1^{\text{sten}}$ graad en dat voor $x = a_1$ de waarde y_1 heeft, voor $x = a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ daarentegen de waarde 0. Evenzoo een polynomium $F_2(x)$, dat voor $x = a_2$ de waarde y_2 heeft, voor $x = a_1, a_3$, enz. de waarde 0, enz. Op deze wijze verkrijgt men n uitdrukkingen $F_1(x)$. $F_2(x) \ldots\ldots F_n(x)$ en klaarblijkelijk zal dan:

$$y = F_1(x) + F_2(x) + \ldots\ldots + F_n(x)$$

juist aan de opgave voldoen.

Om $F_1(x)$ te vinden, merken wij op dat een polynomium dat voor $x = a_2$, a_3 enz. $= 0$ wordt, $x - a_2$, $x - a_3$, enz. tot factoren moet hebben. $F_1(x)$ heeft dus den factor:

$$(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n)$$

en daar deze reeds van den $n-1^{\text{sten}}$ graad is, moet noodzakelijk $F_1(x) = A(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n)$ zijn, waarin A x niet bevat. Wij bepalen nu A door de voorwaarde dat voor $x = x_1$, $F_1(x) = y_1$ moet worden; dit geeft ons:

$$y_1 = A(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ \ldots(a_1-a_n),$$

$$A = \frac{y_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)},$$

Digitized by Google

dus:

$$F_1(x) = y_1 \cdot \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n)}.$$

Evenzoo vindt men $F_2(x)$, enz, die men ook door verandering der indices uit $F_1(x)$ kan afleiden. Ten slotte verkrijgt men de formule van LAGRANGE.

CCIV. VOORSTEL.

Door J. M. HEIJBROCK.

Men vraagt den inhoud te bepalen van het lichaam, dat ontstaat, wanneer men de cissoïde om hare asymptoot laat omwentelen.

OPGELOST *door* J. M. HEIJBROCK *en* J. H. SCHÄFER.

OPLOSSING *van* J. M. HEIJBROCK.

Zooals men weet, is de vergelijking der cissoïde:

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{2r-x}}.$$

Uit den vorm der kromme lijn blijkt dat het zwaartepunt van de vlakte begrepen tusschen de cissoïde en hare asymptoot ligt op de x-as, en wel in het punt Z, zoodanig dat:

$$OZ = \frac{\int xydx}{\int ydx};$$

beide integralen moeten genomen worden tusschen $x = 0$ en $x = 2r$:

$$OZ = \frac{\int_0^{2r} x^2\sqrt{\frac{x}{2r-x}}\cdot dx}{\int_0^{2r} x\sqrt{\frac{x}{2r-x}}\cdot dx} = \frac{{}^5/_2\,\pi r^3}{{}^3/_2\,\pi r^2} = \frac{5}{3}r,$$

de lijn ZA (afstand van het zwaartepunt tot de asymptoot)

$$= OA - OZ = 2r - \frac{5}{3}r = \frac{1}{3}r.$$

Nu is volgens den regel van GULDIN het gevraagde lichaam = de vlakke inhoud der cissoïde maal den omtrek des cirkels, hebbende tot straal de lijn $ZA = {}^1/_3 r$.

$$\text{Inhoud cissoïde} = 2\int ydx = 3\pi r^2,$$

$$\text{Omw. lichaam} = 3\pi r^2 \times {}^2/_3\pi r = 2\pi^2 r^3.$$

CCV. VOORSTEL.

Door J. M. HEIJBROCK.

Men vraagt den tijd te bepalen, dien een lichaam noodig

Digitized by Google

heeft, om van uit den top langs een gegeven boog eener verticale cissoïde te vallen, in de onderstelling, dat de asymptoot der kromme lijn een' horizontalen stand heeft, den tegenstand der lucht buiten rekening latende.

OPGELOST *door* J. M. HEIJBROCK.

OPLOSSING *van* J. M. HEIJBROCK.

De formule voor den tijd, dien een lichaam besteedt om langs eene verticale kromme lijn te vallen, welker vergelijking op de regthoekige coördinaten gegeven is, is:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{\sqrt{(dz^2 + dy^2)}}{\sqrt{z}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De vergelijking der cissoïde is:

$$y = \pm z \sqrt{\frac{z}{2r - z}}.$$

Uit deze vergelijking vindt men achtervolgens:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{3r - z}{2r - z}\sqrt{\frac{z}{2r - z}}; \frac{dy^2}{dz^2} = \frac{9r^2z - 6rz^2 + z^3}{(2r - z)^3};$$

$$\frac{dz^2 + dy^2}{dz^2} = \frac{8r^3 - 3r^2z}{(2r - z)^3}; \sqrt{(dz^2 + dy^2)} = \frac{rdz}{2r - z}\sqrt{\frac{8r - 3z}{2r - z}}.$$

Dit in (1) gevoegd, geeft:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{g}} \int \frac{dz}{2r - z}\sqrt{\frac{8r - 3z}{(2r - z)z}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Om dezen vorm te integreeren, stelt men:

$$\frac{z}{2r - z} = s^2,$$

dit geeft:

$$z = \frac{2rs^2}{1 + s^2}; dz = \frac{4rs}{(1 + s^2)^2} ds; 2r - z = \frac{2r}{1 + s^2}; \sqrt{z(2r - z)} = \frac{2rs}{1 + s^2}$$

$$\frac{dz}{2r - z} = \frac{2s}{1 + s^2} ds;$$

$$8r - 3z = \frac{8r + 2rs^2}{1 + s^2}; \sqrt{(8r - 3z)} = \sqrt{2r} \times \sqrt{\frac{4 + s^2}{1 + s^2}},$$

deze waarden gevoegd in (2), geeft na herleiding:

$$t = \sqrt{\frac{2r}{g}} \int ds \sqrt{\frac{1 + {}^1/_4 s^2}{1 + s^2}} = \sqrt{\frac{2r}{g}} \int \frac{d\phi}{Cos\phi} \sqrt{(1 + {}^1/_4 tg^2\phi)}, \quad (3)$$

wanneer men namelijk $s = tang\,\phi$ stelt; hierdoor wordt:

$$tang^2\,\phi = \frac{z}{2r - z}; \; Sec^2\,\phi = \frac{2r}{2r - z},$$

Digitized by Google

$$Cos^2\phi = \frac{2r - x}{2r};\ Sin^2\phi = \frac{x}{2r};\ Sin\,\phi = \sqrt{\frac{x}{2r}}.$$

Nu is:

$$(1 + {}^1/_4\, tang^2\phi)^{\frac{1}{2}} =$$

$$1 + {}^1/_8\, tang^2\phi - \frac{1}{128} tang^4\phi + \frac{1}{1024} tang^6\phi - \frac{5}{2^{15}} tg^8\phi + \text{enz.}$$

dit in formule (5) gevoegd, geeft:

$$t = \sqrt{\frac{2r}{g}} \int \left\{ \frac{d\phi}{Cos\,\phi} + \frac{1}{8}\frac{Sin^2\phi\, d\phi}{Cos^3\phi} - \frac{1}{128}\frac{Sin^4\phi}{Cos^5\phi} d\phi \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1024} \cdot \frac{Sin^6\phi}{Cos^7\phi} d\phi - \text{enz.} \right\}.$$

Deze reeks term voor term integreerende, komt er:

$$\int \frac{d\phi}{Cos\,\phi} = log \sqrt{\frac{1 + Sin\,\phi}{1 - Sin\,\phi}},$$

$$\frac{1}{8}\int \frac{Sin^2\phi\, d\phi}{Cos^3\phi} = \frac{1}{16} \cdot \frac{Sin\,\phi}{Cos^2\phi} - \frac{1}{16}\, log \sqrt{\frac{1 + Sin\,\phi}{1 - Sin\,\phi}}$$

$$-\frac{1}{128}\int \frac{Sin^4\phi\, d\phi}{Cos^5\phi} = -\frac{1}{128} \cdot \frac{Sin^3\phi}{Cos^4\phi} + \frac{3}{512} \cdot \frac{Sin\,\phi}{Cos^4\phi}$$
$$-\frac{3}{1024} \cdot \frac{Sin\,\phi}{Cos^2\phi} - \frac{3}{1024}\, log \sqrt{\frac{1 + Sin\,\phi}{1 - Sin\,\phi}},$$

$$\frac{1}{1024}\int \frac{Sin^6\phi\, d\phi}{Cos^7\phi} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{Sin^5\phi}{Cos^6\phi} - \frac{5}{3.2^{10}} \cdot \frac{Sin^3\phi}{Cos^6\phi}$$
$$+ \frac{5}{3.2^{11}} \cdot \frac{Sin\,\phi}{Cos^6\phi} - \frac{5}{3.2^{13}} \cdot \frac{Sin\,\phi}{Cos^4\phi} - \frac{5}{2^{14}} \frac{Sin\,\phi}{Cos^2\phi}$$
$$- \frac{5}{2^{14}}\, log \sqrt{\frac{1 + Sin\,\phi}{1 - Sin\,\phi}},$$

dit geeft:

$$t = \sqrt{\frac{2r}{g}} \left\{ \frac{15307}{16384} Nep\, log \sqrt{\frac{1 + Sin\,\phi}{1 - Sin\,\phi}} + \frac{971}{16384} \cdot \frac{Sin\,\phi}{Cos^2\phi} \right.$$
$$+ \frac{91}{3.2^{13}} \frac{Sin\,\phi}{Cos^4\phi} + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{Sin^3\phi}{Cos^4\phi} + \frac{5}{3.2^{11}} \cdot \frac{Sin\,\phi}{Cos^6\phi}$$
$$\left. - \frac{5}{3.2^{10}} \cdot \frac{Sin^3\phi}{Cos^6\phi} + \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{Sin^5\phi}{Cos^6\phi} - \text{enz.} \right\}.$$

Deze integraal behoeft geene constante, dewijl voor $x = 0$ ook $\phi = 0$ en $t = 0$ wordt.

voor $x = r$ of $\phi = 45^0$ is $t = 0{,}93\sqrt{\frac{2r}{g}} = 0{,}59\sqrt{r}$;

$g = 4{,}906$ El stellende;

Digitized by Google

voor $s = 1\frac{1}{2}r$ of $\phi = 60^0$ is $t = 1{,}691\sqrt{\frac{2r}{g}} = 1{,}08\sqrt{r}$;

voor $s = 2r$ of $\phi = 90^0$ wordt t oneindig, hetgeen duidelijk is, omdat het lichaam eerst na een oneindig groot tijdsverloop den asymptoot bereikt.

CCVI. VOORSTEL.

Door G. J. D. MOUNIER.

Van een rechten cirkelvormigen kegel zijn gegeven de straal van het cirkelvormig grondvlak* R *en de hoogte* H. *Nu is door een punt* P *van de as op een gegeven afstand h van het grondvlak een vlak gebracht dat den kegel snijdt volgens eene ellips. Indien nu bekend is de hoek* ϕ, *dien de groote as van de ellips met eene der opslaande zijden van den as-driehoek maakt, vraagt men den inhoud van den afgeknotten kegel.

OPGELOST *door* J. M. HEIJBROCK *en* G. J. D. MOUNIER.

OPLOSSING *van* J. M. HEIJBROCK.

Zij (fig. 84) AC de as en BC de beschrijvende lijn van den gegeven kegel, dan is: $AB = R$,

$$AC = H,$$
$$PA = h,$$
$$\angle DGO = \phi.$$

Stel verder: $\angle ACB = \alpha$.

In $\triangle$ POC is:

$$PO : CP = Sin\, PCO : Sin\, COP$$
$$PO : H - h = Sin\, \alpha : Sin\, (\phi - 2\alpha)$$
$$PO = (H - h) . \frac{Sin\, \alpha}{Sin\, (\phi - 2\alpha)}.$$

In $\triangle$ CGP is:

$$GP : CP = Sin\, GCP : Sin\, CGP$$
$$GP : H - h = Sin\, \alpha : Sin\, \phi$$
$$GP = (H - h) . \frac{Sin\, \alpha}{Sin\, \phi}.$$

$$GO = PO + GP = (H - h)\, Sin\, \alpha \left\{ \frac{1}{Sin\, (\phi - 2\alpha)} + \frac{1}{Sin\, \phi} \right\}$$

$= $ de groote as der ellips $= 2a$.

In $\triangle$ CGP is:

Digitized by Google

$$\frac{CG : CP = Sin\ CPG : Sin\ CGP}{CG : H - h = Sin\,(\phi - \alpha) : Sin\,\phi}.$$

$$CG : (H - h) . \frac{Sin\,(\phi - \alpha)}{Sin\,\phi)}$$

In Δ CGE is:

$$\frac{GI = 2GC\ Sin\ CGL}{GI = 2\,(H - h)\ \frac{Sin\,(\phi - \alpha)\ Sin\,\alpha}{Sin\,\phi}}.$$

Maakt men $\angle$ GIK $= \angle$ DGO $= \phi$, dan is GK $= p =$ de parameter der ellips.

In Δ GIK is:

$$\frac{GK : GI = Sin\ GIK : Sin\ GKI}{p : GI = Sin\,\phi : Cos\,\alpha}.$$

$$p = GI.\ \frac{Sin\,\phi}{Cos\,\alpha} = 2\,(H - h)\ Sin\,(\phi - \alpha)\,tang\,\alpha$$

Nu is:

$$2ap = 4b^2 = 2(H - h)^2\,Sin\alpha tg\alpha\,Sin(\phi - \alpha)\left\{\frac{1}{Sin(\phi - 2\alpha)} + \frac{1}{Sin\phi}\right\},$$

of stellende: $\frac{1}{Sin\,(\phi - 2\alpha)} + \frac{1}{Sin\,\phi} = tang^2\,\beta,$

$$2b = (H - h)\ Sin\,\alpha\ tang\,\beta\ \sqrt{\frac{2\ Sin\,(\phi - \alpha)}{Cos\,\alpha}},$$

$$ab\pi = \tfrac{1}{4}\pi\ (H - h)^2\ Sin^2\,\alpha\ tang^2\,\beta\ \sqrt{\frac{2\ Sin\,(\phi - \alpha)}{Cos\,\alpha}} = \text{inhoud}$$

der ellips.

Laat men nu de loodlijn CL op GO vallen, dan is deze loodlijn de hoogte van den afgesneden scheven kegel. Nu is:

$$CL = CG\ Sin\ CGL = (H - h)\ Sin\,(\phi - \alpha).$$

Inhoud scheven kegel =

$$ab\pi \times \tfrac{2}{3}CL = \tfrac{1}{12}\pi\,(H - h)^3\,Sin\,(\phi - \alpha)\ Sin^2\alpha tg^2\beta\sqrt{\frac{2Sin(\phi - \alpha)}{Cos\,\alpha}}.$$

Nu is de inhoud van den geheelen kegel

$$= \tfrac{1}{3}\pi R^2 H = \tfrac{1}{3}\pi H^3\ tang^2\,\alpha.$$

Door aftrekking vindt men: Inhoud gevraagden afgekn. kegel

$$= \tfrac{1}{12}\pi tang^2\alpha\left\{4H^3 - (H - h)^3\,Sin(\phi - \alpha)Cos^2\alpha\,tang^2\beta\sqrt{\frac{2Sin(\phi - \alpha)}{Cos\,\alpha}}\right\}.$$

Digitized by Google

CCVII. Voorstel.

Door J. H. Schäfer.

In elken willekeurigen veelhoek, met uitspringende hoeken en een oneven *getal zijden, kan ééne en slechts ééne kromme beschreven worden, samengesteld uit in elkander loopende cirkelbogen, welke de betrekkelijke zijden van den veelhoek tot raaklijnen hebben. — Heeft zulk een veelhoek met uitspringende hoeken een* even *getal zijden, dan kan die kromme niet beschreven worden, tenzij van de opvolgende zijden de som der* oneven *geplaatste aan die der* even *geplaatste gelijk is, in welk geval het getal dier krommen oneindig groot is.*

Opgelost *door* J. H. Schäfer.

Oplossing *van* J. H. Schäfer.

Zij (fig. 85) PQRST bijv. een willekeurige vijfhoek, hebbende tot zijden $TP = a$, $PQ = b$ enz., het zal er dan slechts op aankomen het eerste middelpunt O_1 te vinden, waaruit de cirkelboog AB moet getrokken worden, die de zijden a en b aanrake; want is dit punt bekend, dan zijn ook de overigen bekend. Immers zij voor $AP = PB = x$, O_1 het eerste middel- of snijpunt, waarin zich de lijnen AO_1 en BO_1, respectivelijk loodrecht op TP en PQ, snijden, dan zullen de volgende O_2, O_3, O_4 en O_5 gevonden worden door op de achtereenvolgende zijden c, d en e te nemen, als:

op c, $QC = QB = b - x$. . . . . (1)

» d, $RD = RC = c - b + x$. . . . . (2)

» e, $SE = SD = d - c + b - x$. . . . (3)

en vervolgens uit de raakpunten C, D en E loodlijnen op de betrokken zijden te trekken, die zich in de opvolgende punten O_2, O_3, O_4 en O_5 snijden. De bogen AB, BC, CD, DE en EA achtereenvolgens uit die punten getrokken, zullen dan eene in elkander loopende kromme vormen, hebbende zijden des veelhoeks tot raaklijnen. Zal nu die kromme geheel gesloten zijn en bij het punt A in zich zelven wederkeeren, dan moet $AO_5 = EO_5$, bijgevolg $AT = TE$, dat is:

$$e - SE = a - x,$$

of blijkens (3) $e - (d - c + b - x) = (a - x)$

en dus:

Digitized by Google

$$AP = x = \tfrac{1}{2}\{(a+b+d)-(c+e)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zijn.

Men kan zich gemakkelijk overtuigen dat in elke $(2n+1)$ hoek slechts ééne en dezelfde kromme op de beschreven wijze kan getrokken worden.

Immers wanneer men b.v. met de zijde c aanvangt en daarop $RC = x'$ stelt, dan worden achtereenvolgens:

$$SD = d - x',$$
$$TE = e - d + x',$$
$$PA = a - e + d - x',$$
$$QB = b - a + e - d + x',$$

en moet bijgevolg:

$$QC = BQ,$$

dat is:

$$c - x' = b - a + e - d + x',$$

en dus:

$$BC = x' = \tfrac{1}{2}(c+d+a) - \tfrac{1}{2}(a+b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

zijn, terwijl hierboven blijkens (2) gevonden wordt:

$$BC = c - b + x.$$

Stelt men hierin de hierbij behoorende waarde (4) van x, dan komt er:

$$BC = c - b + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}e = \tfrac{1}{2}(c+d+a) - \tfrac{1}{2}(e+b),$$

even als in (5).

Het kan gebeuren dat de gevonden en geconstrueerde waarde van $x > b$ of wel $(b - x) > c$ enz. is; in dit laatste geval nam. $QC = BQ > QR$. Fig. 86 valt het raakpunt C op 't verlengde van de zijde QR en moet men om 't raakpunt D van RS te vinden het negatief lijntje BC op 't verlengde van SR uitzetten.

Het is duidelijk dat de loodlijnen uit C en D op de zijden BQ en RS getrokken, zich nu beneden die lijnen in O_3 snijden. Het boogje CD van de kromme ligt dus buiten den veelhoek en vormt bij het punt C met den boog BC een keerpunt. De zijde QR blijft dus de gemeenschappelijke raaklijn der twee bogen BC en CD. Door op de zijde ST, $SE = SD$ te nemen, de loodlijnen EO_4 en DO_4 en uit het snijpunt O_4 de boog DE te trekken, is weder de zijde SD de gemeenschappelijke raaklijn aan de bogen DC en DE, die het punt D tot keerpunt hebben.

Digitized by Google

TE = TA zijnde, zal de laatste boog, getrokken uit het snijpunt O_5 der loodlijnen AO_5 en EO_5, de kromme sluiten.

Om het tweede gedeelte van de opgaaf buiten twijfel te stellen, zij b.v. een willekeurige zeshoek, die UP = a, PQ = b enz. tot zijden heeft. Neemt men dan weder op de zijde UP = a een stuk AP = x, dan heeft men even als hierboven:

$$AP = x,$$
$$BQ = b - x,$$
$$CB = c - b + x,$$
$$DS = d - c + b - x,$$
$$ET = e - d + c - b + x.$$

waardoor het laatste segment FU nu wordt:

$$FU = f - e + d - c + b - x.$$

Zal de kromme in zich zelven wederkeeren, dan moet weder: $FU = AU = a - x$,

dat is:

$$f - e + d - c + b - x = a - x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

zijn. Aangezien nu bij een veelhoek van een even aantal zijden in de betrokken eindvergelijking (A), de term x verdwijnt, kan de kromme, in kwestie, zich niet sluiten, tenzij werkelijk in (A)

$$f - e + d - c + b = a,$$

dat is:

$$(a + c + e) = (b + d + f)$$

is. Voldoet de $2n$-hoek aan die voorwaarde, dan is het onverschillig waar het punt A op de zijde x genomen wordt; men zal altijd een verschillend gesloten kromme verkrijgen, waarvan het getal dus oneindig groot is.

Omdat bij een willekeurigen $2n$-hoek om den cirkel beschreven, van de zijden zooals zij zich opvolgen, de sommen der oneven en even zijden gelijk zijn, (*) b.v. van een zeshoek: $(a + c + e) = (b + d + f)$,

heeft men hierdoor een gemakkelijk middel, om zich practisch van de waarheid dezer eigenschap te overtuigen.

(*) Ofschoon deze eigenschap, (die voor zoover schrijver bekend is in de elementaire leerboeken niet wordt aangetroffen) à priori uit het voorgedragene werd afgeleid, kan zij regtstreeks uit de fig. gemakkelijk bewezen worden.

Digitized by Google

CCVIII. Voorstel. (*)

Door C. J. Matthes.

Aan te toonen, dat de afstand van het punt, wiens rechthoekig tangentiale vergelijking is $a\xi + b\eta = 1$ *tot de lijn* (ξ', η') *is*

$$\frac{a\xi' + b\eta' - 1}{\sqrt{(\xi'^2 + \eta'^2)}}.$$

Opgelost *door* C. J. Matthes *en* G. J. D. Mounier.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Uit fig. 87 is duidelijk, dat:

$$PQ \times HK = PB \times OK + PA \times OH - OH \times OK,$$

bijgevolg:

$$PQ = \frac{a.OK + b.OH - OH.OK}{\sqrt{(OH^2 + OK^2)}}$$

$$= \frac{\frac{a}{OH} + \frac{b}{OK} - 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OK^2}\right)}} = \frac{a\xi_1 + b\eta_1 - 1}{\sqrt{(\xi_1^2 + \eta_1^2)}}.$$

CCIX. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Bewijs dat de rechthoekig tangentiale vergelijking

$$\xi^2 + \eta^2 + 2P\xi + 2Q\eta + R = 0$$

eene kegelsnede voorstelt, waarvan de oorsprong het brandpunt is. Welke zijn de coördinaten harer richtlijn? Welke is hare excentriciteit en welke haar parameter?

Opgelost *door* C. J. Matthes *en* H. A. Lorentz.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Van de gegeven kromme heeft de wederkeerige ten opzigte van den oorsprong als middelpunt van wederkeerigheid tot cartesiaansche vergelijking:

$$x^2 + y^2 + 2Pk^2x + 2Qk^2y + k^4R = 0,$$

die blijkbaar een cirkel voorstelt met $-Pk^2$, $-Qk^2$ tot coördinaten van het middelpunt en

$$k^2\sqrt{(P^2 + Q^2 - R)} = \rho$$

tot straal. Hieruit volgt onmiddellijk (zie Ferrers bl. 111, § 124) dat de gegeven rechthoekig tangentiale vergelijking die

(*) Dit voorstel en de volgende drie voorstellen zijn ontleend aan Ferrers *Nieuwere Meetkunde*, voorbeelden 59, 60, 61 en 62.

Digitized by Google

eener kegelsnede is met het brandpunt in den oorsprong. Daar voorts de richtlijn der kegelsnede de poollijn is van het middelpunt des weêrkeerigen cirkels, zijn hare coördinaten

$$\xi = -P, \ \eta = -Q;$$

terwijl de excentriciteit:

$$e = \frac{c}{\rho} = \sqrt{\frac{P^2 + Q^2}{P^2 + Q^2 - R}}$$

en de parameter:

$$= 2l = \frac{2k^2}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{(P^2 + Q^2 - R)}} \text{ is.}$$

CCX. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Aan te toonen, dat de tangentiale poolvergelijking $p = a + c \, Cos\phi$ een' cirkel voorstelt en tevens den straal van dien cirkel te bepalen.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Zet men, zie fig. 88, op de as OX de lengte $OC = c$ uit; trekt men uit den oorsprong O eene lijn OA onder een hoek met de as $= \phi$; laat men vervolgens uit C daarop eene loodlijn CA vallen en neemt men op het verlengde van OA een stuk $AB = a$, dan is het lichtelijk in te zien dat de loodlijn BP op OB voor elke waarde van ϕ steeds raaklijn is aan een cirkel uit C als middelpunt met a als straal beschreven. Tusschen de tangentiale poolcoördinaten $OB = p$ en $\angle \phi$ van dien cirkel bestaat nu altijd dit verband;

$$OB = p = OA + AB = c. \, Cos \, \phi + a.$$

2de BEWIJS. Reduceren wij de vergelijking tot eene rechthoekig tangentiale, door daarin:

$$p = \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}} \text{ en } Cos \, \phi = \frac{\xi}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}}$$

te stellen, zoo verkrijgen wij:

$$a^2 (\xi^2 + \eta^2) = (1 - c\xi)^2.$$

Deze gecombineerd met de algemeene vergelijking van een punt $m\xi + n\eta = 1$,

zoo moeten daaruit gelijke waarden voor de coördinaten ξ en η der raaklijnen voortvloeijen, bijaldien het punt aan den omtrek des cirkels gelegen is. Dit geeft het verband:

$$(m - c)^2 + n^2 = a^2.$$

Digitized by Google

Men ontwaart hieruit, daar m en n de cartesiaansche coördinaten van het punt zijn, dat men een cirkel voor heeft, waarvan de as OX het middelpunt bevat op eenen afstand $OC = c$, en de straal $= a$ is.

CCXI. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Bewijs, dat de ontwondene der ellips, wier rechthoekig tangentiale vergelijking is $a^2\xi^2 + b^2\eta^2 = 1$ *tot vergelijking heeft*

$$\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{b^2}{\eta^2} = (a^2 - b^2)^2.$$

Opgelost *door* C. J. Matthes *en* H. A. Lorentz,

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Bepalen wij voorloopig het verband tusschen de rechthoekig tangentiale coördinaten ξ en η, ξ_1 en η_1 van twee rechte lijnen die loodrecht op elkander staan, en ontleenen wij daartoe uit fig. 89 de evenredigheid:

$$OH : OK = OK_1 : OH_1,$$

dat is: $$-\frac{1}{\xi} : \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_1} : \frac{1}{\xi_1},$$

of: $$-\eta : \xi = \xi_1 : \eta_1,$$

waaruit: $$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zij nu: $$m\xi + n\eta = 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

de vergelijking van een punt in 't algemeen, zoo moet de combinatie dezer vergelijking met die der ellips

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 = 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

de coördinaten opleveren der beide raaklijnen uit dat punt aan de ellips getrokken. Ligt echter het punt aan den omtrek, zoo vallen de raaklijnen ineen, en wij moeten alsdan dezelfde waarden voor die coördinaten erlangen. Hieruit volgt de betrekking: $$b^2m^2 + a^2n^2 = a^2b^2; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

terwijl men voor de coördinaten der raaklijn in het punt vindt:

$$\xi_1 = \frac{m}{a^2}, \quad \eta_1 = \frac{n}{b^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De normaal in het punt (m, n) staat loodrecht op de raaklijn en bevat tevens het punt. Van hare coördinaten ξ, η geldt dus het verband met ξ_1 en η_1 boven onder (1) aangegeven, en bovendien moeten zij voldoen aan de vergelijking (2) van het punt. Wij hebben dus:

Digitized by Google

$$\frac{m}{a^2}\cdot\xi+\frac{n}{b^2}\cdot\eta=0 \quad \text{en tevens} \quad m\xi+n\eta=1.$$

Uit deze twee vergelijkingen en uit (4) m en n elimineerende, verkrijgt men voor de rechthoekig tangentiale vergelijking van de ontwondene der ellips:

$$\frac{a^2}{\xi^2}+\frac{b^2}{\eta^2}=(a^2-b^2)^2.$$

OPLOSSING *van* H. A. LORENTZ.

Laat ξ_1, η_1 de coördinaten van eene der raaklijnen aan de ellips zijn, dan is, zooals men zeer gemakkelijk vindt, de vergelijking van het raakpunt:

$$a^2\xi\xi_1+b^2\eta\eta_1=1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zoeken wij nu de coördinaten ξ en η van de normaal in dat punt. Vooreerst voldoen deze aan de vergelijking (1), daar de normaal door het raakpunt gaat, en ten tweede aan de vergelijking:

$$\xi\xi_1+\eta\eta_1=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

welke uitdrukt dat de normaal (ξ, η) en de raaklijn (ξ_1, η_1) loodrecht op elkaâr staan. Door de vergelijkingen (1) en (2) worden dus ξ en η bepaald. Voegt men nu hierbij de vergelijking:

$$a^2\xi_1^2+b^2\eta_1^2=1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

die uitdrukt, dat (ξ_1, η_1) eene raaklijn aan de ellips is, dan behoeft men slechts uit (1), (2) en (3) ξ_1 en η_1 te elimineeren, om de vergelijking der omhullende van alle normalen, d.i. de ontwondene der ellips te verkrijgen. Die eliminatie geschiedt gemakkelijk door ξ_1 en η_1 uit (1) en (2) op te lossen en de verkregen uitkomsten in (3) te substitueeren. Dit geeft ons:

$$\xi_1=\frac{1}{(a^2-b^2)\xi}, \quad \eta_1=-\frac{1}{(a^2-b^2)\eta}$$

en na substitutie in (1):

$$\frac{a^2}{(a^2-b^2)^2\,\xi^2}+\frac{b^2}{(a^2-b^2)^2\,\eta^2}=1,$$

of:

$$\frac{a^2}{\xi^2}+\frac{b^2}{\eta^2}=(a^2-b^2)^2$$

voor de vergelijking der ontwondene.

Digitized by Google

CCXII. Voorstel. (*)

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij een gelijkbeenige driehoek ABC *in een cirkel beschreven en de rechthoek onder* AC *en* CD (*zijnde* D *een punt in de grondlijn* BC) *gelijk aan het vierkant op* BC, *uit* B *eene lijn getrokken, welke* AC *snijde in* F *en den cirkel-omtrek in* E, *en uit* E *eene lijn getrokken tot* G *in het been* AC *evenwijdig aan* BC, *dan staat de rechthoek onder* AF *en* FG *tot het vierkant op* CF *als* AG : CD.

Opgelost *door* M. Beens, J. J. Teding van Berkhout *en* G. J. D. Mounier.

Oplossing *van* M. Beens.

Men heeft (fig. 90) $\triangle$ AEF $\backsim$ $\triangle$ EFG, want $\angle$ FEG $=$ $\angle$ EAF, als rustende op de bogen EC en BH, die, tusschen evenwijdige koorden BC en EH begrepen, gelijk zijn, en verder is $\angle$ AFE aan beide driehoeken gemeen. Uit deze gelijkvormigheid volgt:

$$AF : EF = EF : FG \text{ of } AF \times FG = EF^2 \ldots (1)$$

De driehoeken AEG en AEC zijn ook gelijkvormig, want $\angle$ GAE is aan beiden gemeen, en $\angle$ ACE is gelijk $\angle$ AEG, als wordende gemeten door de gelijke bogen AE en AH, welke gelijk zijn, omdat $\triangle$ ABC gelijkbeenig is. Hieruit volgt:

$$AG : AE = AE : AC \text{ of } AE^2 = AG \times AC \ldots (2)$$

Eindelijk zijn ook de driehoeken AEF en BCF gelijkvormig, daar zij gelijkhoekig zijn, alzoo:

$$BC : AE = CF : EF; \text{ of } BC^2 : AE^2 = CF^2 : EF^2.$$

Hierin BC^2 vervangende door $AC \times CD$, en uit (2) AE^2 door $AG \times AC$, krijgt men:

$$AC \times CD : AG \times AC = CF^2 : EF^2,$$

en daar:

$EF^2 = AF \times FG$ (1) ook $AC \times CD : AG \times AC = CF^2 : AF \times FG$, en vereenvoudigende:

$$CD : AG = CF^2 : AF \times FG \text{ of } AF \times FG : CF^2 = AG : CD.$$

CCXIII. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij ABC *een gelijkbeenige driehoek in een cirkel beschreven*

(*) Dit voorstel en de drie volgende zijn zonder bewijs opgegeven in het werkje vermeld bij N°. 92.

Digitized by Google

en uit A *eene lijn getrokken, welke de grondlijn* BC *snijde in* E *en den cirkelomtrek in* D, *dan is de rechthoek onder* DA *en* AE *gelijk aan het vierkant op* AB *of* AC.

Opgelost *door* M. Beens, J. J. Teding van Berkhout *en* G. J. D. Mounier.

Oplossing *van* M. Beens.

Laat ABC (fig. 91) de gelijkbeenige driehoek zijn, waarin AB = AC. Er is uit A eene willekeurige lijn getrokken, die BC in het punt E, en den omtrek in D snijdt. De driehoeken AEF en ADG zijn gelijkvormig, daar zij rechthoekig zijn en den scherpen hoek DAG gemeen hebben, waaruit volgt:

$$AF : AD = AE : AG \text{ of } AF \times AG = AD \times AE.$$

Maar in den rechthoekigen driehoek ABG is:

$$AB^2 = AG \times AF,$$

zoodat men heeft: $AB^2 = AD \times AE.$

CCXIV. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zoo in de figuur, behoorende bij het voorgaand voorstel, raaklijnen aan den cirkel getrokken worden in A *en in* B, *welke elkander ontmoeten in* F, *en men trekt dan de lijn* FD, *welke de grondlijn* BC *in* G *snijde, dan is de rechthoek onder* BC *en* BG *gelijk aan het vierkant op* BE.

Opgelost *door* M. Beens, J. J. Teding van Berkhout *en* G. J. D. Mounier.

Oplossing *van* M. Beens.

De raaklijn AF (fig. 92) loopt evenwijdig met de basis BC. De driehoeken DEG en DAF zijn dus gelijkvormig, waaruit volgt:

$$GE : AF = DE : DA,$$

of:

$$GE = \frac{AF \times DE}{AD},$$

of daar AF = BF is,

$$GE = BF \times \frac{DE}{AD} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

De driehoeken ABF en ABC zijn gelijkvormig, waaruit volgt:

$$BF : AB = AB : BC \text{ of } BF = \frac{AB^2}{BC}.$$

Deze waarde voor BF in (1) brengende, krijgt men:

$$GE = AB^2 \times \frac{DE}{BC \times AD}.$$

Digitized by Google

Maar uit het vorige voorstel weet men dat $AB^2 = AD \times AE$ is, alzoo:

$$GE = \frac{AD \times AE \times DE}{BC \times AD} = \frac{AE \times DE}{BC},$$

en omdat $AE \times DE$ gelijk aan $BE \times CE$ is,

$$GE = \frac{BE \times CE}{BC}, \text{ of } GE \times BC = BE \times CE \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

Men heeft uit F twee raaklijnen AF en BF getrokken; AB is de raakkoorde, zoodat FH harmonisch gedeeld wordt in de punten I en D, zoodat AF, AI, AH en AD een harmonischen stralenbundel uitmaken. Nu loopt de lijn PBC evenw. aan AF, zoodat, volgens eene bekende eigenschap, $PB = BE$. Men kan vergelijking (2) ook schrijven:

$$2GE \times BC = 2BE \times CE,$$

of 2BE door PE vervangende:

$$2GE \times BC = PE \times CE.$$

Hiervan aftrekkende $\quad GE \times CE = GE \times CE,$

krijgt men: $\quad GE(2BC - CE) = PG \times CE$

of: $\quad GE(BC + BC - CE) = GE(BC + BE) = PG \times CE$

en hier BE door PB vervangende:

$$GE \times PC = CE \times PG.$$

De lijn PE is alzoo harmonisch gedeeld in G en C.

Het punt B is het midden van de twee aanverwante punten P en E, zoodat volgens eene bekende eigenschap:

$$BP^2 = BE^2 = BG \times BC,$$

zooals te bewijzen was.

CCXV. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij een gelijkbeenige driehoek ABC *in een cirkel beschreven, en op eene lijn uit* A, *evenwijdig aan de grondlijn* BC *getrokken, een punt* D *genomen, zoodat de rechthoek onder* AD *en zekere gegevene lijn* P *zij gelijk aan het vierkant op* AB *of* AC; *wanneer men nu uit* A *en* D *lijnen trekt tot eenig punt* E *in den cirkel-omtrek, welke lijnen de grondlijn* BC *respectivelijk in* F *en* G *snijden, dan is de rechthoek onder* FG *en de lijn* P *gelijk aan den rechthoek onder* BF *en* FC.

Opgelost *door* M. Beens, J. J. Teding van Berkhout *en* G. J. D. Mounier.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* M. BEENS.

Gegeven $AD \times P = AB^2$ (fig. 93) of zooals uit Voorstel CCXIII blijkt: $AD \times P = AE \times AF$. . . . . (1)

Daar raaklijn AD evenwijdig aan BC loopt, zijn de driehoeken EFG en EAD gelijkvormig, waaruit volgt:

$$AE : EF = AD : FG \text{ of } FG = AD \times \frac{EF}{AE}.$$

Nu is volgens (1) $AD = \frac{AE \times AF}{P}$,

zoodat men krijgt:

$$FG = \frac{AE \times AF}{P} \times \frac{EF}{AE} = \frac{AF \times EF}{P},$$

of $FG \times P = AF \times EF$

en daar $AF \times EF$ gelijk is aan $BF \times CF$, is ook:

$$FG \times P = BF \times CF.$$

CCXVI. VOORSTEL.

Door J. VERSLUIJS.

Men vraagt, de meetkundige plaats te bepalen van de punten, voor welke het product der afstanden tot de hoekpunten van een' regelmatigen n-hoek gelijk is aan de n^{de} macht van den straal des veelhoeks.

OPGELOST *door* J. VERSLUIJS *en* G. J. D. MOUNIER.

OPLOSSING *van* J. VERSLUIJS.

Nemen wij het middelpunt O des veelhoeks aan als oorsprong van een stelsel van poolcoördinaten, waarvan de oorsprong der hoeken door een der hoekpunten A van den veelhoek gaat. Noemen wij verder het naastliggende hoekpunt aan den negatieven kant van den oorsprong der hoeken A_1, het daaropvolgende hoekpunt A_2, enz. Zij a de straal van den veelhoek, en P een punt van de meetkundige plaats, dat tot coördinaten heeft ρ en φ. In den $\triangle QAP$ is dan:

$$AP^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \, Cos\, \phi.$$

In $\triangle OA_1P$ is evenzoo $A_1P^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \, Cos \left(\phi + \frac{2\pi}{n}\right)$.

Verder $A_2P^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \, Cos \left(\phi + \frac{4\pi}{n}\right)$.

. . . . . .

$$A_nP^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \, Cos \left(\phi + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Digitized by Google

Hierbij kunnen alle vormen in de tweede leden ontbonden worden, ieder in twee complexe factoren. Daardoor krijgt men:

$$AP^2 = \{\rho - a(Cos\,\phi + i\,Sin\,\phi)\}\{\rho - a(Cos\,\phi - i\,Sin\,\phi)\},$$

$$A_1P^2 = \left\{\rho - a\left[Cos\left(\phi + \frac{2\pi}{n}\right) + i\,Sin\left(\phi + \frac{2\pi}{n}\right)\right]\right\}\times$$
$$\left\{\rho - a\left[Cos\left(\phi + \frac{2\pi}{n}\right) - i\,Sin\left(\phi + \frac{2\pi}{n}\right)\right]\right\},$$

$$A_2P^2 = \left\{\rho - a\left[Cos\left(\phi + \frac{4\pi}{n}\right) + i\,Sin\left(\phi + \frac{4\pi}{n}\right)\right]\right\}\times$$
$$\left\{\rho - a\left[Cos\left(\phi + \frac{4\pi}{n}\right) - i\,Sin\left(\phi + \frac{4\pi}{n}\right)\right]\right\},$$

. . . . . .

$$A_nP^2 = \left\{\rho - a\left[Cos\left(\phi + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\,Sin\left(\phi + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right]\right\}\times$$
$$\{\rho - \quad . \quad . \quad .

OPLOSSING *van* W. H. WISSELINK.

Stellen wij de vergelijking der kromme voor door:

$$f(x, y) = x^m + a_1 x^{m-1} y +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ m_1 x^2 + m_2 xy + m_3 y^2 + l_1 x + l_2 y + c = 0.$$

Noemen we de punten A en B, (x_1, y_1) en (x_2, y_2). Wanneer wij de coördinaten-assen evenwijdig met zich zelven verplaatsen, zóó dat A de nieuwe oorsprong wordt, dan zal:

$$x = x' + x_1 \text{ en } y = y' + y_1$$

zijn en de vergelijking der kromme:

$$(x' + x_1)^m + a_1 (x' + x_1)^{m-1} (y' + y_1) + \text{ enz.} = 0.$$

Hierin $x' = r \, Cos \, \phi$ en $y' = r \, Sin \, \phi$

substitueerende, vinden we, (kortheidshalve $Cos \, \phi = P$ en $Sin \, \phi = Q$ noemende):

$$(P^m + a_1 P^{m-1} Q + a_2 P^{m-2} Q^2 + \ldots\ldots a_m Q^m) r^m$$
$$+ (\ldots\ldots) r^{m-1} + \ldots\ldots\ldots f(x_1, y_1) = 0.$$

Hieruit blijkt dus, dat de absolute waarde van:

$$AP \times AQ \times AR \times AS \times \ldots$$

gelijk is aan:

$$\frac{f(x_1, y_1)}{P^m + a_1 P^{m-1} Q + a_2 P^{m-2} Q^2 + \ldots\ldots a_m Q^m}.$$

Op dezelfde wijze blijkt dat de absolute waarde van:

$$BP_1 \times BQ_1 \times BR_1 \times BS_1 \times \ldots$$

$$= \frac{f(x_2, y_2)}{P^m + a_1 P^{m-1} Q + a_2 P^{m-2} Q^2 + \ldots\ldots a_m Q^m},$$

of:

$$\frac{AP \times AQ \times AR \times \ldots}{BP_1 \times BQ_1 \times BR_1 \times \ldots} = \frac{f(x_1, y_1)}{f(x_2, y_2)}.$$

OPMERKING. Uit voorgaand bewijs besluit men licht, dat dezelfde eigenschap zich laat uitbreiden voor oppervlakken voorgesteld door *algebraïsche* vergelijkingen. Voor oppervlakken van den 2den graad komt het bewijs dier eigenschap o. a. voor in SALMON, *Deutsch bearbeitet von Fiedler*, *Analyt. Geometrie des Raumes*, 1er Theil, § 70.

Eene eenvoudige toepassing is deze, wanneer men voor de kromme den cirkel neemt, voor welken ook onmiddellijk het gestelde meetkundig kan aangetoond worden.

Liggen de punten A en B op de x-as en is de vergelijking der kromme b. v.:

Digitized by Google

$$x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0,$$

(strophoïde), dan is:

$$\frac{AP \times AQ \times \ldots}{BP_1 \times BQ_1 \times \ldots}=\frac{x_1^2(x_1-a)}{x_2^2(x_2-a)}.$$

CCXVIII. VOORSTEL.

Door A. HULSCHER.

Op eene gegevene rechte lijn is de afstand gegeven van twee punten. Men verlangt een vierkant te beschrijven, zoodanig dat deze twee punten in twee der zijden van het vierkant liggen, terwijl de verlengden der beide andere zijden door de uiteinden der gegevene lijn loopen. Tevens wenscht men, uit deze gegevens, de zijde van dit vierkant te berekenen.

OPGELOST *door* A. HULSCHER, J. J. BRUTEL DE LA RIVIÈRE, G. J. D. MOUNIER *en* L. VAN DER EST.

OPLOSSING *van* A. HULSCHER *en* J. J. BRUTEL DE LA RIVIÈRE.

Zij AD (Fig. 94) de gegeven lijn en B en C de gegeven punten. Trek dan ED = BC loodrecht op het uiteinde van AD. Verder trekt men AE en uit D eene lijn DG evenwijdig aan AE. Zoo men nu door de punten B en C loodlijnen op AE en bijgevolg ook loodrecht op GD trekt, dan is GHIK het begeerde vierkant, want de hoeken bij G, H, I en K zijn recht en indien nu ook IK = IH is, dan heeft men aan het vraagstuk voldaan.

Om dit te bewijzen, trekt men KL evenwijdig met AD, en ND evenwijdig met IH; dan staan de zijden, of dezer verlengden, van de driehoeken NED en KIM loodrecht op elkander en de hoeken dier driehoeken zijn dus gelijk. Verder is ED = BC = KM en dus ook ND = KI; daar nu ND = IH is, ook IK = IH en het gestelde bewezen.

Zij ter berekening der zijde van dit vierkant BC = q en AD = s, dan hebben wij:

$$AE=\sqrt{(AD^2+ED^2)}=\sqrt{(s^2+q^2)}$$

en $AE:AD=ED:ND$ of $\sqrt{(s^2+q^2)}:s=q:ND$ of IH,

dus:
$$IH=\frac{sq}{\sqrt{(s^2+q^2)}}.$$

De uitslag dezer constructie is, dat de twee punten B en C in twee onderling evenwijdige zijden van het vierkant vallen.

Een TWEEDE geval kan ondersteld worden, namelijk, dat de twee punten in twee niet onderling evenwijdige zijden vallen.

Digitized by Google

Zij dan wederom (Fig. 95) AD de lijn, waarin de punten B en C liggen, wier onderlinge afstand bekend is. Zijn dan gegeven die onderlinge afstand $= b$ en de afstand van C tot $D = c$, dan richte men in C eene loodlijn CE op AD op, $CE = BD = b + c$, vereenige A met E, trekke door B eene loodlijn op AE, welke deze ontmoete in F, door C eene lijn evenwijdig met AE, welke de loodlijn door B getrokken ontmoete in G en door D eene lijn evenwijdig aan BF, welke AE ontmoete in H en de verlengde CG in I, dan is FGHI het begeerde vierkant. Want trekt men nog EK en DL loodrecht op GI en FG, dan is $\triangle BDL$ gelijk aan en gelijkvormig met $\triangle CEK$, dus $DL = GI = KE = HI$, terwijl uit de constructie volgt, dat alle de hoeken recht zijn.

Ter berekening van de zijde van het vierkant FGHI is, wanneer nu:

$$AD = s,\ AB = s - (b + c) = a$$

gesteld wordt:

$$\angle BDL = \angle BAF, FI = DL = BD\ Cos \angle BAF$$

en

$$Cos \angle BAF = \frac{AC}{AE} = \frac{a + b}{\sqrt{((a + b)^2 + (b + c)^2)}},$$

derhalve:

$$FI = \frac{(a + b)(b + c)}{\sqrt{\{(a + b)^2 + (b + c)^2\}}}.$$

CCXIX. Voorstel.

Door A. Hulscher.

Op de basis van een driehoek is buitenwaarts een parallelogram beschreven: men verlangt op ieder der opstaande zijden, onder verschillende gegeven hoeken, parallelogrammen te beschrijven, waarvan de som der inhouden gelijk is aan den inhoud van het parallelogram op de basis, zonder gebruik te maken van de hoogten der parallelogrammen.

Opgelost *door* A. Hulscher *en* G. J. D. Mounier.

Oplossing *van* A. Hulscher.

(Fig. 96). Trek door C de lijn FG evenwijdig aan AD en maak $CG = FH$; verder uit G lijnen evenwijdig aan AC en BE. Verleng AD en BE tot in K en L, dan verkrijgt men twee trapeziums CBEF en GLBH, die blijkbaar onder gelijke zijden en gelijke hoeken in dezelfde volgorde zijn samengesteld: dus Trap. CBEF = Trap. GLBH;

Digitized by Google

van deze beide trapeziums ieder in het bijzonder den driehoek ABC aftrekkende, heeft men par. HFEB = par. BCGL; evenzoo par. AHFD = par. AKGC, dus par. ABED = par. BCGL + par. AKGC, en men kan dus nu tusschen de evenwijdige lijnen AC en Gx, alsmede tusschen de evenwijdige lijnen BC en Gy de parallelogrammen onder de gegeven hoeken beschrijven op AC en BC.

CCXX. Voorstel.

Door W. Kapteyn.

Wanneer men een hoek middendoordeelt en twee lijnen trekt, die met de deellijn gelijke hoeken maken, zonder evenwijdig te loopen, zullen de vier snijpunten, door deze lijnen met de beenen van den hoek gevormd, op den omtrek van een cirkel liggen.

Opgelost *door* W. Kapteyn, G. J. D. Mounier *en* L. van der Est.

Oplossing *van* W. Kapteyn.

1°. Het snijpunt dezer lijnen valt binnen den hoek (Fig 97*a*)

Geg: $\angle BFG = \angle AGF$,

$\angle BFG = \angle MBF + \angle BMF$,

$\angle AGF = \angle MDG + \angle DMG$,

of omdat $\angle BMF = \angle DMG$,

is ook: $\angle MBF = \angle MDG$.

De driehoeken ABE en CDE zijn dus gelijkvormig, waaruit volgt: $AE : CE = EB : ED$,

derhalve liggen de punten A, B, C en D op den omtrek van een cirkel.

2°. Het snijpunt dezer lijnen valt buiten den hoek (Fig. 97*b*).

Uit de gegeven gelijkheid der hoeken BFG en AGF volgt weêr de gelijkheid der hoeken MCF en MAG of de gelijkheid der hoeken MCF en BAE.

De driehoeken EAB en ECD zijn dus gelijkvormig, waaruit volgt: $EC : ED = AE : EC$,

derhalve liggen de punten A, B, C en D op den omtrek van een cirkel.

CCXXI. Voorstel.

Door G. J. D. Mounier.

In een' driehoek ABC *heeft men achtereenvolgens de zijden* BC, AC *en* AB *in de punten* D, E *en* F *respectivelijk in uiterste en middelste reden gedeeld, en wel zoo dat* BD, CE *en* AF

Digitized by Google

de grootste stukken zijn. Men vraagt de verhouding tusschen de som der vierkanten op de zijden van den driehoek DEF *en die van de vierkanten op de zijden van den oorspronkelijken driehoek* ABC *te bepalen.*

OPGELOST *door* G. J. D. MOUNIER.

OPLOSSING *van* G. J. D. MOUNIER.

$$BD = \tfrac{1}{2}a\{-1+\sqrt{5}\} \quad \text{en} \quad CD = \tfrac{1}{2}c\{3-\sqrt{5}\}.$$

Verder is: $\quad Cos \angle B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

en $\quad DF^2 = BF^2 + BD^2 - 2BF \times BD\ Cos\ B,$

gevende na behoorlijke verwisseling der letters en herleiding:

$$\beta^2 = \tfrac{1}{4}a^2\{6-2\sqrt{5}\} + \tfrac{1}{4}c^2\{14-6\sqrt{5}\}$$
$$-\tfrac{1}{2}ac\{4\sqrt{5}-8\}\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

of: $\beta^2 = a^2\{3\tfrac{1}{2}-1\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\} - b^2\{2-\sqrt{5}\} + c^2\{5\tfrac{1}{2}-2\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\}$

en derhalve:

$$\alpha^2 = -a^2\{2-\sqrt{5}\} + b^2\{5\tfrac{1}{2}-2\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\} + c^2\{3\tfrac{1}{2}-1\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\},$$
$$\beta^2 = a^2\{3\tfrac{1}{2}-1\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\} - b^2\{2-\sqrt{5}\} + c^2\{5\tfrac{1}{2}-2\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\},$$
$$\gamma^2 = a^2\{5\tfrac{1}{2}-2\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\} + b^2\{3\tfrac{1}{2}-1\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\} - c^2\{2-\sqrt{5}\}$$

opt. $\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (a^2+b^2+c^2)(7-3\sqrt{5}).$

De gevraagde verhouding is dus: 0,291 : 1.

OPMERKINGEN. 1°. Men ziet dat die verhouding onafhankelijk is van den vorm des driehoeks.

2°. Wanneer de punten D, E en F anders genomen waren, doch zoo, dat zij de zijden volgens dezelfde verhouding verdeelden, zou men ook zulk eene getallen-waarde vinden. Wanneer men als verhouding aanneemt: $p:q$, $p+q=1$ zijnde, zoo is licht in te zien dat men zal vinden:

$$p^2+q^2-pq : 1 \quad \text{of} \quad 1-3pq : 1.$$

CXXII. VOORSTEL.

Door G. J. D. MOUNIER.

De middellijn AB *van een cirkel is in* C *in uiterste en middelste reden gedeeld. Zoo men nu door* C *eene koorde trekt, welke in* C *met* AB *een hoek van* 60° *maakt, vraagt men de lengte van die koorde uit te drukken in den straal des cirkels.*

OPGELOST *door* G. J. D. MOUNIER.

OPLOSSING *van* G. J. D. MOUNIER.

Zij BC, het grootste stuk, $= r\{-1+\sqrt{5}\}$, dan is:

Digitized by Google

$$AC = r\{3 - \sqrt{5}\}, \quad CM = BC - r = r\{-2 + \sqrt{5}\},$$

Nu is verder, wanneer CF loodrecht op de koorde DCE nedergelaten wordt en omdat $\angle BCE = 60^\circ$

$$CF = \tfrac{1}{2}CM = \tfrac{1}{2}r\{-2 + \sqrt{5}\}.$$

Stel $DE = x$, dan is:

$CE = \tfrac{1}{2}\{x + r(-2 + \sqrt{5})\}$ en $CD = \tfrac{1}{2}\{x - r(-2 + \sqrt{5})\}$;

dus: $$CD \times CE = \tfrac{1}{4}\{x^2 - r^2(9 - 4\sqrt{5})\}.$$

Verder is: $CD \times CE = AC \times BC = r^2\{4\sqrt{5} - 8\}$,

dus:

$$x^2 - r^2(9 - 4\sqrt{5}) = 4r^2\{4\sqrt{5} - 8\},$$
$$x^2 = r^2\{12\sqrt{5} - 23\},$$
$$x = r\sqrt{(12\sqrt{5} - 23)}.$$

Opmerking. Wij hebben hier, als eenvoudigst geval, een hoek van 60° gebruikt. De berekening kan echter voor hoeken van 45° en 30° herhaald worden, hetgeen wij, daar het weinig verschil maakt, aan den lezer overlaten.

CCXXIII. Voorstel.

Door G. J. D. Mounier.

De middellijn AB *van een cirkel is in* C *in uiterste en middelste reden gedeeld en zij* AC *het kleinste stuk. Men bepale nu tot* A, C, M (*middelpunt van den cirkel*) *een vierde harmonisch punt,* D, *op de middellijn. Indien eene lijn in* D *loodrecht op* AB *opgericht den cirkel in* E *snijdt, vraagt men den inhoud van den driehoek* ABE, *uitgedrukt in den straal des cirkels.*

Opgelost *door* G. J. D. Mounier.

Oplossing *van* G. J. D. Mounier.

Stel $MD = x$, dan hebben wij:

$$AC = r(3 - \sqrt{5}), \quad BC = r(-1 + \sqrt{5}),$$
$$CM = BC - r = r(-2 + \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad AD = r + x.$$

Daar nu $AC \times MD = CM \times AD$ moet zijn, hebben wij:

$$r(3 - \sqrt{5}) \times x = r(-2 + \sqrt{5})(r + x),$$
$$r(5 - 2\sqrt{5}) \times x = r^2(-2 + \sqrt{5}),$$
$$x = r\frac{-2 + \sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}}.$$

$$BD = r - x = r\left\{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} - \frac{-2 + \sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}}\right\} = r\left\{\frac{7 - 3\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}}\right\},$$

$$BE = \sqrt{AB \times BD} = r\sqrt{\frac{14 - 6\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}}} = r(3 - \sqrt{5})\sqrt{\frac{1}{5 - 2\sqrt{5}}}.$$

Digitized by Google

Eveneens vinden wij:

$$AE = r(-1 + \sqrt{5})\sqrt{\frac{1}{5 - 2\sqrt{5}}}.$$

En dus voor den gevraagden inhoud:

$$I = \tfrac{1}{3}r^3 \frac{4\sqrt{5} - 8}{5 - 2\sqrt{5}} = r^3 \frac{2\sqrt{5} - 4}{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Opmerking. De verhouding der voor AE en BE gevonden waarden leeren, dat die lijnen kunnen beschouwd worden als het grootste en het kleinste stuk eener in uiterste en middelste reden verdeelde lijn, welker lengte is AE + BE.

CCXXIV. Voorstel. (*)

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij de middellijn AB *eens cirkels harmonisch gedeeld in* C *en* D, *zijnde* D *binnen den cirkel, in* D *loodrecht op* AB *getrokken eene lijn, welke den cirkel snijde in* E *en in* F, *door* C *eenige lijn, welke den cirkel snijde in* G *en in* H, *en de lijn* DE *in* K, *in* G *eindelijk aan den cirkel getrokken eene raaklijn, welke* DE *snijde in* L, *dan is de rechthoek onder* LD *en* DK *gelijk aan het vierkant op* DE. *Vrage het bewijs.*

Opgelost *door* C. J. Matthes, L. van der Est *en* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Aangezien AB (zie fig. 98) eene middellijn is van den cirkel en A, B, C, D harmonische punten zijn, is C de pool van DE. De pool van CGKH moet dus ergens op die lijn gelegen zijn en bovendien op de raaklijn in G, het is derhalve het snijpunt L, waaruit wederom volgt, dat L, E, K en F harmonische punten zijn. Mitsdien heeft men de evenredigheid:

$$LE : EK = LF : KF,$$

waaruit:

$$LE : LF = EK : KF,$$

$$LF + LE : LF - LE = KF + EK : KF - EK,$$

$$2LD : 2DE = 2DE : 2DK,$$

$$LD : DE = DE : DK,$$

$$DE^2 = LD \,.\, DK.$$

(*) Dit voorstel is in het werkje vermeld bij N°. 92 zonder bewijs medegedeeld.

Digitized by Google

Opmerking. Dat, wanneer de middellijn AB harmonisch gedeeld is, de koorde GH ook harmonisch gedeeld is, werd bewezen in Voorstel 92.

CCXXV. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Wanneer gegeven zijn de loodlijnen, uit de hoekpunten eens driehoeks op de overstaande zijden nedergelaten, den driehoek te construeren. (Kempees.)

Opgelost *door* W. van Haarst, G. J. D. Mounier *en* L. van der Est.

Oplossing *van* W. van Haarst.

Laat van den driehoek ABC, waarvan wij de zijden x, y en z stellen, de loodlijnen

$$AD = h, \quad BD_1 = h_1 \quad \text{en} \quad CD_2 = h_2$$

gegeven zijn. Construeeren wij dan den driehoek $A_1B_1C_1$, welke de drie gegevene loodlijnen tot zijden heeft, zoodat:

$$B_1C_1 = h, \; A_1C_1 = h_1 \quad \text{en} \quad A_1B_1 = h_2$$

is en trekken wij daarin de loodlijnen

$$A_1E = m, \quad B_1E_1 = m_1 \quad \text{en} \quad C_1E_2 = m_2.$$

Vervolgens beschrijven wij nogmaals een driehoek, welke de loodlijnen m, m_1 en m_2 tot zijden heeft, zoodat:

$$B_2C_2 = m, \; A_2C_2 = m_1 \quad \text{en} \quad A_2B_2 = m_2$$

is, dan moet deze gelijkvormig zijn met den gevraagden driehoek ABC, want in den driehoek ABC is $hx = h_1y = h_2z$ en in den driehoek $A_1B_1C_1$

$$hm = h_1m_1 = h_2m_2;$$

daaruit volgt:

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{m_1} = \frac{z}{m_2},$$

dat is:

$$x : m = y : m_1 = z : m_2,$$

zoodat de zijden evenredig zijn. Trekken wij alzoo de loodlijn B_2F en maken wij $B_2F_1 = h_1$, dan zal $A_3B_2C_3$ de gevraagde driehoek zijn.

CCXXVI. Voorstel.

Door W. van Haarst.

Men vraagt, op hoe velerlei wijzen men den cirkel-omtrek door constructie harmonisch kan verdeelen, den 17-, 257- *enz.-hoek niet medegerekend.*

Opgelost *door* W. van Haarst.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* W. VAN HAARST.

Stellen wij de drie deelen, waarin de cirkelomtrek verdeeld is, door x, y en z voor, dan is:

$$x + y + z = 360 \quad \text{en} \quad 360y = xz.$$

Door y te elimineren, wordt:

$$360(360 - x - z) = xz \quad \text{of} \quad x = 360 \times \frac{360 - z}{360 + z} \quad . \text{(a)}$$

Nu kunnen alle bogen van 3°, en derhalve ook van $\frac{3p}{2^n}$ graden, geconstrueerd worden, althans, indien p en n geheele getallen voorstellen.

Door dan in (a), voor z, $\frac{3p}{2^n}$ en voor x, $\frac{3q}{2^m}$ te schrijven, gaat die vergelijking over in:

$$\frac{3q}{2^m} = 360 \times \frac{120.2^n - p}{120.2^n + p}.$$

Daaruit vindt men gemakkelijk:

$$120.2^m = q \cdot \frac{120.2^n + p}{120.2^n - p} = q\left\{1 + \frac{2p}{120.2^n - p}\right\} \quad . \text{(b)}$$

en hierin kunnen m, n, p en q alleen geheele getallen zijn, terwijl p zoowel als q kleiner moet blijven dan 120.2^n of 120.2^m, daar, voor $p = 120.2^n$, z en voor $q = 120.2^m$ $x = 360°$ zou worden. Uit de vergelijking (b) blijkt, dat de waarden van p en n zoodanig genomen moeten worden, dat $\frac{2p}{120.2^n - p}$ een geheel getal wordt. Stellen wij dit getal door a voor, dan wordt

$$120.2^m = q(a + 1) \quad \text{en} \quad p = \frac{120.2^n a}{a + 2} = 120.2^n - \frac{120.2^{n+1}}{a + 2}.$$

Aan de voorwaarde, dat p en q geheele getallen worden, zal men alzoo voldoen, door aan a zulke waarden te geven, dat tegelijk $\frac{15.2^{m+3}}{a + 1}$ en $\frac{15.2^{n+4}}{a + 2}$ geheele getallen zijn. Nu merken wij terstond op, dat $a + 1$ en $a + 2$, voor dezelfde waarde van a, onmogelijk te gelijk op eene macht van 2 deelbaar kunnen wezen, waardoor het onderzoek van de waarden van a veel vergemakkelijkt wordt. Alle gevallen, welke zich bij den eersten vorm kunnen voordoen, zijn:

Digitized by Google

$$\frac{3}{a+1},\ \frac{5}{a+1},\ \frac{15}{a+1},\ \frac{2^{m+3}}{a+1},\ \frac{3.2^{m+3}}{a+1},\ \frac{5.2^{m+3}}{a+1}$$

en

$$\frac{15.2^{m+3}}{a+1}$$

en bij den tweeden

$$\frac{3}{a+2},\ \frac{5}{a+2},\ \frac{15}{a+2},\ \frac{2^{n+4}}{a+2},\ \frac{3.2^{n+4}}{a+2},\ \frac{5.2^{n+4}}{a+2}$$

en

$$\frac{15.2^{n+4}}{a+2}.$$

Voor de eerste reeks is dus $a = 2$, 4, 14, $2^r = 1$, $3.2^r - 1$, $5.2^r - 1$ en $15.2^r - 1$ en voor de tweede $a = 1$, 3, 13, $2(2^{t-1} - 1)$, $2.(3.2^{t-1} - 1)$, $2(5.2^{t-1} - 1)$ en $2(15.2^{t-1} - 1)$, waarin $r < m + 4$ en $t - 1 < n + 4$ moet zijn. Dewijl nu de vier laatste waarden van a, uit de eerste reeks, oneven en de vier laatste, uit de tweede reeks, even zijn voor alle waarden van r en t, zoo is het klaar, dat wij slechts hebben te onderzoeken, voor welke waarden van r, $a = 1$, 3 of 13 en voor welke waarden van t, $a = 2$, 4 of 14 wordt. Nu is voor $r = 1$, $2^r - 1 = 1$, voor $r = 2$, $2^r - 1 = 3$, terwijl voor geen waarde van r, een der vormen 13 kan opleveren. Voor $t = 2$ wordt daarentegen $2(2^{t-1} - 1) = 2$, voor $t = 1$ $2(3.2^{t-1} - 1) = 4$ en voor $t = 4$ $2(2^{t-1} - 1) = 14$. Zoodat de eenige overeenstemmende waarden van a zijn: 1, 2, 3, 4 en 14. Voor die waarden wordt $p = 40.2^n$, 60.2^n, 72.2^n, 80.2^n en 105.2^n en $q = 60.2^m$, 40.2^m, 30.2^m, 24.2^m en 8.2^m en derhalve $x = \frac{3q}{2^m} = 180$, 120, 90, 72 en 24 en $z = \frac{3p}{2^n} = 120$, 180, 216, 240 en 315, waardoor $y = (360 - x - z) = 60$, 60, 54, 48 en 21 wordt.

CCXXVII. Voorstel.

Door D. J. Korteweg.

Eene betrekking te vinden tusschen de cosinussen der zes hoeken, welke vier lijnen in de ruimte twee aan twee maken.

Opgelost *door* D. J. Korteweg *en* G. J. D. Mounier.

Oplossing *van* D. J. Korteweg.

In een bol trekken wij vier stralen evenwijdig aan de vier in de ruimte gelegen lijnen. De uiteinden dezer stralen noemen wij A, B, C, D; de zes hoeken worden dan gemeten door

Digitized by Google

de bogen van groote cirkels: AB, AC, AD, BC, BD en CD. Voor de cosinussen van deze hoeken schrijven wij: c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6. Wij onderstellen verder dat de boog AD binnen den hoek valt, ingesloten door de bogen AB en AC.

In den bolvormigen driehoek ADB kunnen wij, volgens de hoofdformule der bolvormige driehoeksmeting, den hoek DAB uitdrukken in de zijden. Wanneer wij dezen hoek voorstellen door A_1 en in de gevonden formule de cosinussen der zijden invoeren, dan vinden wij:

$$Cos\, A_1 = \frac{c_4 - c_1 c_3}{\sqrt{1 - c_1^2}.\sqrt{1 - c_3^2}}.$$

Wanneer wij evenzoo $\angle$ CAD voorstellen door A_2, $\angle$ CAB door A_3, dan is:

$$Cos\, A_2 = \frac{c_5 - c_2 c_3}{\sqrt{1 - c_2^2}.\sqrt{1 - c_3^2}},$$

$$Cos\, A_3 = \frac{c_6 - c_1 c_2}{\sqrt{1 - c_1^2}.\sqrt{1 - c_2^2}};$$

terwijl: $$A_3 - A_2 - A_1 = 0.$$

Uit deze laatste betrekking volgt:

$$Cos(A_3 - A_2 - A_1) = 1,$$

$$Cos(A_3 - A_2)\, Cos\, A_1 + Sin(A_3 - A_2)\, Sin\, A_1 = 1,$$

$$Cos(A_3 - A_2)\, Cos\, A_1 + Sin A_3 Sin A_1 Cos A_2 - Sin A_2 Sin A_1 Cos A_3 = 1,$$

$$Cos(A_3 - A_2)\, Cos\, A_1 + Cos(A_3 - A_1)\, Cos\, A_2$$
$$+ Cos(A_2 + A_1)\, Cos\, A_3 = 1 + 2\, Cos\, A_1\, Cos\, A_2\, Cos\, A_3;$$

maar tevens volgt daaruit ook dat:

$$A_3 - A_2 = A_1;\quad A_3 - A_1 = A_2;\quad A_2 + A_1 = A_3;$$

en daardoor verandert de voorgaande betrekking in:

$$1 - Cos^2 A_1 - Cos^2 A_2 - Cos^2 A_3 + 2\, Cos\, A_1\, Cos\, A_2\, Cos\, A_3 = 0.$$

Wij substitueeren hierin de vroeger gevonden waarden voor $Cos\, A_1$, $Cos\, A_2$, $Cos\, A_3$, en vermenigvuldigen tevens beide leden der vergelijking met:

$$(1 - c_1^2)(1 - c_2^2)(1 - c_3^2).$$

Er komt nu eene betrekking voor den dag, die, geheel ontwikkeld, den volgenden vorm verkrijgt:

$$1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 - c_4^2 - c_5^2 - c_6^2 + c_1^2 c_5^2 + c_2^2 c_4^2 + c_3^2 c_6^2$$
$$+ 2c_1 c_2 c_3 + 2c_1 c_4 c_6 + 2c_2 c_5 c_6 + 2c_3 c_5 c_6 - 2c_2 c_3 c_4 c_6$$
$$- 2c_1 c_3 c_5 c_6 - 2c_1 c_2 c_4 c_5 = 0.$$

Opmerking. Dit antwoord is vatbaar om in 't geheugen geprent te worden; indien men opmerkt:

Digitized by Google

1e. de eerste term is de eenheid;

2e. de zes volgende termen bevatten de vierkanten der zes cosinussen;

3e. de volgende drie de vierkanten van alle produkten, twee aan twee van cosinussen behoorende tot hoeken, die geen der beenen gemeen hebben;

4e. de volgende vier de dubbele produkten van de cosinussen der drie hoeken, die iedere lijn met de overigen maakt;

5e. de volgende drie bevatten dubbele produkten van cosinussen, vier aan vier. De beide ontbrekende cosinussen behooren steeds tot hoeken, die door geheel verschillende lijnen gemaakt worden.

CCXXVIII. Voorstel. (*)

Door C. J. Matthes.

Zij XYZ *een veranderlijke driehoek zoo, dat de zijde* YZ *altijd door een vast punt* P *gaat,* ZX *evenzoo door* Q, XY *door* R. *Bijaldien dan de meetkundige plaats van* Y *eene vaste kegelsnede is, welke de punten* R *en* P, *die van* Z *eene vaste kegelsnede, welke de punten* P *en* Q *bevat, te bewijzen: dat de meetkundige plaats van* X *eene vaste kegelsnede zijn zal gaande door* Q, R *en door de overige drie snijpunten der twee gegeven kegelsneden.*

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Men kan de beide gegeven kegelsneden (volgens Ferrers § 164) tot cirkels projecteeren, die de projectie P′ van P (zie fig. 99) gemeen zullen hebben, bijgevolg nog een tweede punt S′, behalve de twee punten op oneindigen afstand. Nu is het klaar, dat $\angle P'Y'R'$ evenals $\angle P'Z'Q'$ standvastig blijft, dus zal ook $\angle QZ'R'$ eene bepaalde waarde hebben, weshalve de meetkundige plaats van X′ een cirkel is door Q′ en R′. Maar die cirkel gaat ook door S′, daar

$$\angle QS'R' = \angle QS'T' + \angle R'S'T' = Z' + Y' = \pi - X.$$

De bedoelde meetkundige plaats is derhalve eene kegelsnede gaande door Q, R, het punt S en de twee punten, waarvan de cirkelpunten op oneindigen afstand de projectiën zijn, bij-

(*) Dit voorstel en de beide volgende voorstellen zijn ontleend aan Ferrers *Nieuwere Meetkunde*, Voorbeelden 63, 64 en 65.

Digitized by Google

gevolg door de drie overige punten gemeen aan de gegeven kegelsneden.

CCXXIX. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Twee raaklijnen zijn getrokken aan eene kegelsnede zoo, dat hare doorsnijdingspunten met eene gegeven rechte lijn harmonisch gekoppeld zijn met opzicht tot twee bepaalde punten op die rechte lijn; te bewijzen: dat de meetkundige plaats van het ontmoetingspunt der raaklijnen eene kegelsnede zijn zal, die door de twee gegeven punten gaat.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Projecteert men de figuur zóó, dat de lijn op oneindigen afstand geraakt, dan blijft (FERRERS, p. 148) de involutie op die lijn bestaan. Maar de cirkelpunten op oneindigen afstand zijn noodwendig de brandpunten dier involutie op de lijn op oneindigen afstand, hetgene volgt uit § 167. Dat zijn dus de projectiën der oorspronkelijke brandpunten of der twee gegeven punten A en B. Daaruit volgt nu verder, dat de raaklijnen aan de projectie der kegelsnede loodrecht op elkander staan, zoodat de projectie der gevraagde meetkundige plaats een cirkel, immers de richtcirkel van de projectie der gegeven kegelsnede is, gaande, gelijk iedere cirkel, door de cirkelpunten A′ en B′ op oneindigen afstand. De meetkundige plaats zelve is derhalve eene kegelsnede gaande door A en B.

CCXXX. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Men denke zich een tal van kegelsneden, die allen vier gegeven rechte lijnen aanraken. Vrage naar het bewijs, dat de meetkundige plaats der pool van eene vijfde willekeurige rechte lijn, met opzicht tot elke der kegelsneden, eene rechte lijn is.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Projecteer in dier voege dat de bewuste vijfde lijn op oneindigen afstand gerake, en laat de projectiën van de der vierzijde ingeschreven kegelsneden P, Q, R enz. zijn P′, Q′, R′ enz., wederom ingeschreven in eene vierzijde, de projectie der oorspronkelijke, dan zijn de middelpunten van P′, Q′, R′ enz. de polen der lijn op oneindigen afstand, maar dat zijn tevens

Digitized by Google

de middelpunten der richtcirkels van P′, Q′, R′ enz., die (volgens § 123, bl. 111) eene chordaallijn gemeen hebben, — waaruit volgt, dat zij op ééne rechte lijn zijn gelegen, loodrecht op die chordaallijn. Keert men nu tot de oorspronkelijke figuur terug, zoo blijkt de waarheid van het gestelde, daar de projectie van eene rechte lijn noodzakelijk weêr eene rechte lijn is.

CCXXXI. VOORSTEL.

Door G. DE VRIES.

Bij het gebruik maken van trilineaire coördinaten is de vergelijking van een' cirkel eenen gelijkzijdigen *driehoek omschreven* $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$. *Vrage een elementair meetkundig bewijs.*

OPGELOST *door* W. KAPTEYN, G. DE VRIES *en* K. BES.

OPLOSSING *van* W. KAPTEYN.

Zij P een willekeurig punt op den omtrek des omgeschreven cirkels van den gelijkzijdigen driehoek ABC (fig. 100), dan is $PD = -\alpha,\ PE = \beta,\ PF = \gamma.$

$\triangle BPD \backsim \triangle APE$, want $\angle B = \angle A = \frac{1}{2}$ Boog PC,

dus: $PB : PA = PD : PE$

of: $-\alpha.PA = \beta.PB \ldots\ldots\ldots (1)$

$\triangle BPF \backsim \triangle CPE$, want $\angle EPF = \angle BPC = 180 - \angle BAC$,

dus: $PB : PC = PF : PE$,

of: $\beta.PB = \gamma.PC \ldots\ldots\ldots (2)$

Verder is:

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PB.PG$$
$$AC^2 = PA^2 + PC^2 - 2PC.PH$$
$$0 = (PB^2 - PC^2) - 2(PB - PC)PG,$$

want $PG = PH$, omdat $\triangle PAG$ gelijk en gelijkv. $\triangle APH$,

dus: $PB + PC = 2PG = PA, \ldots\ldots\ldots (3)$

omdat $\angle GAP = 30°$.

Stelt men nu: $-\alpha.AP = t$,

dan is: $PA = -\frac{t}{\alpha},\ PB = \frac{t}{\beta},\ PC = \frac{t}{\gamma}.$

Dit gesubstituëerd in (3), geeft:

$$-\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma},$$

of: $0 = \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta.$

Digitized by Google

CCXXXII. VOORSTEL.

Door A. HULSCHER.

Op de zijden van een driehoek zijn, buitenwaarts, gelijkvormige driehoeken beschreven zoo, dat de gelijke hoeken van deze gelijkvormige driehoeken bij hetzelfde hoekpunt van den gegeven driehoek zijn gelegen. Indien men nu uit de hoekpunten van den driehoek lijnen trekt naar de tegenoverliggende hoekpunten dier gelijkvormige driehoeken, zullen deze drie lijnen elkander in hetzelfde punt snijden.

Deze eigenschap is met behulp van trilineaire coördinaten bewezen in Voorstel XVI. *Men vraagt nu een elementair meetkundig bewijs.*

OPGELOST *door* A. HULSCHER, K. BES *en* G. J. D. MOUNIER.

OPLOSSING *van* A. HULSCHER.

Zij (Fig. 101) $\angle ACF = \angle ECB = \angle ADB$, $\angle CBE = \angle ADB = \angle AFC$ en $\angle BAD = \angle FAC = \angle BEC$.

Vereenigt men nu B en F, C en D, welke zich snijden in P, dan heeft men, in de driehoeken AFB en ACD, $\angle FAB = \angle CAD$ en $AF : AC = AB : AD$; dus driehoek AFB gelijkvormig met driehoek ACD, bijgevolg $\angle AFB = \angle ACD$ en $\angle ABF = \angle ADC$. Trekt men nu uit P de lijnen AP en PE, dan zal men moeten bewijzen dat AE eene rechte lijn is. In den vierhoek APCF is nu $\angle AFP = \angle ACP$; dit zijn de hoeken gelegen tusschen de tegenoverstaande zijden AF en CP en de beide diagonalen AC en FP des vierhoeks APCF, zoodat om dezen vierhoek (hetgeen gemakkelijk kan worden bewezen) een cirkel kan worden beschreven. Indien men dezen cirkel beschrijft, zal men dadelijk zien dat $\angle APF = \angle ACF$, als staande op den zelfden boog FA, en ook $= \angle ECB = \angle ADB$ en $\angle FAC = \angle FPC = \angle BAD = \angle BEC$ is.

Daar nu $\angle FPC = \angle BEC$ is, kan ook, wegens bovengenoemde redenen, om den vierhoek CPBE een cirkel worden beschreven, waardoor men heeft $\angle CPE = \angle CBE$, als staande op den boog CE.

Men heeft dus $\angle APF = \angle ACF$,

$$\angle CPF = \angle BAD = \angle FAC,$$

$$\angle CPE = \angle CBE = \angle AFC,$$

dus $\angle APF + \angle CPF + \angle CPE = \angle ACF + \angle FAC + \angle AFC = 2R$, derhalve AE eene rechte lijn.

Digitized by Google

CCXXXIII. Voorstel.

Door W. Kapteyn.

Hoe kan de methode van oplossing, door Monge *uitgedacht, voor de integratie van de partiële differentiaal-vergelijking*

$$A\frac{d^2z}{dx^2}+B\frac{d^2z}{dxdy}+C\frac{d^2z}{dy^2}=V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

toegepast worden op de meer algemeene vergelijking

$$A\frac{d^nz}{dx^n}+B\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}+C\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}+\;.\;.\;.$$

$$+P\frac{d^nz}{dx^2dy^{n-2}}+P\frac{d^nz}{dxdy^{n-1}}+P\frac{d^nz}{dy^n}=V.$$

Opgelost *door* W. Kapteyn.

Oplossing *van* W. Kapteyn.

De afleiding van de hulpvergelijkingen, die Monge bij zijne oplossing gebruikt, moge hier eerst eene plaats vinden, daar zij waarschijnlijk van de zijne afwijkt en voor de duidelijkheid van het volgende van het hoogste gewicht is.

Schrijven wij kortheidshalve:

$$\frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dy}=q,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=r,\quad \frac{d^2z}{dxdy}=s,\quad \frac{d^2z}{dy^2}=t.$$

Hierdoor wordt de vergelijking (a):

$$Ar+Bs+Ct=V.$$

Deze vergelijking kan ook geschreven worden:

$$A\frac{dp}{dx}+B\frac{dq}{dx}+C\frac{dq}{dy}=V. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a')$$

Vermenigvuldigen wij de beide leden dezer laatste vergelijking met dx, en tellen er de identieke vergelijking:

$$A\frac{dp}{dy}dy-A\frac{dq}{dx}dy=0$$

bij op, dan krijgen wij:

$$(Bdx-Ady)\frac{dq}{dx}+Cdx\frac{dq}{dy}=Vdx-Adp.$$

Hieruit is, volgens Lagrange:

$$\frac{dx}{Bdx-Ady}=\frac{dy}{Cdx}=\frac{dq}{Vdx-Adp},$$

waaruit onmiddelijk de hulpvergelijkingen van Monge voortvloeijen, t. w.:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0, \\ 2. & Adpdy + Cdqdx - Vdxdy = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots (I)$$

Behandelen wij nu de vergelijking:

$$A\frac{d^3z}{dx^3} + B\frac{d^3z}{dx^2dy} + C\frac{d^3z}{dxdy^2} + D\frac{d^3z}{dy^3} = V \ldots\ldots (b)$$

op eene dergelijke wijs.

Eene andere vorm van (b) is weêr:

$$A\frac{dr}{dx} + B\frac{ds}{dx} + C\frac{dt}{dx} + D\frac{dt}{dy} = V \ldots\ldots (b')$$

Hieruit volgt:

$$A\frac{dr}{dx}dx + B\frac{ds}{dx}dx + C\frac{dt}{dx}dx + D\frac{dt}{dy}dx = Vdx.$$

Verder is:

$$A\frac{dr}{dy}dy - A\frac{ds}{dx}dy \qquad = 0.$$

Hare som geeft dus:

$$(Bdx - Ady)\frac{ds}{dx} + Cdx.\frac{dt}{dx} + Ddx\frac{dt}{dy} = Vdx - Adr.$$

De vorm dezer laatste vergelijking is dezelfde als die van de vergelijking (a'). De hulpvergelijkingen, die bij (b) behooren, volgen dus uit (I) en zijn:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & (Bdx - Ady)dy^2 - (Cdx)dxdy + Ddx^3 = 0, \\ 2. & (Bdx - Ady)dsdy + Ddx^2dt - (Vdx - Adr)dxdy = 0. \end{array}\right\} (II)$$

Op dezelfde wijze kan men verder de vergelijking:

$$A\frac{d^4z}{dx^4} + B\frac{d^4z}{dx^3dy} + C\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + D\frac{d^4z}{dxdy^3} + E\frac{d^4z}{dy^4} = V \quad . (c)$$

herleiden tot den vorm (b') en dan uit (II) een nieuw stel hulpvergelijkingen afleiden.

Het spreekt wel van zelf dat deze redeneringen zoover kunnen worden voortgezet als men wil: derhalve zijn er ook zulke vergelijkingen te vinden voor de algemeene vergelijking:

$$A\frac{d^nz}{dx^n} + B\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy} + C\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2} + \ldots + P\frac{d^nz}{dx^2dy^{n-2}}$$
$$+ Q\frac{d^nz}{dxdy^{n-1}} + R\frac{d^nz}{dy^n} = V.$$

Tot opheldering van 't voorgaande zullen wij hierbij voegen de integratie van een voorbeeld, ontleend aan »GREGORY's *Examples;*" hiermede zal dan tevens de weg aangewezen zijn, dien men te volgen heeft, nadat de hulpvergelijkingen gevon-

Digitized by Google

den zijn, en die weêr geheel overeenstemt met het laatste gedeelte van de oplossing van MONGE.

VOORBEELD:

$$\frac{d^3z}{dx^3} - (2a+b)\frac{d^3z}{dx^2dy} + (2ab+a^2)\frac{d^3z}{dxdy^2} - a^2b\frac{d^3z}{dy^3} = 0.$$

Hiervoor worden de hulpvergelijkingen (II):

$$(dy + adx)^2 (dy + bdx) = 0,$$

$$\{-(2a+b)dx - dy\} dxdy - a^2bdx^2dt + drdxdy = 0.$$

Aan de eerste dezer twee vergelijkingen voldoet:

$$dy = -adx \quad \text{en} \quad dy = -bdx.$$

Substitueeren wij deze waarden van dy beurtelings in de tweede vergelijking, dan vinden wij na integratie:

$$(a+b)s - abt - r = f(y+ax),$$

$$2as - a^2t - r \quad = \phi(y+bx),$$

waarin f en ϕ willekeurige functies voorstellen.

Hieruit vinden wij:

$$s - at = \frac{1}{a-b}(\phi - f) = \phi'_1 - f'_1,$$

$$as - r = \frac{1}{a-b}(af - b\phi) = af'_1 - b\phi'_1,$$

waarin $\phi'_1 = \frac{1}{a-b}\phi$ en $f'_1 = \frac{1}{a-b}f$ zijn.

Substitueeren wij de waarden van r en t hieruit in:

$$dp = rdx + sdy \quad \text{en} \quad dq = sdx + tdy,$$

nadat de beide leden der laatste vergelijking met a vermenigvuldigd zijn, dan krijgen wij:

$$dp = s(dy + adx) + bdx.\phi'_1 - adx.f'_1,$$

$$adq = s(dy + adx) - dy.\phi'_1 + dy.f'_1,$$

of na aftrekking:

$$dp - adq = \phi'_1.(dy + bdx) - f'_1.(dy + adx).$$

Nu integreerende vinden wij:

$$p - aq = \phi_1 - f_1,$$

waaruit:

$$q = \frac{p}{a} + \frac{f_1 - \phi_1}{a}.$$

Deze waarde van q en hare differentiaalquotienten substitueere men nu in het bekende systeem vergelijkingen van LAGRANGE, t. w.:

Digitized by Google

$$-\frac{\frac{dz}{dq}}{\frac{dp}{dq}} = dy = \frac{dz}{q - p\frac{dq}{dp}} = \frac{dp}{\frac{dq}{dz} + p\frac{dq}{dz}},$$

dan verkrijgt men:

$$-adz = dy = \frac{adz}{f_1 - \varphi_1} = \frac{adp}{af'_1 - b\phi'_1}.$$

Hieruit neme men de vergelijkingen:

$$dy + adx = 0$$

en

$$adp = af'_1 dy - b\phi'_1 dy.$$

Uit de eerste dezer twee vergelijkingen volgt:

$$y + az = C = \text{const.}$$

De tweede moet nog veranderd worden vóór zij geintegreerd kan worden.

Houden wij in het oog, waarvoor f'_1 en ϕ'_1 afkortingen zijn, dan is het duidelijk, waarom wij mogen schrijven:

$$adp = af'_1(C)\,dy - b\phi'_1\left(y + b.\frac{C-y}{a}\right)dy.$$

Deze vergelijking geintegreerd geeft:

$$ap = ayf'_1(C) - \frac{ab}{a-b}\phi_1\left(y + b.\frac{C-y}{a}\right) + \psi(C),$$

waarin ψ eene willekeurige functie voorstelt.

De waarden van p en q zijn dus:

$$p = yf'_1(y + az) - \frac{b}{a-b}\phi_1(y + bz) + \psi(y + az),$$

$$q = \frac{y}{a}f'_1(y + az) + \frac{1}{a}f_1(y + az) - \frac{1}{a-b}\phi_1(y + bz) + \frac{1}{a}\psi(y + az).$$

Hiermede gaat eindelijk $dz = pdz + qdy$ over in:

$$dz = \frac{1}{a}\psi(dy + adz) - \frac{1}{a-b}\phi_1(dy + bdz) + \frac{y}{a}f'_1(dy + adz)$$
$$+ \frac{1}{a}f_1(y + az)\,dy.$$

Dit op nieuw geintegreerd, geeft:

$$z - \frac{1}{a}\psi(y + az) - \frac{1}{a-b}\Phi_1(y + bz) + \frac{y}{a}f_1(y + az)$$

of

$$z = \Psi + \Phi + yF,$$

waarin het duidelijk is, wat de beteekenis is der letters Ψ, Φ en F.

Digitized by Google

CCXXXIV. VOORSTEL.

Door W. H. WISSELINK.

Uit den top O *eener parabel heeft men eene koorde* OP *getrokken en daarop een stuk* OQ *genomen gelijk aan de projectie van* OP *op de* x*-as. Vrage den inhoud van de figuur begrepen tusschen de meetkundige plaats van* Q *en de lijn voor welke is* $x = y$.

OPGELOST *door* W. H. WISSELINK, L. VAN DER EST *en* W. KAPTEYN.

OPLOSSING *van* W. H. WISSELINK.

Zij de vergelijking der parabel $y^2 = 2px$, stellen we $OP = V$, dan is:

$$OA = V \cos\phi,$$
$$AP = V \sin\phi,$$
$$OQ = V \cos\phi.$$

In poolcoördinaten (met Ox als as) hebben we dus:

$$OQ = r = V \cos\phi \ldots\ldots\ldots (1)$$

Maar

$$V^2 \sin^2\phi = 2p\, V \cos\phi \ldots\ldots\ldots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt voor de vergelijking van Q:

$$r = 2p \cot^2\phi.$$

Voor den gevraagden inhoud u hebben wij nu blijkbaar:

$$u = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2} r^2 d\phi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2} . 4p^2 \cot^4\phi d\phi = 2p^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^4\phi d\phi.$$

Nu is:

$$\int \cot^4\phi d\phi = -\frac{1}{3}\cot^3\phi + \cot\phi + \phi,$$

dus:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^4\phi d\phi = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{3}$$

en

$$u = 2p^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}p^2(3\pi - 8).$$

CCXXXV. VOORSTEL.

Door W. H. WISSELINK.

Wanneer men de kromme, wier vergelijking is $y = \dfrac{1}{1+e^x}$ *om de* x*-as laat draaien, vraagt men den inhoud van het daardoor ontstane lichaam (van* $x = 0$ *tot* $x = \infty$*).*

OPGELOST *door* W. KAPTEYN, W. H. WISSELINK *en* L. VAN DER EST.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* W. KAPTEYN.

Zij de gevraagde inhoud V, dan is:

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$$

Stelt men hierin $\frac{1}{1+e^x} = 1 - y$,

dan verandert bovenstaande integraal in:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-y)\,dy}{y}.$$

Met behulp hiervan vindt men: $V = \pi\,(Nep.\,log.\,2 - \frac{1}{2})$.

CCXXXVI. VOORSTEL.

Door W. H. WISSELINK.

Gegeven zijn het oppervlak

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mxz + 2nxy + 2px + 2qy + 2rz + \delta = 0$

en het punt A, *wiens coördinaten zijn* α, β, γ. *Onder welke voorwaarde zal de poollijn van* AB *loodrecht staan op de lijn* AB; *de coördinaten van* B *zijn* x_1, y_1, z_1.

OPGELOST *door* W. H. WISSELINK.

OPLOSSING *van* W. H. WISSELINK.

Volgens § 59 van »*die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes von* SALMON, *durch* FIEDLER", is het poolvlak van

het punt A $\quad \frac{dF}{dx_\alpha}x + \frac{dF}{dy_\beta}y + \frac{dF}{dz_\gamma}z + \frac{dF}{dw_\iota}w = 0$

en dat van B $(x_1\, y_1\, z_1)$ $\quad \frac{dF}{dx_1}x + \frac{dF}{dy_1}y + \frac{dF}{dz_1}z + \frac{dF}{dw^1}w = 0.$

De doorsnede dezer vlakken (poollijn van AB) is:

$$\left.\begin{aligned} z &= -\frac{D_{y_1}D_\gamma - D_\beta D_{z_1}}{D_\alpha D_{y_1} - D_{z_1}D_\beta}z + \text{enz.},\\ y &= \frac{D_{z_1}D_\gamma - D_\alpha D_{z_1}}{D_\alpha D_{y_1} - D_{z_1}D_\beta}z + \text{enz.}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

De vergelijking van AB is;

$$\frac{z-\alpha}{z-z_1} = \frac{y-\beta}{\beta-y_1} = \frac{z-\gamma}{\gamma-z_1},$$

of:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{\alpha - x_1}{\gamma - z_1}z + \text{enz.},\\ y &= \frac{\beta - y_1}{\gamma - z_1}z + \text{enz.}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Digitized by Google

Zullen (1) en (2) loodrecht op elkaar staan, dan moet:

$$-\frac{\alpha - x_1}{\gamma - z_1} \cdot \frac{D_y D_\gamma - D_\beta D_{z_1}}{D_\alpha D_{y_1} - D_{z_1} D_\beta} + \frac{\beta - y_1}{\gamma - z_1} \cdot \frac{D_{z_1} D_\gamma - D_\alpha D_{z_1}}{D_\alpha D_{y_1} - D_z D_\beta} + 1 = 0$$

zijn, of na eenige herleiding:

$$D_{z_1}\begin{vmatrix} \beta - y_1, & \gamma - z_1 \\ D_\beta, & D_\gamma \end{vmatrix} + D_{y_1}\begin{vmatrix} \gamma - z_1, & \alpha - x_1 \\ D_\gamma, & D_\alpha \end{vmatrix} + D_{z_1}\begin{vmatrix} \alpha - x_1, & \beta - y_1 \\ D_\alpha, & D_\beta \end{vmatrix} = 0$$

eene zeer symetrische voorwaarde.

Beschouwen we x_1, y_1, z_1 als loopende coördinaten, dan is de meetkundige plaats van het punt B:

$$\frac{dF}{dx}\begin{vmatrix} \beta - y, & \gamma - z \\ \frac{dF}{dy_\beta}, & \frac{dF}{dz_\gamma} \end{vmatrix} + \frac{dF}{dy}\begin{vmatrix} \gamma - z, & \alpha - x \\ \frac{dF}{dz_\gamma}, & \frac{dF}{dx_\alpha} \end{vmatrix} + \frac{dF}{dz}\begin{vmatrix} \alpha - x, & \beta - y \\ \frac{dF}{dx_\alpha}, & \frac{dF}{dy_\beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Men ziet dadelijk, dat die meetkundige plaats van den 2den graad is en door het punt A gaat.

Neemt men als oorsprong het punt A, dan wordt de vergelijking:

$$D_x\begin{vmatrix} y, & z \\ D_\beta, & D_\gamma \end{vmatrix} + D_y\begin{vmatrix} z, & x \\ D_\gamma, & D_\alpha \end{vmatrix} + D_z\begin{vmatrix} x, & y \\ D_\alpha, & D_\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Daar aan deze vergelijking ook voldaan wordt door Rx, Ry, Rz, blijkt, dat de meetkundige plaats van AB een *kegel* is met A als top.

CCXXXVII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Analytisch te bewijzen, dat de lijnen, die één hoek van een driehoek en de supplementen der twee overige hoeken middendoordeelen, elkander in één punt ontmoeten.

Opgelost *door* C. J. Matthes, T. van Tijn, K. Bes *en* G. J. D. Mounier.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Neem OA, OB (fig. 102) tot scheefhoekige coördinaatassen aan, dan is de vergelijking van OS:

$$L = y - x = 0;$$

die van AS:

$$L' = y \, Sin \tfrac{1}{2}(C - A) + x \, Cos \tfrac{1}{2}B - c \, Cos \tfrac{1}{2}B = 0;$$

die van BS:

$$L'' = y \, Cos \tfrac{1}{2}C - x \, Sin \tfrac{1}{2}(A - B) - b \, Cos \tfrac{1}{2}C = 0;$$

Bijgevolg: $L \times Sin\, A + L' \times 2\, Sin \tfrac{1}{2}B - L'' \times 2\, Sin \tfrac{1}{2}C = 0.$

Digitized by Google

OPLOSSING *van* T. VAN TIJN.

Zij AOB (fig. 102) een driehoek, AB_1 en BA_1 lijnen, die respectivelijk de supplementen der hoeken A en B middendoordeelen, en die elkander in een punt S snijden, dan moet bewezen worden, dat de lijn, die door O en S gaat, $\angle$ O middendoordeelt.

Men neme OA en OB als assen van een scheefhoekig coördinatenstelsel aan; stelle $OA = a$, $OB = b$, $OA_1 = a_1$ en $OB_1 = b_1$. [A_1 en B_1 de punten zijnde, waar de deellijnen der supplementen de overstaande zijden ontmoeten.]

De vergelijking van A_1B is: $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b} = 1$ . . . . . (1)

» » » AB_1 » $\frac{x}{a} + \frac{y}{b_1} = 1$ . . . . . (2)

Noem ω den coördinatenhoek O; stel voorts $\angle OAB = \alpha$, $\angle OA_1B = \alpha_1$, $\angle OB_1A = \beta_1$, $\angle OAB_1 = \alpha'$, $\angle OBA = \beta$, $\angle OBA_1 = \beta'$, dan is:

$$\alpha + \tfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = \alpha'$$

of $\alpha' = \alpha + 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. . . . . (3)

$\beta + \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = \beta'$ of $\beta' = \beta + 90^\circ - \frac{1}{2}\beta = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$. (4)

Verder is $\angle A_1BB_1$, als buitenhoek van driehoek OA_1B, gelijk aan $\omega + \alpha_1$, of $\omega + \alpha_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, waaruit $\alpha_1 = 90^\circ - (\omega + \frac{1}{2}\beta)$. . . . . (5)

Evenzoo is $\angle A_1AB_1$ als buitenhoek van driehoek OAB_1 gelijk aan $\omega + \beta_1$ of $\omega + \beta_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, waaruit: $\beta_1 = 90^\circ - (\omega + \frac{1}{2}\alpha)$. . . . . (6)

In driehoek OA_1B is: $a_1 : b = Sin\,\beta' : Sin\,\alpha_1$.

Door (4) en (5) wordt deze evenredigheid:

$$a_1 : b = Cos\,\tfrac{1}{2}\beta : Cos\,(\omega + \tfrac{1}{2}\beta),$$

waaruit: $a_1 = \frac{b\,Cos\,\frac{1}{2}\beta}{Cos\,(\omega + \frac{1}{2}\beta)}$ of $\frac{1}{a_1} = \frac{Cos\,(\omega + \frac{1}{2}\beta)}{b\,Cos\,\frac{1}{2}\beta}$ . . (7)

In driehoek OB_1A is: $b_1 : a = Sin\,\alpha' : Sin\,\beta_1$.

Door (3) en (6) wordt deze evenredigheid:

$$b_1 : a = Cos\,\tfrac{1}{2}\alpha : Cos\,(\omega + \tfrac{1}{2}\alpha),$$

waaruit: $b_1 = \frac{a\,Cos\,\frac{1}{2}\alpha}{Cos\,(\omega + \frac{1}{2}\alpha)}$ of $\frac{1}{b_1} = \frac{Cos\,(\omega + \frac{1}{2}\alpha)}{a\,Cos\,\frac{1}{2}\alpha}$ . . (8)

Trekt men (1) van (2) af, dan verkrijgt men als vergelijking

Digitized by Google

eener lijn, die door het snijpunt der beide deellijnen gaat:

$$x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a_1}\right)+y\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b}\right)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Dewijl in die vergelijking (9) x en y gelijktijdig nul worden, is zij de vergelijking eener lijn, die door den oorsprong O gaat, en daar zij tevens door het snijpunt S gaat, zoo is zij de vergelijking van OS. OS heeft dus tot vergelijking:

$$x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a_1}\right)+y\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b}\right)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Laten wij zien, hoe die vergelijking verder kan vereenvoudigd worden.

Wanneer men (7) en (8) in haar substituëert, dan wordt zij:

$$x\left[\frac{1}{a}-\frac{Cos\,(\omega+\frac{1}{2}\beta)}{b\;Cos\,\frac{1}{2}\beta}\right]+y\left[\frac{Cos\,(\omega+\frac{1}{2}\alpha)}{a\;Cos\,\frac{1}{2}\alpha}-\frac{1}{b}\right]=0,$$

$$x\left[\frac{bCos\frac{1}{2}\beta-aCos(\omega+\frac{1}{2}\beta)}{ab\;Cos\,\frac{1}{2}\beta}\right]+y\left[\frac{bCos(\omega+\frac{1}{2}\alpha)-aCos\frac{1}{2}\alpha}{ab\;Cos\,\frac{1}{2}\alpha}\right]=0,$$

of, na vermenigvuldiging met ab:

$$x\left[b-\frac{a\;Cos\,\omega\;Cos\,\frac{1}{2}\beta-a\;Sin\,\omega\;Sin\,\frac{1}{2}\beta}{Cos\,\frac{1}{2}\beta}\right]$$

$$+\,y\left[\frac{b\;Cos\,\omega\;Cos\,\frac{1}{2}\alpha-b\;Sin\,\omega\;Sin\,\frac{1}{2}\alpha}{Cos\,\frac{1}{2}\alpha}-a\right]=0.$$

$$x\left[b-a\;Cos\,\omega+a\;Sin\,\omega\frac{Sin\,\frac{1}{2}\beta}{Cos\,\frac{1}{2}\beta}\right]$$

$$+\,y\left[b\;Cos\,\omega-a-b\;Sin\,\omega\frac{Sin\,\frac{1}{2}\alpha}{Cos\,\frac{1}{2}\alpha}\right]=0.$$

Wanneer men de zijde AB van driehoek OAB c noemt, dan is, volgens eene bekende formule:

$$a=b\;Cos\,\omega+c\;Cos\,\alpha \quad \text{en} \quad b=a\;Cos\,\omega+c\;Cos\,\beta,$$

waaruit:

$$b\;Cos\,\omega-a=-c\;Cos\,\alpha \quad \text{en} \quad b-a\;Cos\,\omega=c\;Cos\,\beta. \; (10)$$

Vervolgens is ook bekend:

$$a\;Sin\,\omega=c\;Sin\,\beta \quad \text{en} \quad b\;Sin\,\omega=c\;Sin\,\alpha \quad . \; . \; (11)$$

Substitueert men nu (10) en (11), dan wordt de vergelijking aldus:

$$x\left[c\;Cos\,\beta+2c\;Sin\,\frac{1}{2}\beta\;Cos\,\frac{1}{2}\beta\times\frac{Sin\,\frac{1}{2}\beta}{Cos\,\frac{1}{2}\beta}\right]$$

$$+\,y\left[-c\;Cos\,\alpha-2c\;Sin\,\frac{1}{2}\alpha\;Cos\,\frac{1}{2}\alpha\times\frac{Sin\,\frac{1}{2}\alpha}{Cos\,\frac{1}{2}\alpha}\right]=0.$$

Digitized by Google

of: $$x\,[c\,(1 - 2\,Sin^2\,\tfrac{1}{2}\beta) + 2c\,Sin^2\,\tfrac{1}{2}\beta]$$
$$+\,y\,[-\,c\,(1 - 2\,Sin^2\,\tfrac{1}{2}\alpha) - 2c\,Sin^2\,\tfrac{1}{2}\alpha] = 0\,,$$
of $x \times c - y \times c = 0$ of $x - y = 0$ of $x = y$.

Deze vergelijking is die van de lijn die ω halveert, dus deelt OS den hoek ω middendoor.

CCXXXVIII. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Analytisch te bewijzen, dat de lijnen, die de raakpunten van een' cirkel, eenen driehoek ingeschreven, met de hoekpunten van den driehoek verbinden, door één zelfde punt gaan.

Opgelost *door* C. J. Matthes *en* K. Bes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Neem (fig. 103) AB, AC tot scheefhoekige coördinaatassen aan, dan vindt men voor het middelpunt M van den ingeschreven cirkel:

$$x = y = \frac{c\,Sin\,B}{4\,Cos\,\tfrac{1}{2}A.\,Cos\,\tfrac{1}{2}B.\,Cos\,\tfrac{1}{2}C};$$

voorts voor het punt D: $x = \dfrac{c\,Sin\,\tfrac{1}{2}B\,Cos\,\tfrac{1}{2}C}{Cos\,\tfrac{1}{2}A}$, $y = \dfrac{b\,Sin\,\tfrac{1}{2}C\,Cos\,\tfrac{1}{2}B}{Cos\,\tfrac{1}{2}A}$;

voor het punt E: $x = 0$, $y = \dfrac{c\,Cos\,\tfrac{1}{2}A\,Sin\,\tfrac{1}{2}B}{Cos\,\tfrac{1}{2}C}$

en voor het punt F: $x = \dfrac{c\,Cos\,\tfrac{1}{2}A\,Sin\,\tfrac{1}{2}B}{Cos\,\tfrac{1}{2}C}$, $y = 0$.

Wijders voor de vergelijkingen:

van AD $L = y\,Cos^2\,\tfrac{1}{2}C = x\,Cos^2\,\tfrac{1}{2}B = 0$,

van BE $L' = y\,Cos\,\tfrac{1}{2}C + x\,Cos\,\tfrac{1}{2}A\,Sin\,\tfrac{1}{2}B - C\,Cos\,\tfrac{1}{2}A\,Sin\,\tfrac{1}{2}B = 0$,

van CF $L'' = y\,Cos\,\tfrac{1}{2}A\,Sin\,\tfrac{1}{2}C + x\,Cos\,\tfrac{1}{2}B - b\,Cos\,\tfrac{1}{2}A\,Sin\,\tfrac{1}{2}C = 0$.

Bijgevolg $L \times Sin\,\tfrac{1}{2}A - L' \times Cos\,\tfrac{1}{2}B + L''\,Cos\,\tfrac{1}{2}C = 0$,

waaruit het gestelde volgt.

CCXXXIX. Voorstel.

Door L. van der Est.

Men vraagt, uit de vergelijking eener kegelsnede aan te toonen, dat eene kegelsnede op de volgende wijze door punten kan worden geconstrueerd. Trek drie willekeurige rechte lijnen A, B, C, *snij de lijnen* A, B *door een stelsel van lijnen evenwijdig aan* C. *Laat uit de snijpunten p en q loodlijnen neder op* C, *waarvan de voetpunten r en s mogen zijn. Zij* O *het snijpunt van* A *en* C *en neme men dat als middelpunt van*

Digitized by Google

een stelsel concentrische cirkels met de stralen OS, *dan zijn de snijpunten dezer cirkels met de loodlijnen pr punten eener kegelsnede.*

OPGELOST *door* L. VAN DER EST, K. BES *en* G. J. D. MOUNIER.

OPLOSSING *van* L. VAN DER EST.

Nemen we de topvergelijking der kegelsnede $y^2 = ax^2 + bx$. en stellen we $x = x' + m$, dan wordt de vergelijking:

$$y^2 = ax^2 + (2am + b)x + (am^2 + bm) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

of $\quad x^2 + y^2 = (a + 1)x^2 + (2am + b)x + (am^2 + bm)$.

Onderzoeken we, welke waarde aan m moet toegekend worden, opdat het tweede lid een volkomen vierkant zij. Dit leidt tot de vergelijking in m:

$$4am^2 + 4bm - b^2 = 0.$$

De bestaanbaarheid van m vordert $b^2(1 + a) > 0$.

Wanneer dus a en $(1 + a)$ negatief zijn, zal door verplaatsing van den oorsprong op de x-as, de vergelijking der kegelsneden nooit den vorm $x^2 + y^2 = (Mx + n)^2$ kunnen aannemen. In dit geval stellen we in (1) $m = -\frac{b}{2a}$, dan vindt men:

$y^2 = ax^2 - \frac{b^2}{4a}$ of $a = -a'$ stellende, waardoor a' en $a' - 1$ positief worden: $a(x^2 + y^2) = (a' - 1)y^2 + \frac{b^2}{4a}$. Stellen we hierin $y = y' + n$, dan vindt men:

$$a'(x^2 + y^2) = (a' - 1)y^2 - 2ny - \left(n^2 - \frac{b^2}{4a'}\right).$$

Zal nu het tweede lid een volkomen vierkant zijn, dan heeft men tot voorwaarde de vergelijking in n, $n^2 = \frac{b^2}{4a'^2}(a' - 1)$.

Wegens $a' - 1$ positief, is n altijd bestaanbaar, zoodat de topvergelijking eener kegelsnede altijd kan gebracht worden tot eene der vormen: $x^2 + y^2 = (Mx + n)^2$ of $x^2 + y^2 = (My + n)^2$, wat door assenverwisseling tot ééne vergelijking voert:

$$x^2 + y^2 = (Mx + n)^2 \text{ of } P\sqrt{x^2 + y^2} - n) = Qx.$$

$M = \frac{Q}{P}$, $Q = tg\,\alpha$, $P = tg\,\beta$ stellende, geraakt men tot de volgende meetkundige beteekenis. Zij (fig. 104) $OT = \sqrt{x^2 + y^2}$,

Digitized by Google

$OK = n$, dan is $KT = \sqrt{x^2 + y^2} - n$, $\angle LKT = \beta$, $\angle LOT = \alpha$, dan is $P(\sqrt{x^2 + y^2} - n) = RT = SU = Qx$. $Q = tg\alpha$ geeft $x = OU$, terwijl het punt (x, y) der kegelsnede ligt op den cirkel $x^2 + y^2 = OT^2$, zoodat P het punt eener kegelsnede moet zijn, waardoor het gevraagde bewezen is. $M = 1$ of $P = Q$, of evenwijdigheid der lijnen geeft een parabel, $M > 1$ of $Q > P$ eene hyperbel, $M < 1$ of $Q < P$ eene ellips, terwijl uit de beide laatste opmerkingen weder volgt, dat uit dezelfde figuur eene ellips of hyperbel zal geconstrueerd worden, naarmate men het eene of andere der punten O en K tot middelpunt der concentrische cirkels kiest.

CCXL. Voorstel.

Door L. van der Est.

In eene ellips worden twee willekeurige middellijnen getrokken, die tevens middellijnen zijn eener tweede ellips. Aan beide ellipsen worden, evenwijdig aan die middellijnen, raaklijnen getrokken. Men vraagt te bewijzen, dat de raakkoorden in de eene ellips met de raakkoorden in de andere, twee aan twee, evenwijdig zullen zijn.

Opgelost *door* L. van der Est *en* K. Bes.

Oplossing *van* L. van der Est.

Zij (fig. 105) Oa de eene, Ob de andere der gegeven halve middellijnen. Nemen we OX tot x-as, OY tot y-as van een coördinaten-stelsel, dan is de vergelijking der ellips AC:

$$f(xy) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D = 0.$$

Door beurtelings x en $y = 0$ te stellen, vinden wij:

$$\frac{Ob}{Oa} = \frac{\sqrt{-\frac{D}{C}}}{\sqrt{-\frac{D}{A}}} = \sqrt{\frac{A}{C}}.$$

Zij $pq // Oa$, $qr // Ob$ raaklijnen aan AC in de punten m en n, en (α, β) de coördinaten van het punt q, waarin wij het stelsel met den oorsprong O evenwijdig verplaatsen. De vergelijking der ellips (AC) wordt dan:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + f'_x(\alpha, \beta)x + f'_y(\alpha, \beta)y + f(\alpha, \beta) = 0.$$

De omstandigheid, dat de nieuwe assen raaklijnen zijn, geeft voor $y = 0$:

Digitized by Google

$$x = mq = \frac{f'_x(\alpha\beta) \pm \sqrt{4A\left\{\left[\frac{f'_x(\alpha\beta)^2}{4A}\right] - f(\alpha\beta)\right\}}}{2A},$$

voor $x = 0$:

$$y = nq = \frac{f_y'(\alpha\beta) \pm \sqrt{4C\left\{\left[\frac{f'_y(\alpha\beta)^2}{4C}\right] - f(\alpha\beta)\right\}}}{2C},$$

waarin $\left(\frac{f'_x(\alpha\beta)^2}{4A}\right) - f(\alpha\beta) = 0 = \left(\frac{f'_y(\alpha\beta)^2}{4C}\right) - f(\alpha\beta)$

moet zijn. Bijgevolg:

$$\frac{f'_x(\alpha\beta)}{2\sqrt{A}} = \frac{f'_y(\alpha\beta)}{2\sqrt{C}} \quad \text{en} \quad 2A \times mq = f'_x(\alpha\beta),$$

$$2C \times nq = f'_y(\alpha\beta),$$

dus: $\frac{f'_y(\alpha\beta)}{f'_x(\alpha\beta)} = \frac{C \times nq}{A \times mq} = \sqrt{\frac{C}{A}}$ en $\frac{nq}{mq} = \sqrt{\frac{A}{C}} = \frac{Ob}{Oa}$,

waaruit de gelijkvormigheid der driehoeken Oab en qmn volgt, wat in verband met $Oa // pq$, $Ob // qr$, geeft $ab // mn$. Om dezelfde reden is in ellips DE $ur // ab$, bijgevolg ook $ur // mn$.

CCXLI. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

Een homogene rechte half-cirkel-vormige cylinder van hout kan draaien om zijne bevestigde as en bevindt zich gedeeltelijk in water, hetwelk steeds tot aan die as reikt. Vrage naar het bewijs, dat de cylinder in onverschillig evenwicht verkeert, bijaldien het soortelijk gewicht der houtsoort is = 0,5.

OPGELOST *door* C. J. MATTHES *en* J. J. BRUTEL DE LA RIVIÈRE.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Het zwaartepunt W van den cirkelsector BOC (zie fig. 106) ligt op de halveeringslijn OD van den hoek, op een afstand

$$OW = \tfrac{2}{3}r \times \frac{Sin\ BOD}{BOD}$$

$$= \tfrac{2}{3}r . \frac{Sin\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\delta)}{\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\delta},$$

zoodat $$Ow = \tfrac{2}{3}r . \frac{Sin\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\delta)\ Cos\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\delta)}{\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\delta}$$

$$= \tfrac{1}{3}r . \frac{Cos\,\delta}{\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\delta}.$$

Het zwaartepunt S van den halven cirkel ligt op den afstand

Digitized by Google

$$OS = \tfrac{2}{3}r.\frac{Sin\,\tfrac{1}{2}\pi}{\tfrac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3}.\frac{r}{\pi},$$

zoodat $$Os = \frac{4}{3}.\frac{r}{\pi}.\,Cos\,\delta:$$

Derhalve heeft men, als l de lengte van den halven cylinder voorstelt, voor de momenten van gewicht en opstuwing:

$$\tfrac{1}{2}l \times 0.5 \times \pi r^2 \times \frac{4}{3}.\frac{r}{\pi}.\,Cos\,\delta$$

$$= \tfrac{1}{2}l \times \frac{\tfrac{1}{2}\pi - \delta}{\pi} \times \pi r^2 \times \tfrac{1}{3}r.\frac{Cos\,\delta}{\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\delta}$$

$$= \tfrac{13}{3}rl\,Cos\,\delta.$$

Aanmerking. Bevindt zich de toestel in een vat, en staat daarin het water hooger of lager dan de as des cylinders, zoo is het evenwicht verbroken; het herstelt zich echter van zelf door eene draaiiende beweging van den cylinder, zoodat op die wijze steeds een constante waterspiegel verkregen wordt, gelijk dan ook de inrichting daarvoor dienstbaar is gemaakt in sommige Engelsche gasmeters.

CCXLII. Voorstel. (*)

Door W. H. Wisselink.

Gegeven is eene ellipsoïde, wier vergelijking is $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. *Op* OA *is eene ellips beschreven gelijkvormig met de ellips, wier vergelijking is* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Die ellips is de basis van een rechten cylinder. Welk gedeelte wordt door dien cylinder uitgeboord?*

Opgelost *door* W. Kapteyn, W. H. Wisselink *en* L. van der Est.

Oplossing *van* W. Kapteyn.

Bepalen wij vooreerst de inhoud van het lichaam ZOCXAY (fig. 107).

De inhoud van eene willekeurige sectie ACD // het vlak ZOY is $u = \int z dy$, tusschen de grenzen BC en BA.

De vergelijking van de ellips OCX is:

$$\frac{(x - \tfrac{1}{2}a)^2}{(\tfrac{1}{2}a)^2} + \frac{y^2}{(\tfrac{1}{2}b)^2} = 1,$$

(*) Dit voorstel en de twee volgende voorstellen zijn ontleend aan het programma voor het examen *middelbaar onderwijs* 1873.

Digitized by Google

hieruit volgt: $BC = \frac{b}{a}\sqrt{as - s^2} = p.$

De vergelijking van de ellips YAX is:

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hieruit volgt: $BA = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = q.$

Derhalve is:

$$u = c\int_p^q \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dy = \frac{c}{b}\int_p \sqrt{q^2 - y^2}\, dy$$

$$= \frac{c}{b}\left\{\frac{y\sqrt{q^2 - y^2}}{2} + \frac{q^2}{2} arc\ Sin\frac{y}{q}\right\}_p^q$$

$$= \frac{c}{b}\left\{\frac{q^2\pi}{4} - \frac{p\sqrt{q^2 - p^2}}{2} - \frac{q^2}{2} arc\ Sin\frac{p}{q}\right\}.$$

De gezochte inhoud is nu:

$$\int_0^a u dx = 1 + 2 + 3.$$

Verder is:

$$1 = \frac{\pi c}{4b}\int_0^a q^2 dx = \frac{\pi c}{4b}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - s^2)\, ds = \frac{\pi abc}{6},$$

$$2 = -\frac{c}{2b}\int_0^a p\sqrt{q^2 - p^2}\, ds = -\frac{c}{2b}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a - x)\sqrt{as}\, dx$$

$$= -\frac{2}{15}abc.$$

$$3 = -\frac{c}{2b}\int_0^a q^2 arc Sin\frac{p}{q} = -\frac{c}{2b}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) arc Sin\sqrt{\frac{s}{a+s}}\, ds$$

$$= \left(\frac{16}{45} - \frac{\pi}{6}\right)abc.$$

NB. Bij de laatste integratie, stelle men

$$arc\ Sin\sqrt{\frac{x}{a + x}} = y,$$

waardoor de grenzen veranderen in 0 en $\frac{\pi}{4}$.

Dus $\int_0^a u dx = \frac{2}{9}abc$; er wordt dus uitgeboord: $\frac{6\pi - 8}{9}abc.$

Digitized by Google

CCXLIII. Voorstel.

Door W. H. Wisselink.

Gegeven zijn twee vlakke krommen A *en* B *en een punt* P *daartusschen. Door dat punt eene rechte lijn te trekken zoo, dat de afstand* MM′ *van twee punten* M *en* M′ *respectivelijk liggende op* A *en* B *een minimum zij. Aan te toonen dat, als men de normalen in* M *en in* M′ *construeert en uit het snijpunt* Q *eene loodlijn op* MM′ *laat vallen, die loodlijn door het punt* P *gaat.*

Opgelost *door* W. H. Wisselink *en* L. van der Est.

Oplossing *van* W. H. Wisselink.

Zijn de vergelijkingen der krommen A en B:

$$y = f(x) \quad \text{en} \quad y = \phi(x)$$

en de coördinaten van P: a, b en c.

Laten de coördinaten der punten M en M′ respectivelijk zijn (x_1, y_1) en (x_2, y_2), dan moet bij rechthoekige assen

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

een minimum zijn.

Blijkbaar is hier slechts één der veranderlijken *onafhankelijk* veranderlijk, b. v.: x_1.

Wij hebben dus:

$$(x_1 - x_2)\left(1 - \frac{dx_2}{dx_1}\right) + (y_1 - y_2)\left(\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy_2}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}\right) = 0. \quad (1)$$

Daar $y_1 = f(x_1)$ en $y_2 = f(x_2)$ is:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \phi' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Daar (x_1, y_1), (a, b) en (x_2, y_2) in eene rechte lijn liggen, is:

$$\frac{x_1 - a}{a - x_2} = \frac{y_1 - b}{b - y_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

of:

$$b(x_1 - x_2) - a(y_1 - y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

of:

$$\left.\begin{aligned} & b\left(1 - \frac{dx_2}{dx_1}\right) - a\left(\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy_2}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}\right) \\ & = x_1\frac{dy_2}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1} + y_2 - x_2\frac{dy_1}{dx_1} - y_1\frac{dx_2}{dx_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Noemen we $\frac{dx_2}{dx_1} = R$, dan is (volgens (1), (2) en (3)):

Digitized by Google

$$(x_1 - x_2)(1 - R) + (y_1 - y_2)(f' - \phi' R) = 0 \quad . \quad . \quad (6)$$

$$b(1 - R) - a(f' - \phi' R) = y_2 - x_2 f' + (x_1 \phi' - y_1) R \quad . \quad (7)$$

$$y_1 = f(x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$y_2 = \phi(x_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\frac{x_1 - a}{a - x_2} = \frac{y_1 - b}{b - y_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Door R uit de eerste twee vergelijkingen te elimineeren, hebben wij ter bepaling der vier onbekenden x_1, y_1, x_2 en y_2 ook vier vergelijkingen, zoodat daardoor de gevraagde lijn volkomen bepaald is.

Om aan te toonen dat de loodlijn, uit Q op MM_1 neergelaten, door P gaat, nemen we P als oorsprong der coördinatenassen aan, dan is: $a = b = 0$.

De normaal van A in (x_1, y_1) is, volgens bekende formules:

$$Y - y_1 = -\frac{1}{f'}(X - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

en die in (x_2, y_2):

$$Y - y_2 = -\frac{1}{\phi'}(X - x_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Alsdan wordt (4): $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$.

De vergelijking van MM' is verder:

$$Y = \frac{y_1}{x_1} X, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

terwijl de algemeene vergelijking der lijnen, gaande door het snijpunt van (11) en (12), is:

$$X + f'Y - x_1 - y_1 f' - k(X + \phi' Y - x_2 - y_2 \phi') \quad . \quad (14)$$

Zal deze loodrecht staan op (13), dan moet:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{f' - \phi' k}{1 - k}$$

of:

$$k = \frac{x_1 f' - y_1}{x_1 \phi' - y_1}.$$

Hierdoor wordt (14):

$$\left.\begin{array}{l} x_1(\phi' - f')X + y_1(\phi' - f')Y - (x_1\phi' - y_1)(x_1 + y_1 f') \\ \quad + (x_1 f' - y_1)(x_2 + y_2 \phi') = 0 \end{array}\right\} (15)$$

Uit (6) en (7) volgt voor $a = b = 0$ en eliminatie van R uit (6) en (7):

Digitized by Google

$$\{x_1 - x_2 + f'(y_1 - y_2)\} - \{x_1 - x_2 + \phi'(y_1 - y_2)\} \frac{x_2 f' - y_2}{x_1 \phi' - y_1} = 0$$

of omdat $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ is (na eenige herleiding):

$$1 + \frac{y_1}{x_1} f' - \left\{1 + \frac{y_1}{x_1}\phi'\right\} \frac{x_1 f' - y_1}{x_1 \phi' - y_1} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 0$$

of: $$1 + \frac{y_1}{x_1} f' - \left(1 + \frac{y_2}{x_2}\phi'\right) \frac{x_1 f' - y_1}{x_1 \phi' - y_1} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 0$$

of: $(x_1 + y_1 f')(x_1 \phi' - y_1) - (x_2 + y_2 \phi')(x_1 f' - y_2) = 0.$

Hierdoor wordt de vergelijking (15):

$$x_1 X + y_1 Y = 0,$$

d. i.: de loodlijn op MM' uit Q gaat door den oorsprong of P, waarmede het tweede deel der vraag opgelost is.

CCXLIV. VOORSTEL.

Door W. H. WISSELINK.

Men vraagt de kromme te bepalen, waarvan de lengte (te beginnen bij $s = 0$) eene gegevene functie is van de overeenkomstige koorde (uit den oorsprong).

OPGELOST *door* W. H. WISSELINK *en* W. KAPTEYN.

OPLOSSING *van* W. H. WISSELINK.

Zij voor de functie gegeven:

$$s = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Door middel van poolcoördinaten hebben wij onmiddellijk:

$$\int_0^r \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2} = f(r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

of: $$\sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2} = f'(r)\, dr,$$

$$dr^2 + r^2 d\phi^2 = f'^2(r)\, dr^2$$

of: $$1 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 = f'^2(r),$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r} \sqrt{f'^2(r) - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Waaruit: $$\phi = \int \frac{1}{r} \sqrt{f'^2(r) - 1}\, dr + C. \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

Noemen we:

$$\int \frac{1}{r} \sqrt{f'^2(r) - 1}\, dr = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

dan is de vergelijking:

Digitized by Google

$$boog\ tang\ \frac{y}{x} = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}) + C.$$

Voor $f(r) = r$ is b. v. vergelijking (3):

$$\frac{d\phi}{dr} = 0$$

of

$$\phi = C.$$

d. i.: eene rechte lijn.

Voor $f(r) = \frac{1}{2}r$ is vergelijking (3) imaginair; in het algemeen zal $f(r) > r$ moeten zijn, hetgeen zeer wel overeenstemmen zal met de eigenschap, dat een boog grooter is dan de overeenkomstige koorde.

CCXLV. Voorstel. (*)

Door C. J. Matthes.

Een stelsel kegelsneden is een' gegeven vierhoek omschreven. Te bewijzen, dat de meetkundige plaats der pool van eene willekeurig gegevene rechte lijn, met opzicht tot eenige kegelsnede van het stelsel eene kegelsnede is, die door de toppen van den vierhoek gaat.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

Oplossing *van* C. J. Matthes.

Projecteer de gegeven lijn tot het oneindige, zoo gaan de polen over in de middelpunten der kegelsneden. Nu kan men bewijzen, zie Ferrers, § 183, bl. 156, dat de meetkundige plaats der middelpunten van kegelsneden eenen vierhoek omschreven, eene kegelsnede is, gaande door de toppen, waaruit het gestelde volgt.

CCXLVI. Voorstel.

Door C. J. Matthes.

Men heeft een stelsel van kegelsneden, die de zijden van een gegeven driehoek aanraken, terwijl uit een gegeven punt een paar raaklijnen getrokken is aan elke kegelsnede van het stelsel. Te bewijzen dat, bijaldien de meetkundige plaats van het eene raakpunt eene rechte lijn is, die van het andere eene kegelsnede zijn zal, den gegeven driehoek omschreven.

Opgelost *door* C. J. Matthes.

(*) Dit voorstel en de twee volgende voorstellen zijn ontleend aan Ferrers *Nieuwere Meetkunde*, voorbeelden 66, 67 en 68.

Digitized by Google

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Deze stelling is de wederkeerige van die van Voorstel CXCI. Zij toch het gegeven punt P middelpunt van wederkeerigheid, dan worden de ingeschreven kegelsneden omgeschreven hyperbels tot den wederkeerigen driehoek A'B'C'. De wederkeerigen der raakpunten uit het punt P zijn asymptoten. Blijft nu het eene raakpunt voor de verschillende kegelsneden op een rechte lijn, zoo gaat de eene asymptoot door een bepaald punt, en de andere is bewezen te zijn omhuld door eene den wederkeerigen △ A'B'C' ingeschreven kegelsnede, waaruit volgt dat de meetkundige plaats van het andere raakpunt eene kegelsnede is, △ ABC omschreven.

CCXLVII. VOORSTEL.

Door C. J. MATTHES.

De raaklijn in een willekeurig punt P *aan eene kegelsnede getrokken, waarvan* S *en* H *de brandpunten zijn, wordt gesneden door twee gekoppelde middellijnen in* T *en* t. *Te bewijzen, dat de driehoeken* SPT *en* HP*t onderling gelijkvormig zijn.*

OPGELOST *door* C. J. MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. MATTHES.

Zij de kegelsnede (zie fig. 108) de projectie van een cirkel AP_1B, dan zijn de gekoppelde halve middellijnen OL, OM projectiën van twee loodrecht op elkander staande stralen OL_1, OM_1, en men heeft: $PT : Pt = P_1T_1 : P_1t_1$,

$$PT \times Pt : P_1T_1 \times P_1t_1 = PT^2 : P_1T_1^2 = a^2 - e^2x^2 : a^2$$
$$= PS \times PH : OP_1^2.$$

$$\text{Immers } PT^2 = P_1T_1^2 \times \frac{a^2 - x^2}{a^2} + P_1T_1^2 \times \frac{x^2}{a^2} \times \frac{b^2}{a^2}$$

$$= P_1T_1^2 \left\{a^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2\right\} : a^2 = P_1T_1^2 \left\{a^2 - e^2x^2\right\} : a^2.$$

In de △△ PST, PH*t* heeft men derhalve ∠ SPT = ∠ HP*t* en bovendien, daar $OP_1^2 = P_1T_1 \times P_1t_1$ en bijgevolg $PS \times PH = PT \times Pt$,

$$PS : PT = Pt : PH.$$

CCXLVIII. VOORSTEL. (*)

Door J. J. TEDING VAN BERKHOUT.

Zij de middellijn AB *eens cirkels harmonisch gedeeld in* C

(*) Dit voorstel en de twee volgende voorstellen zijn zonder bewijs opgegeven in het werkje vermeld bij N°. 92.

Digitized by Google

en D *en het punt* D *gelegen buiten den cirkel. Trekt men nu* DE *loodrecht op* AB *en door* C *eene lijn, welke den cirkel snijde in* G *en in* H, *en de lijn* DE *in* K *en in* G *aan den cirkel eene raaklijn, welke* DE *snijde in* L, *dan is de rechthoek onder* LD *en* DK *gelijk aan den rechthoek onder* AD *en* DB.

Opgelost *door* K. Bes *en* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* K. Bes.

(Zie fig. 109).

$$AD \times BD = (MD + MB)(MD - MB) = MD^2 - MB^2.$$

Daar A, B, D en C harmonisch liggen, is de helft MB van AB middenevenredig tusschen MC en MD, dus $MB^2 = MC \times MD$. Nu wordt $AD \times BD = MD(MD - MC)$ of $AD \times BD = MD \times CD$ (1). Trekken wij ML, dan is ML loodrecht op GH, want L is de pool der lijn GH ten opzichte van den cirkel, daar de pool L van GH zoowel ligt op de raaklijn GL als op de lijn DE, de poollijn van C ten opzichte van den cirkel. Daar nu CD loodrecht staat op LK, zoo is $\angle LMD = \angle DCK$. De rechthoekige driehoeken MDL en KDC zijn nu gelijkvormig.

Wij hebben dus: $MD : DL = KD : DC$

of: $MD \times DC = DL \times KD$ (2).

Deze vergelijking, in verband met (1), geeft:

$$AD \times BD = DL \times KD,$$

hetgeen juist de eigenschap is die te bewijzen was.

CCXLIX. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij in het punt C *in de middellijn of de verlengde middellijn* AB *eens cirkels eene loodlijn* CD *opgericht op* AB; *trekt men nu uit* A *en* B *de lijnen* AE *en* BE *tot eenig punt* E *in den omtrek des cirkels, welke lijnen* CD *snijden in* F *en in* G, *dan is de rechthoek onder* GC *en* CF *gelijk aan den rechthoek onder* AC *en* CB.

Opgelost *door* T. van Tijn, G. J. D. Mounier, K. Bes *en* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* T. van Tijn.

(Zie fig. 110). $\angle E$ is recht, omdat zijn hoekpunt in den omtrek van den cirkel ligt en zijne beenen door de uiteinden van de middellijn des cirkels gaan. $\angle A$ en $\angle BGC$ zijn aan elkander gelijk, omdat, (ook $\angle C$ als recht gegeven

Digitized by Google

zijnde) de beenen van den een loodrecht staan op de beenen van den ander en zij gelijktijdig grooter of kleiner worden (waardoor zij niet elkanders supplementen zijn). Daarom is de rechthoekige driehoek ACF ∽ rechth. driehoek BCG; de gelijkstandige zijden zijn dan evenredig en dus:

$$AC : CF = CG : CB,$$

waaruit volgt: $CG \times CF = AC \times CB.$

Op gelijke wijze wordt deze eigenschap bewezen, wanneer het punt C aangenomen wordt te liggen op de verlengde middellijn AB.

CCL. Voorstel.

Door J. J. Teding van Berkhout.

Zij de middellijn AB *eens cirkels in* C *en* D *harmonisch gedeeld, het punt* D *binnen den cirkel en* DE *loodrecht op* AB *getrokken in* D, *den cirkel-omtrek snijdende in* E *en* F. *Trekt men nu door* C *eene lijn, welke den cirkel-omtrek in* G *en* H *snijdt en uit* G *en* H *tot eenig punt* N *in den cirkel-omtrek lijnen* GN *en* HN, *welke* DE *snijden in* M *en* L *respectivelijk, dan is de rechthoek onder* LD *en* DM *gelijk aan het vierkant op* DE.

Opgelost *door* K. Bes *en* J. J. Teding van Berkhout.

Oplossing *van* K. Bes.

Zij fig. 111 geteekend, zooals in het vraagstuk bedoeld is. Trekken wij nog de lijn CN, die den cirkel andermaal snijdt in G′, en vereenigen wij G en G′, dan gaat de lijn GG′ door L, want daar AB in C en D harmonisch verdeeld is, is EF de poollijn van C ten opzichte van den cirkel en worden dus GH en G′N ook harmonisch verdeeld. — Deze paren harmonische punten hebben één punt C gemeen, derhalve snijden de verbindingslijnen der andere overeenkomstige punten elkaâr in één punt. NCHLG is nu een volledige vierzijde en GN eene diagonaal daarin, dan moet de andere diagonaal HG′ ook door het snijpunt M van EF en GN gaan, want het snijpunt der diagonalen is een punt der poollijn, zoowel van C ten opzichte van ∠ HLG, als van L ten opzichte van ∠ NCH. De lijnen GG′ en NH worden dus door L en de snijpunten met de lijn CM harmonisch gedeeld, waarom CM de poollijn van L is ten opzichte van den cirkel. De lijn EF wordt dus in M en L

Digitized by Google

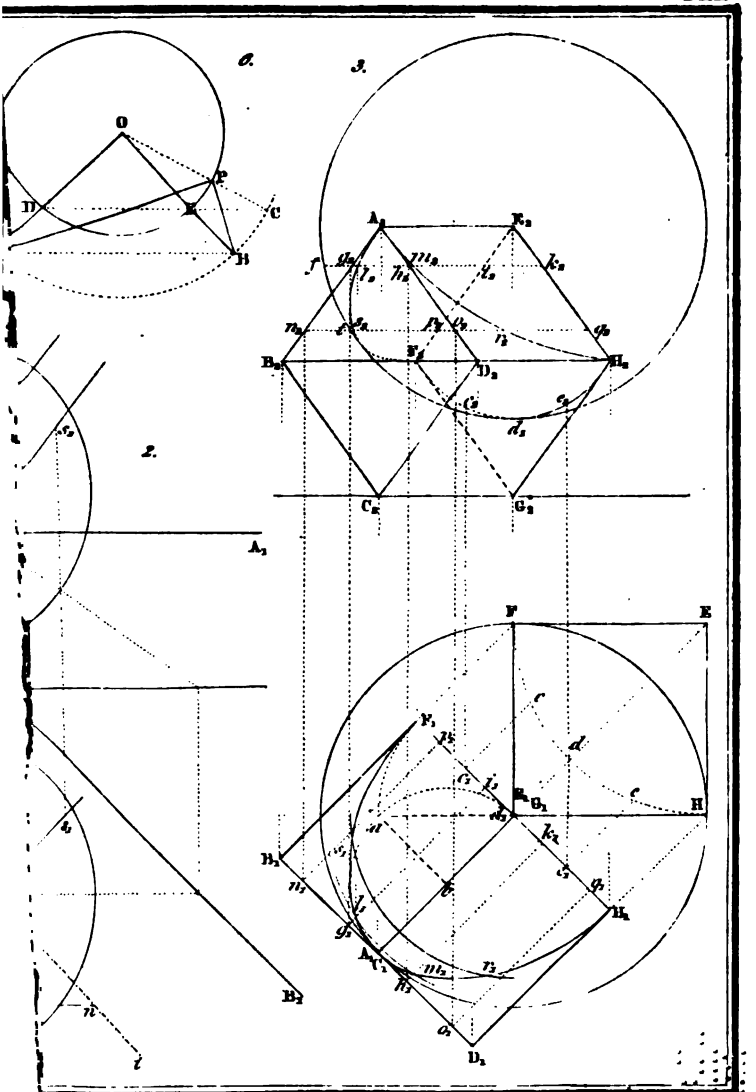
ook harmonisch gedeeld. Daar nu van eene harmonisch gedeelde lijn de helft middenevenredig is tusschen de afstanden van het midden tot de toegevoegde punten, zoo is $\square$ DE = rechth. onder DM en DL.

Er zijn in dit deel eenige drukfouten blijven staan, o. a.:

Bl.	8	reg.	20	van boven	staat:	$BC = \ldots = 214$	lees: $BC = \ldots = \sqrt{214}$.
„	9	„	5	„ „	„	$A = \frac{1+8B}{4}$	lees: $A = -\frac{1+8B}{4}$.
„	13	„	9	„ „	„	$\left(\frac{1}{2z} - 2lz\right)$	lees: $\left(\frac{1}{2z} - zlz\right)$.
„	16	„	8	„ „	„	$+ 2C_1C_1$	lees: $+ 2C_1C_2$.
„	162	laatste regel			„	$\angle$ EA'B'	lees: $\angle$ EA'D.
„	169	reg. 3		van onderen	„	halfcirkel	lees: hulpcirkel.

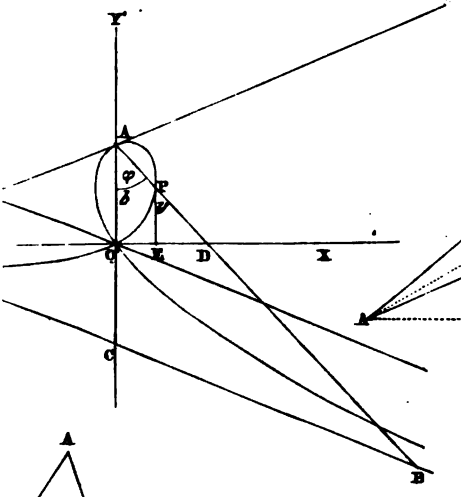
De overige vergeve en verbetere de goedgunstige lezer.

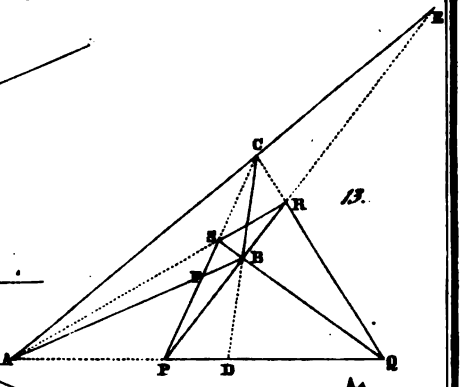
Digitized by Google

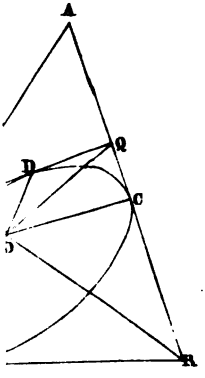


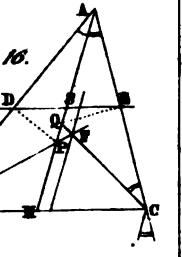
Digitized by Google

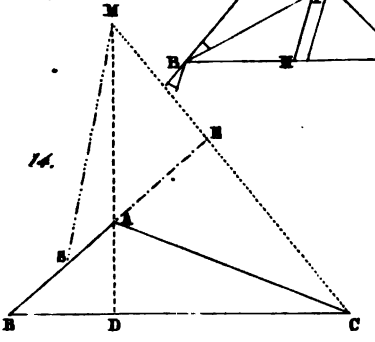
Digitized by Google

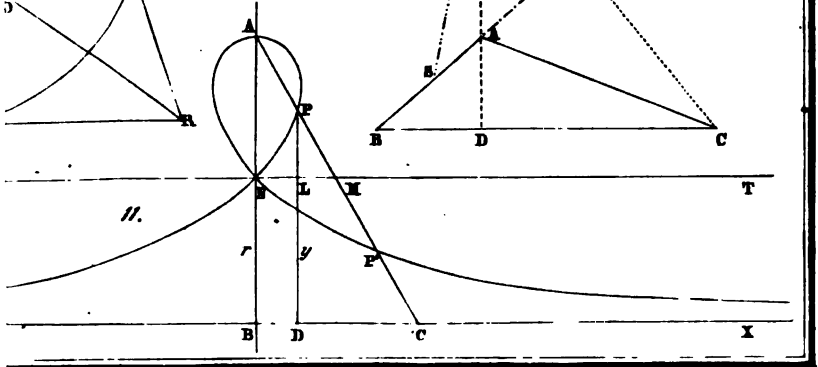








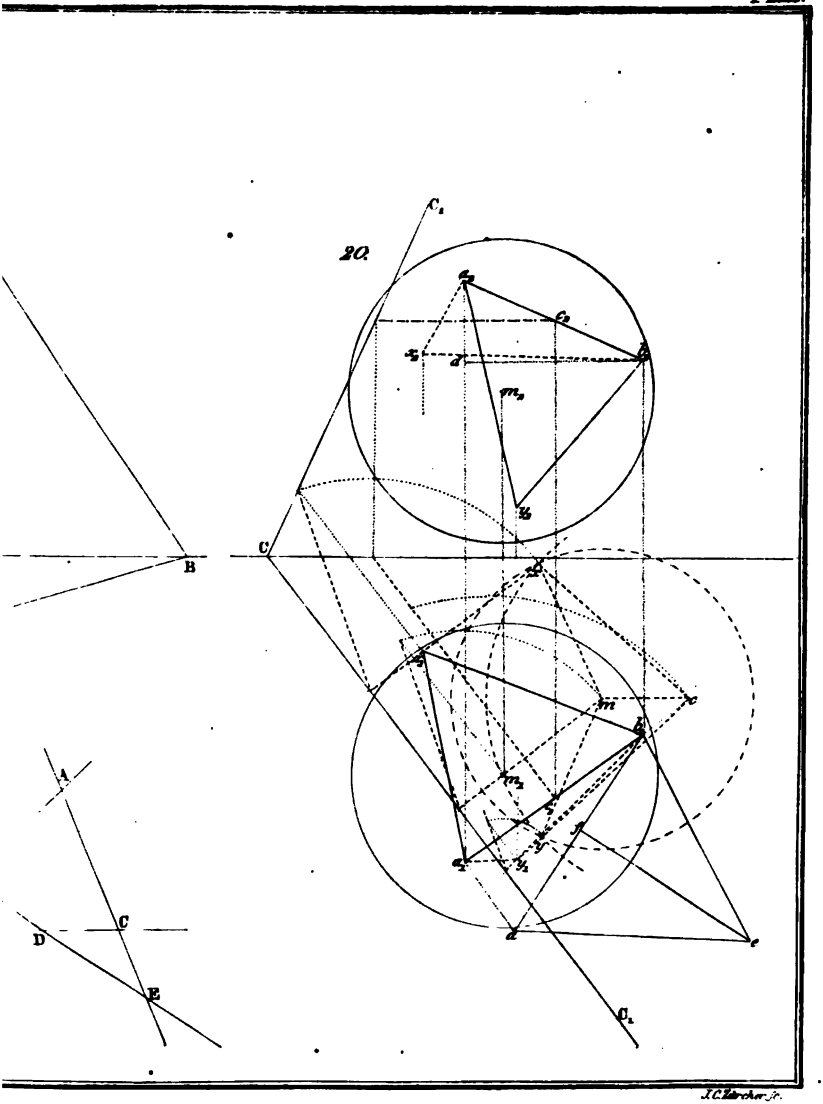




J. C. Punscher f.

Digitized by Google

Digitized by Google

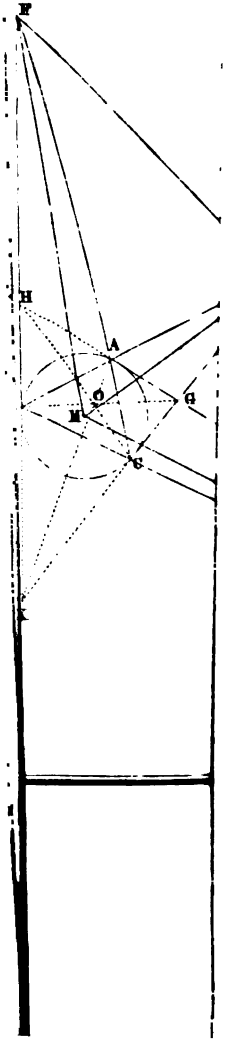


J.C.Lorcher jr.

Digitized by Google

Digitized by Google

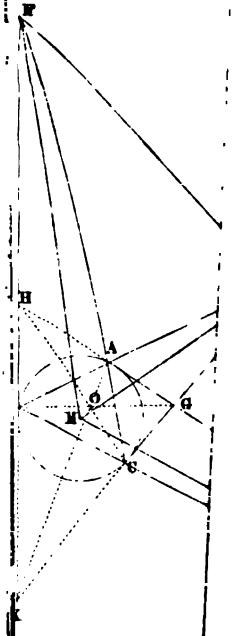
WISK



Digitized by Google

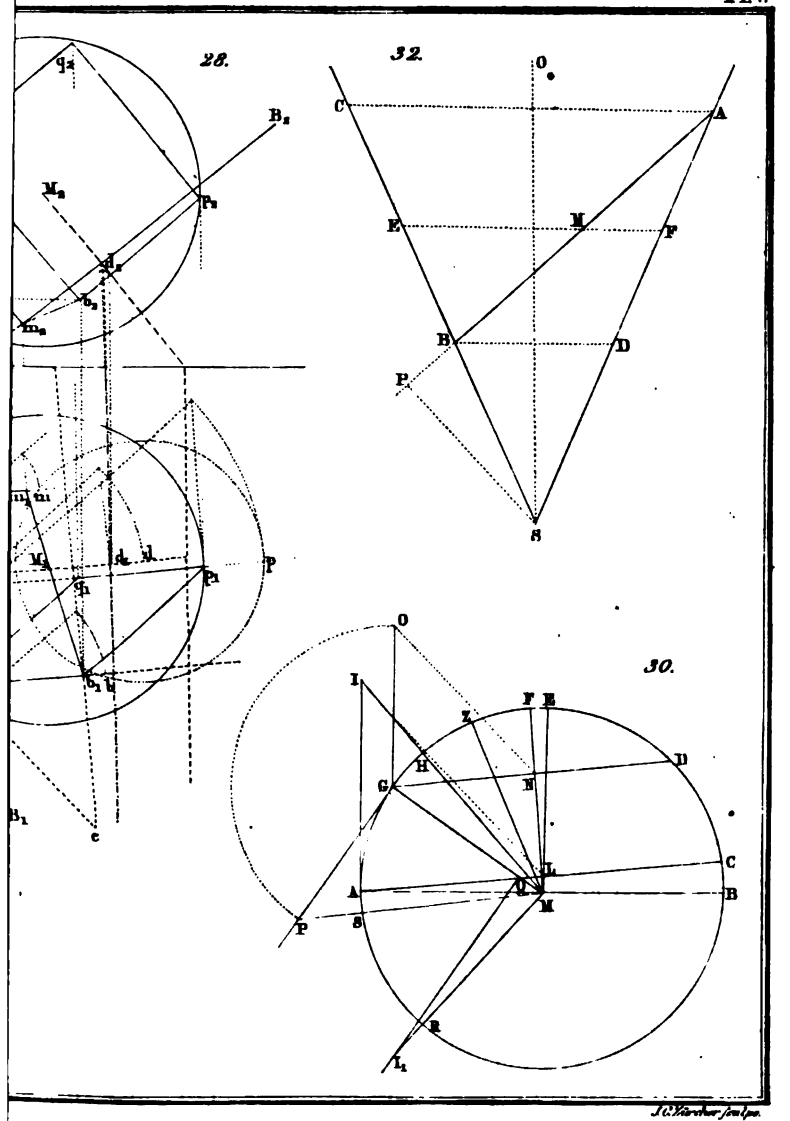
Digitized by Google

WISK



Digitized by Google

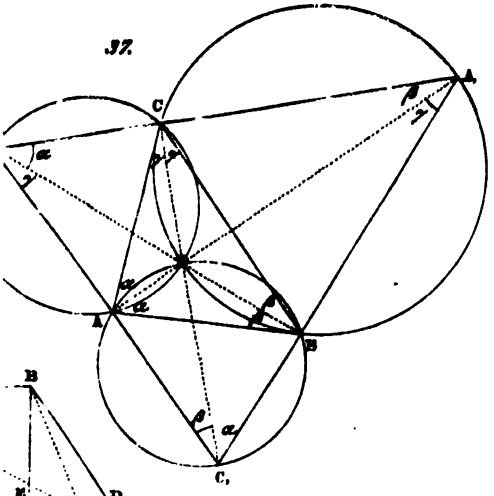
Digitized by Google



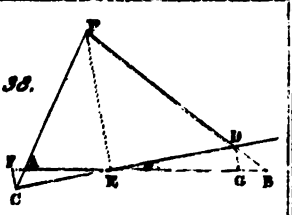
Digitized by Google

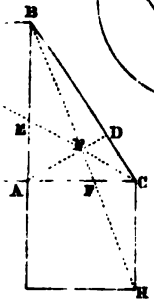
Digitized by Google

37.

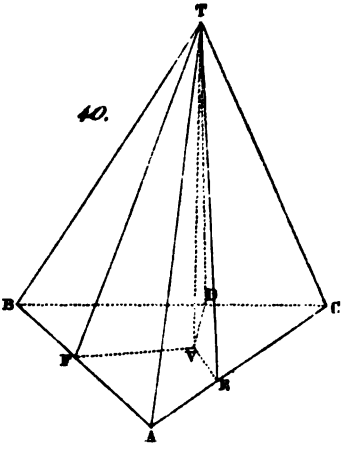


38.

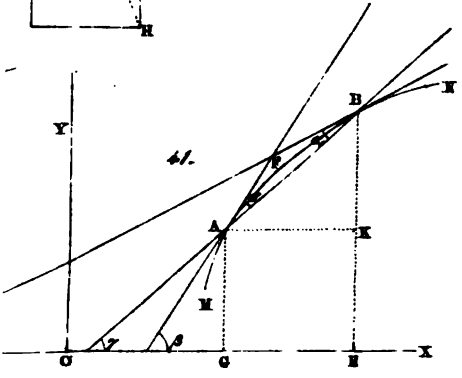




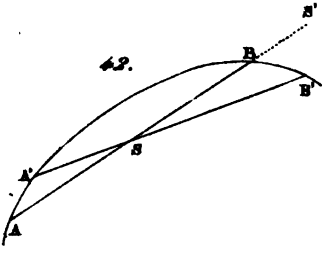
40.



41.



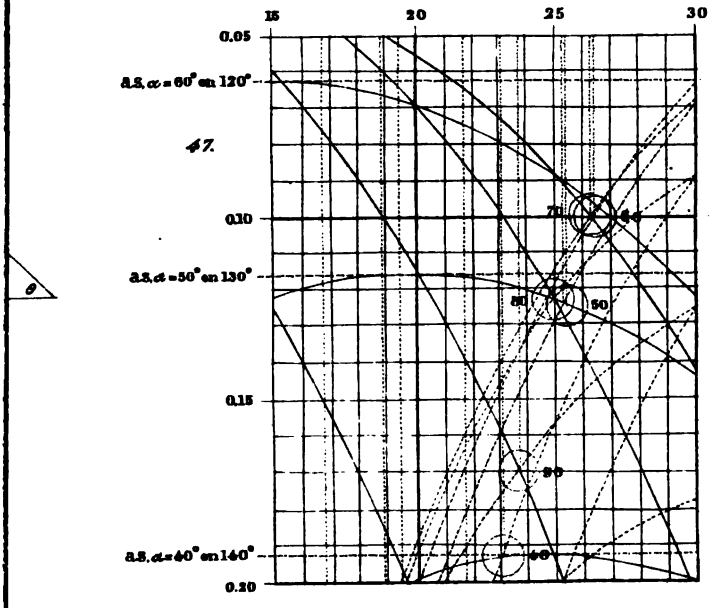
43.

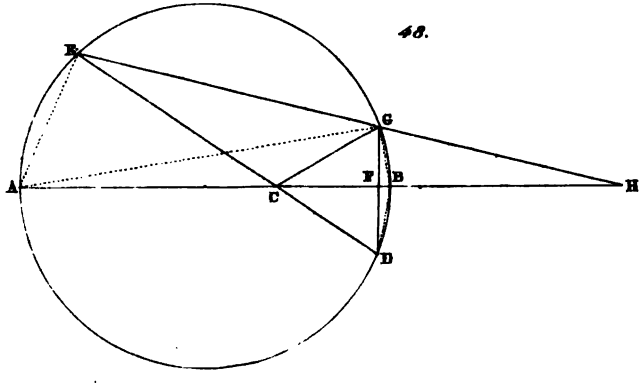


J.C. Zürcher sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

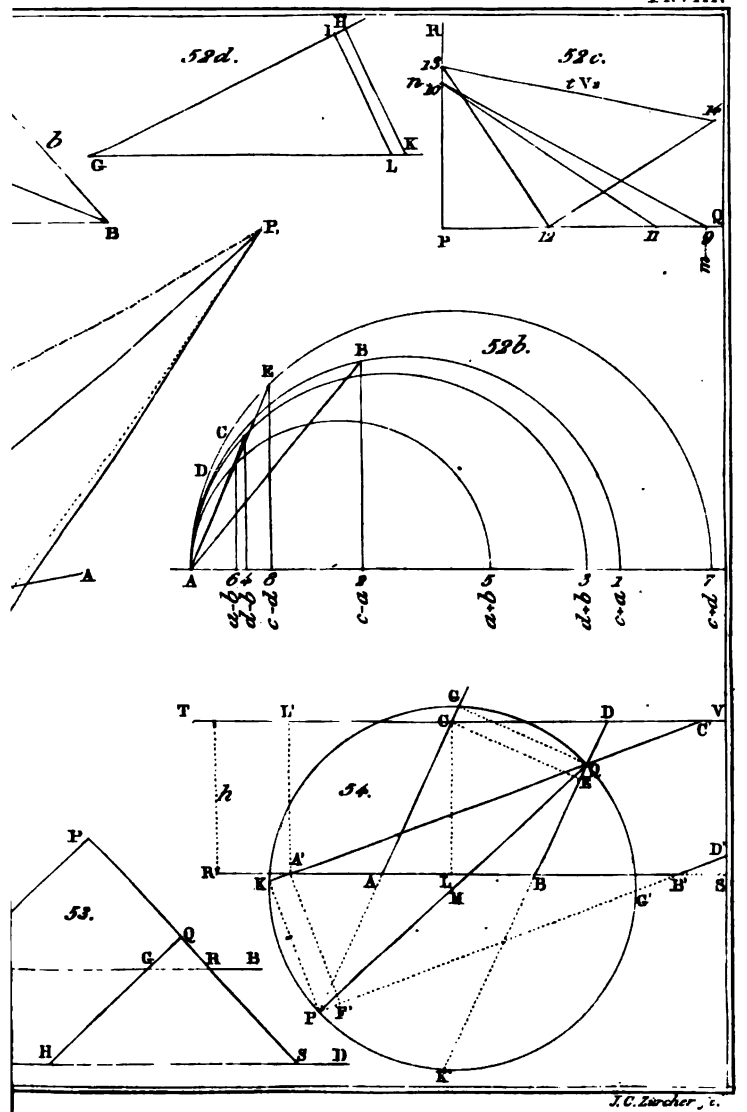




J. C. Zürcher sc.

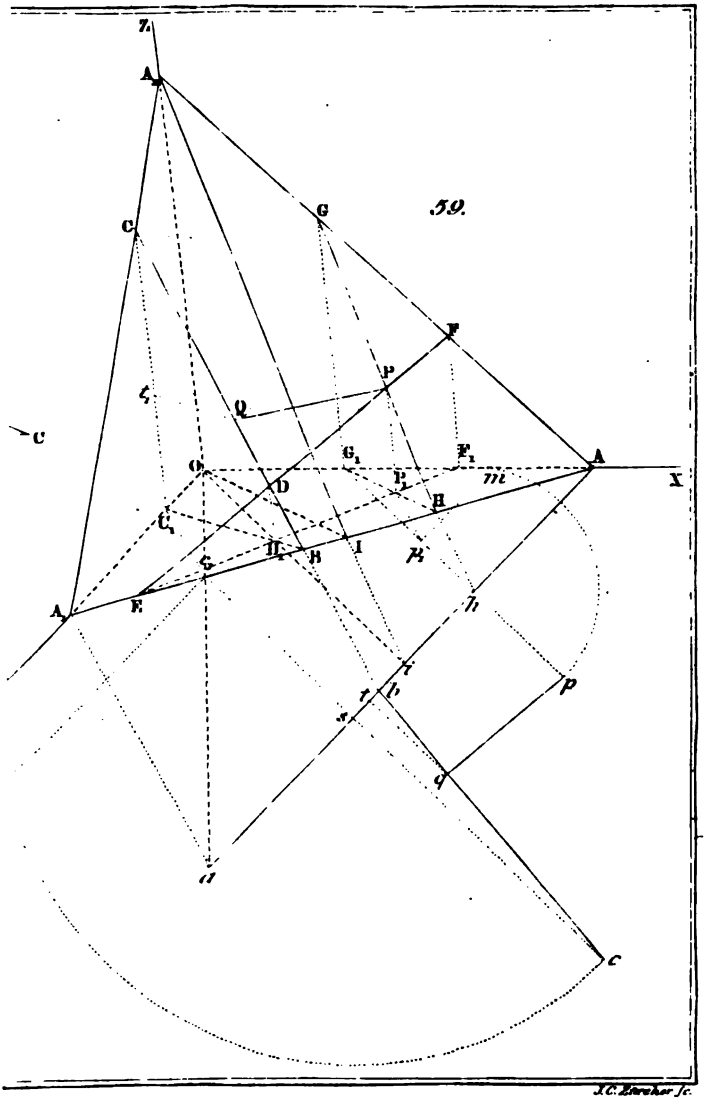
Digitized by Google

Digitized by Google



J. C. Zürcher, fc.

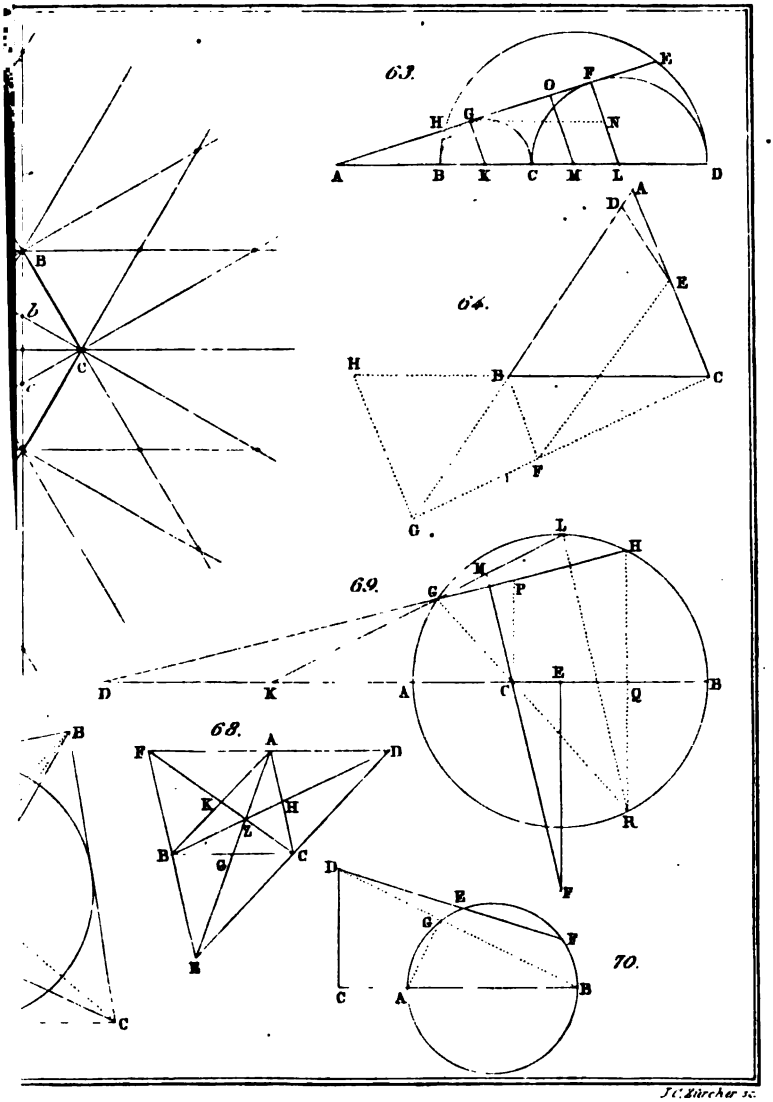
Digitized by Google



J.C. Zürcher Sc.

Digitized by Google

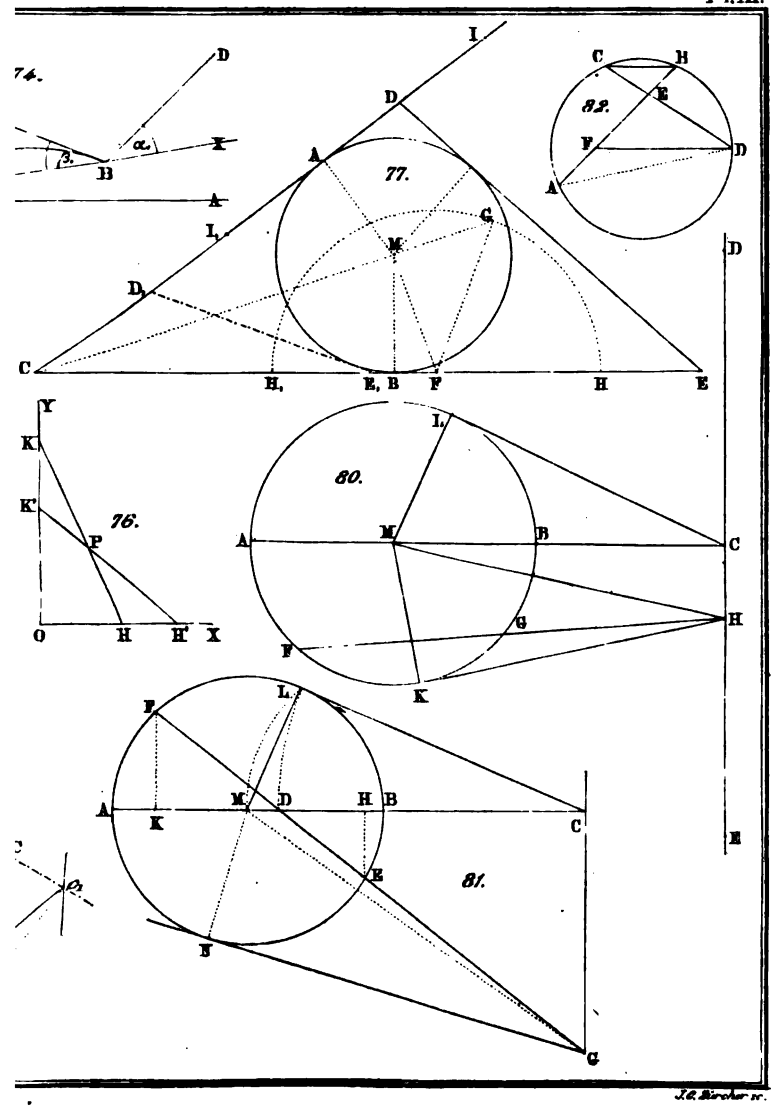
Digitized by Google



J. C. Bircher sc.

Digitized by Google

Digitized by Google



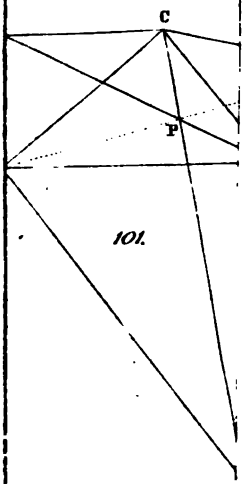
J. C. Bircher sc.

Digitized by Google

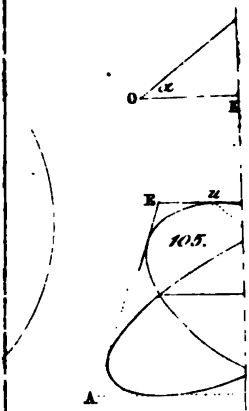
Digitized by Google

Digitized by Google

GAVEN.



101.



105.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

ROOM USE ONLY

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06818 3055

Digitized by Google

Digitized by Google